

2015 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

一、选择题，共 6 题，每题 4 分，共 24 分

1. (4 分) 下列等式成立的是 ()

- A. $2^{-2} = -2^2$ B. $2^6 \div 2^3 = 2^2$ C. $(2^3)^2 = 2^5$ D. $2^0 = 1$

2. (4 分) 下列各整式中，次数为 5 次的单项式是 ()

- A. xy^4 B. xy^5 C. $x+y^4$ D. $x+y^5$

3. (4 分) 如果最简二次根式 $\sqrt{x+2}$ 与 $\sqrt{3x}$ 是同类二次根式，那么 x 的值是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

4. (4 分) 如果正多边形的一个内角等于 135° ，那么这个正多边形的边数是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

5. (4 分) 下列说法中，正确的个数有 ()

- ①一组数据的平均数一定是该组数据中的某个数据；
②一组数据的中位数一定是该组数据中的某个数据；
③一组数据的众数一定是该组数据中的某个数据.

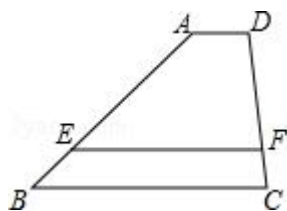
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

6. (4 分) 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，下列结论中不正确的是 ()

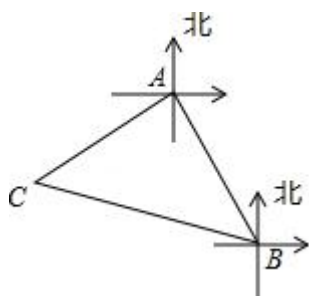
- A. 当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形
B. 当 $AC \perp BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形
C. 当 $OA=OB$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形
D. 当 $\angle ABD = \angle CBD$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形

二、填空题，共 12 小题，每题 4 分，共 48 分

7. (4分) 化简: $|\sqrt{3}-2|$ = _____.
8. (4分) 分解因式: $x^3 - 4x$ = _____.
9. (4分) 方程 $x = \sqrt{3x+4}$ 的解是 _____.
10. (4分) 已知分式方程 $\frac{x^2+1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} = 3$, 如果 $t = \frac{x^2+1}{x}$, 那么原方程可化为关于 t 的整式方程是 _____.
11. (4分) 如果反比例函数的图象经过点 $(3, -4)$, 那么这个反比例函数的比例系数是 _____.
12. (4分) 如果随意把各面分别写有数字“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”的骰子抛到桌面上, 那么正面朝上的数字是合数的概率是 _____.
13. (4分) 为了解某山区金丝猴的数量, 科研人员在改山区不同的地方捕获了 15 只金丝猴, 并在它们的身上做标记后放回该山区. 过段时间后, 在该山区不同的地方又捕获了 32 只金丝猴, 其中 4 只身上有上次做的标记, 由此可估计该山区金丝猴的数量约有 _____ 只.
14. (4分) 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, 那么向量 $\overrightarrow{AG}$ 用向量 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示为 _____.
15. (4分) 如图, 已知 $AD \parallel EF \parallel BC$, $AE = 3BE$, $AD = 2$, $EF = 5$, 那么 $BC =$ _____.

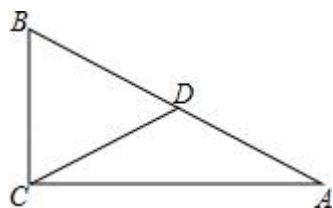


16. (4分) 如图, 已知小岛 B 在基地 A 的南偏东 30° 方向上, 与基地 A 相距 10 海里, 货轮 C 在基地 A 的南偏西 60° 方向、小岛 B 的北偏西 75° 方向上, 那么货轮 C 与小岛 B 的距离是 _____ 海里.



17. (4分) 对于函数 $y = (ax+b)^2$, 我们称 $[a, b]$ 为这个函数的特征数. 如果一个函数 $y = (ax+b)^2$ 的特征数为 $[2, -5]$, 那么这个函数图象与 x 轴的交点坐标为_____.

18. (4分) 如图, 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, D 是斜边 AB 的中点, $AC=4$, $BC=2$, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 CD 折叠, 点 A 落在点 E 处, 联结 AE , 那么线段 AE 的长度等于_____.



三、简答题, 共 7 题, 共 78 分

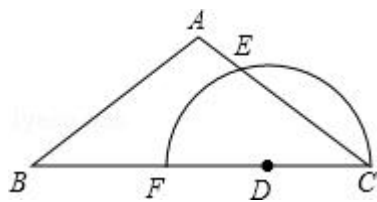
19. (10分) 化简并求值: $(1 + \frac{1}{x-1}) + \frac{x^2}{x^2-2x+1}$, 其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

20. (10分) 解不等式组: $\begin{cases} 5x+2 \geq 3x-6 \\ \frac{x-2}{6} > \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$, 并写出它的非负整数解.

21. (10分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, 以点 D 为圆心, CD 为半径作半圆, 分别与边 AC 、 BC 相交于点 E 和点 F . 如果 $AB=AC=5$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $AE=1$. 求:

(1) 线段 CD 的长度;

(2) 点 A 和点 F 之间的距离.



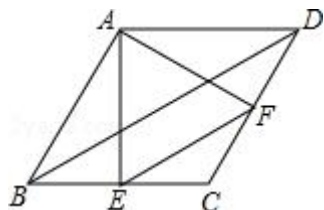
22. (10 分) 小张利用休息日进行登山锻炼, 从山脚到山顶的路程为 12 千米. 他

上午 8 时从山脚出发, 到达山顶后停留了半个小时, 再原路返回, 下午 3 时 30 分回到山脚. 假设他上山与下山时都是匀速行走, 且下山比上山时的速度每小时快 1 千米. 求小张上山时的速度.

23. (12 分) 如图, 已知在平行四边形 ABCD 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E, $AF \perp CD$, 垂足为点 F.

(1) 如果 $AB=AD$, 求证: $EF \parallel BD$;

(2) 如果 $EF \parallel BD$, 求证: $AB=AD$.

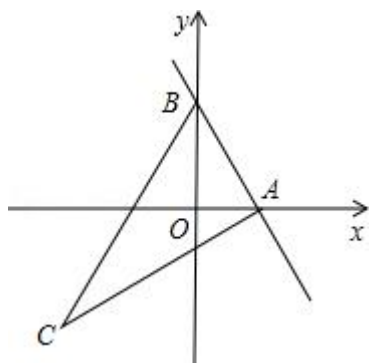


24. (12 分) 已知: 如图, 直线 $y=kx+2$ 与 x 轴正半轴相交于 $A(t, 0)$, 与 y 轴相交于点 B, 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 A 和点 B, 点 C 在第三象限内, 且 $AC \perp AB$, $\tan \angle ACB = \frac{1}{2}$.

(1) 当 $t=1$ 时, 求抛物线的表达式;

(2) 试用含 t 的代数式表示点 C 的坐标;

(3) 如果点 C 在这条抛物线的对称轴上, 求 t 的值.



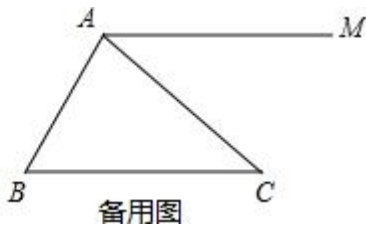
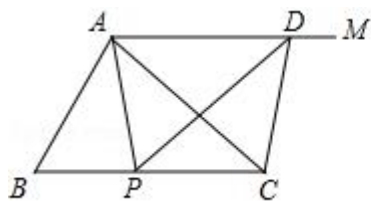
25. (14 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 射线 $AM \parallel BC$, P 是边 BC 上一动点,

$\angle APD = \angle B$, PD 交射线 AM 于点 D . 联结 CD . $AB=4$, $BC=6$, $\angle B=60^\circ$.

(1) 求证: $AP^2 = AD \cdot BP$;

(2) 如果以 AD 为半径的圆 A 与以 BP 为半径的圆 B 相切. 求线段 BP 的长度;

(3) 将 $\triangle ACD$ 绕点 A 旋转, 如果点 D 恰好与点 B 重合, 点 C 落在点 E 的位置上, 求此时 $\angle BEP$ 的余切值.



2015 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题，共 6 题，每题 4 分，共 24 分

1. (4 分) 下列等式成立的是 ()

A. $2^{-2} = -2^2$ B. $2^6 \div 2^3 = 2^2$ C. $(2^3)^2 = 2^5$ D. $2^0 = 1$

【考点】47：幂的乘方与积的乘方；48：同底数幂的除法；6E：零指数幂；6F：负整数指数幂.

【分析】根据负整数指数幂，可判断 A，根据同底数幂的除法，可判断 B，根据幂的乘方，可判断 C，根据 0 指数幂，可判断 D.

【解答】解：A、负整数指数幂与正整数指数幂互为倒数，故 A 错误；

B、同底数幂的除法底数不变指数相减，故 B 错误；

C、幂的乘方底数不变指数相乘，故 C 错误；

D、非零的零次幂等于 1，故 D 正确；

故选：D.

【点评】本题考查了同底数幂的除法，熟记法则并根据法则计算是解题关键.

2. (4 分) 下列各整式中，次数为 5 次的单项式是 ()

A. xy^4 B. xy^5 C. $x+y^4$ D. $x+y^5$

【考点】42：单项式.

【分析】根据单项式的次数是所有字母的指数和，可得答案.

【解答】解：A、是 5 次单项式，故 A 正确；

B、是 6 次单项式，故 B 错误；

C、是多项式，故 C 错误；

D、是 5 次多项式，故 D 错误；

故选：A.

【点评】 本题考查了单项式，需注意：单项式中的数字因数叫做这个单项式的系数，几个单项式的和叫做多项式，单项式中，所有字母的指数和叫做这个单项式的次数.

3. (4 分) 如果最简二次根式 $\sqrt{x+2}$ 与 $\sqrt{3x}$ 是同类二次根式，那么 x 的值是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【考点】 77: 同类二次根式.

【分析】 根据题意，它们的被开方数相同，列出方程求解即可.

【解答】 解：由最简二次根式 $\sqrt{x+2}$ 与 $\sqrt{3x}$ 是同类二次根式，
得 $x+2=3x$,

解得 $x=1$.

故选：C.

【点评】 本题考查同类二次根式的概念，同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式.

4. (4 分) 如果正多边形的一个内角等于 135° ，那么这个正多边形的边数是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【考点】 L3: 多边形内角与外角.

【分析】 根据正多边形的一个内角是 135° ，则知该正多边形的一个外角为 45° ，再根据多边形的外角之和为 360° ，即可求出正多边形的边数.

【解答】 解： $\because$ 正多边形的一个内角是 135° ，
 $\therefore$ 该正多边形的一个外角为 45° ，
 $\therefore$ 多边形的外角之和为 360° ，

∴ 边数 $n=360 \div 45=8$,

∴ 该正多边形的边数是 8.

故选: D.

【点评】 本题主要考查多边形内角与外角的知识点, 解答本题的关键是知道多边形的外角之和为 360° , 此题难度不大.

5. (4 分) 下列说法中, 正确的个数有 ()

- ① 一组数据的平均数一定是该组数据中的某个数据;
- ② 一组数据的中位数一定是该组数据中的某个数据;
- ③ 一组数据的众数一定是该组数据中的某个数据.

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【考点】 W1: 算术平均数; W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】 根据平均数的定义, 即可判断①; 根据中位数的定义, 即可判断②; 根据众数的定义即可判断③.

【解答】 解: ① 根据平均数的定义, 可判断①错误, 如 3, 7, 8 三个数的平均数为: $\frac{3+7+8}{3}=6$;

② 根据中位数的定义可判断②错误, 当数据个数为偶数个时, 中位数不一定是该组数据中的某个数据, 如 2, 2, 4, 5 的中位数为: $\frac{2+4}{2}=3$;

③ 根据众数的定义可判断③正确.

故选: B.

【点评】 此题考查了平均数, 中位数, 众数的定义, 解题的关键是: 熟记这三种数据的定义.

6. (4 分) 已知四边形 ABCD 是平行四边形, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, 下列结论中不正确的是 ()

- A. 当 $AB=BC$ 时, 四边形 ABCD 是菱形
- B. 当 $AC \perp BD$ 时, 四边形 ABCD 是菱形

C. 当 $OA=OB$ 时, 四边形 $ABCD$ 是矩形

D. 当 $\angle ABD=\angle CBD$ 时, 四边形 $ABCD$ 是矩形

【考点】L5: 平行四边形的性质; L9: 菱形的判定; LC: 矩形的判定.

【分析】利用矩形的判定、四边形的性质及菱形的判定方法分别判断后即可确定正确的选项.

【解答】解: A、根据邻边相等的平行四边形是菱形可以得到该结论正确;

B、根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形可以得到该选项正确;

C、根据对角线相等的平行四边形是矩形可以判断该选项正确;

D、不能得到一个角是直角, 故错误,

故选: D.

【点评】本题考查了矩形的判定、四边形的性质及菱形的判定方法, 牢记判定方法是解答本题的关键.

二、填空题, 共 12 小题, 每题 4 分, 共 48 分

7. (4 分) 化简: $|\sqrt{3}-2| = \underline{2-\sqrt{3}}$.

【考点】28: 实数的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】要先判断出 $\sqrt{3}-2 < 0$, 再根据绝对值的定义即可求解.

【解答】解: $\because \sqrt{3}-2 < 0$

$$\therefore |\sqrt{3}-2| = 2 - \sqrt{3}.$$

故答案为: $2 - \sqrt{3}$.

【点评】此题主要考查了绝对值的性质. 要注意负数的绝对值是它的相反数.

8. (4 分) 分解因式: $x^3 - 4x = \underline{x(x+2)(x-2)}$.

【考点】55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【专题】 44: 因式分解.

【分析】 应先提取公因式 x , 再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】 解: $x^3 - 4x$,

$$=x(x^2 - 4),$$

$$=x(x+2)(x-2).$$

故答案为: $x(x+2)(x-2)$.

【点评】 本题考查了提公因式法, 公式法分解因式, 提取公因式后利用平方差公式进行二次因式分解, 分解因式一定要彻底, 直到不能再分解为止.

9. (4 分) 方程 $x = \sqrt{3}x + 4$ 的解是 $x = -2 - 2\sqrt{3}$.

【考点】 7B: 二次根式的应用; 86: 解一元一次方程.

【分析】 根据一元一次方程的解法求解, 然后分母有理化即可.

【解答】 解: 移项得, $x - \sqrt{3}x = 4$,

合并同类项得, $(1 - \sqrt{3})x = 4$,

$$\text{系数化为 1 得, } x = \frac{4}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = -2 - 2\sqrt{3},$$

$$\text{即 } x = -2 - 2\sqrt{3}.$$

故答案为: $x = -2 - 2\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了二次根式的应用, 解一元一次方程, 难点在于要分母有理化.

10. (4 分) 已知分式方程 $\frac{x^2+1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} = 3$, 如果 $t = \frac{x^2+1}{x}$, 那么原方程可化为关于 t 的整式方程是 $t^2 - 3t + 2 = 0$.

【考点】 B4: 换元法解分式方程.

【分析】 把 $t = \frac{x^2+1}{x}$ 代入方程, 得出 $t + \frac{2}{t} = 3$, 整理成一般形式即可.

【解答】 解: $\because \frac{x^2+1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} = 3$, $t = \frac{x^2+1}{x}$,

$$\therefore t + \frac{2}{t} = 3,$$

$$\text{整理得: } t^2 - 3t + 2 = 0,$$

$$\text{故答案为: } t^2 - 3t + 2 = 0.$$

【点评】 本题考查了用换元法解分式方程的应用，解此题的关键是能正确换元，题目是一道比较典型的题目，难度不是很大.

11. (4 分) 如果反比例函数的图象经过点 (3, -4)，那么这个反比例函数的比例系数是 -12.

【考点】 G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】 直接根据反比例函数中 $k=xy$ 的特点进行解答即可.

【解答】 解: $\because$ 反比例函数的图象经过点 (3, -4),

$$\therefore k = 3 \times (-4) = -12.$$

故答案为: -12.

【点评】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

12. (4 分) 如果随意把各面分别写有数字“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”的骰子抛到桌面上，那么正面朝上的数字是合数的概率是 $\frac{1}{3}$.

【考点】 X4: 概率公式.

【分析】 由随意把各面分别写有数字“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”的骰子抛到桌面上，共有 6 中等可能的结果，正面朝上的数字是合数的有 4, 6; 直接利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】 解: $\because$ 随意把各面分别写有数字“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”的骰子抛到桌面上，共有 6 中等可能的结果，正面朝上的数字是合数的有 4, 6;

$$\therefore \text{正面朝上的数字是合数的概率是: } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点评】此题考查了概率公式的应用. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

13. (4 分) 为了解某山区金丝猴的数量, 科研人员在改山区不同的地方捕获了 15 只金丝猴, 并在它们的身上做标记后放回该山区. 过段时间后, 在该山区不同的地方又捕获了 32 只金丝猴, 其中 4 只身上有上次做的标记, 由此可估计该山区金丝猴的数量约有 120 只.

【考点】V5: 用样本估计总体.

【分析】设该山区金丝猴的数量约有 x 只金丝猴, 根据第一次捕获了 15 只金丝猴, 在它们的身上做标记后放回该山区, 第二次又捕获了 32 只金丝猴, 其中 4 只身上有上次做的标记, 列出方程, 求出 x 的值即可.

【解答】解: 设该山区金丝猴的数量约有 x 只金丝猴, 依题意得

$x: 15=32: 4$,

解得: $x=120$.

则该山区金丝猴的数量约有 120 只.

故答案为: 120.

【点评】本题主要考查了利用样本估计总体的思想, 用样本估计整体让整体 $\times$ 样本的百分比即可.

14. (4 分) 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, 那么向量 $\overrightarrow{AG}$ 用向量 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示为 $-\frac{2}{3}\vec{m}+\frac{1}{3}\vec{n}$.

【考点】K5: 三角形的重心; LM: *平面向量.

【分析】由点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 根据三角形重心的性质, 即可求得 $\overrightarrow{BD}$, 再利用三角形法则求得 $\overrightarrow{AD}$ 的长, 继而求得答案.

【解答】解：如图，

∵点G是△ABC的重心， $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$,

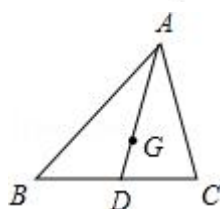
$$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{n},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n},$$

∵点G是△ABC的重心，

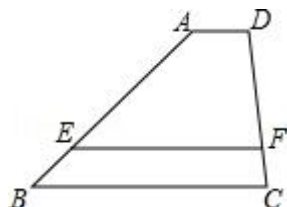
$$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{m}+\frac{1}{3}\vec{n}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}\vec{m}+\frac{1}{3}\vec{n}$.



【点评】此题考查了平面向量的知识与三角形重心的性质. 注意掌握三角形法则的应用.

15. (4分) 如图, 已知 $AD \parallel EF \parallel BC$, $AE=3BE$, $AD=2$, $EF=5$, 那么 $BC=\frac{17}{3}$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】首先延长BA与CD, 相交于点G, 由 $AD \parallel EF \parallel BC$, 可得 $\triangle GAD \sim \triangle GEF$, $\triangle GAD \sim \triangle GBC$, 又由 $AD=2$, $EF=5$, 根据相似三角形的对应边成比例, 即可求得BC的长.

【解答】解: 延长BA与CD, 相交于点G,

∵ $AD \parallel EF \parallel BC$,

∴ $\triangle GAD \sim \triangle GEF$, $\triangle GAD \sim \triangle GBC$,

$$\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{GA}{GB} = \frac{AD}{BC},$$

$$\therefore AD=2, EF=, AE=9,$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{GA}{GA+9},$$

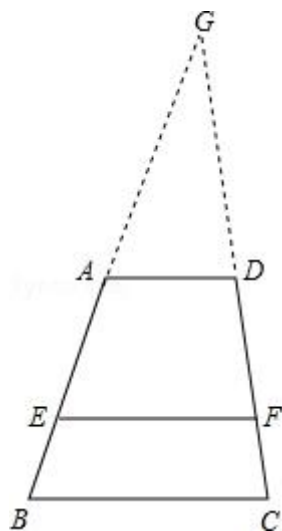
$$\text{解得: } GA=6,$$

$$\therefore GB=GA+AE+BE=18,$$

$$\therefore \frac{6}{18} = \frac{2}{BC},$$

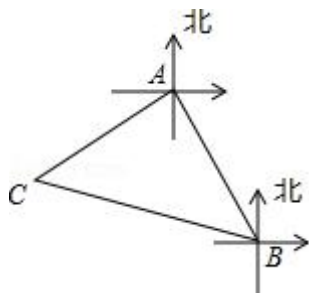
$$\text{解得: } BC=6.$$

故答案为: 6.



【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及平行线分线段成比例定理. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意数形结合思想的应用.

16. (4 分) 如图, 已知小岛 B 在基地 A 的南偏东 30° 方向上, 与基地 A 相距 10 海里, 货轮 C 在基地 A 的南偏西 60° 方向、小岛 B 的北偏西 75° 方向上, 那么货轮 C 与小岛 B 的距离是 $10\sqrt{2}$ 海里.



【考点】TB: 解直角三角形的应用 – 方向角问题.

【分析】由已知可得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，已知 $AB=10$ 海里，根据等腰直角三角形的性质即可求得斜边 BC 的长.

【解答】解：如图，由题意得， $\angle BAD=30^\circ$ ， $\angle CAD=60^\circ$ ， $\angle CBE=75^\circ$ ， $AB=10$ 海里.

$\therefore AD \parallel BE$,

$\therefore \angle ABE = \angle BAD = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle CBE - \angle ABE = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

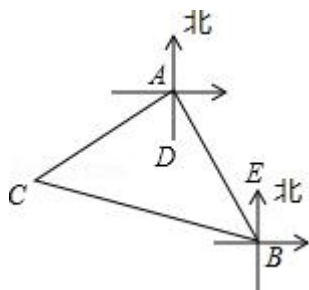
在 $\triangle ABC$ 中， $\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AB=10$ 海里，

$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 10\sqrt{2}$ 海里.

故答案为 $10\sqrt{2}$.



【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题，等腰直角三角形的判定与性质，掌握方向角的定义从而证明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形是解题的关键.

17. (4分) 对于函数 $y = (ax+b)^2$ ，我们称 $[a, b]$ 为这个函数的特征数. 如果一个函数 $y = (ax+b)^2$ 的特征数为 $[2, -5]$ ，那么这个函数图象与 x 轴的交点坐标为 $(\frac{5}{2}, 0)$.

【考点】HA：抛物线与 x 轴的交点.

【专题】23：新定义.

【分析】首先根据函数的特征数新定义求出 a 和 b 的值，然后令 $y=0$ ，即可求出 x 的值.

【解答】解： $\because$ 对于函数 $y=(ax+b)^2$ ，我们称 $[a, b]$ 为这个函数的特征数，函数 $y=(ax+b)^2$ 的特征数为 $[2, -5]$ ，

$$\therefore a=2, b=-5,$$

$$\therefore \text{函数为 } y=(2x-5)^2,$$

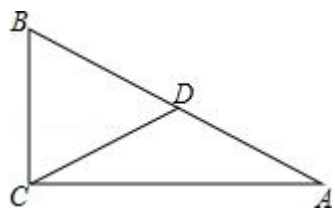
$$\therefore (2x-5)^2=0 \text{ 解得 } x=\frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{这个函数图象与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } \left(\frac{5}{2}, 0\right),$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

【点评】本题主要考查了抛物线与 x 轴交点的知识，解答本题的关键是掌握函数的特征数新定义，此题难度不大.

18. (4 分) 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， D 是斜边 AB 的中点， $AC=4$ ， $BC=2$ ，将 $\triangle ACD$ 沿直线 CD 折叠，点 A 落在点 E 处，联结 AE ，那么线段 AE 的长度等于 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.



【考点】PB：翻折变换（折叠问题）.

【分析】延长 CD 交 AE 于 F ，由折叠的性质得出 $CF \perp AE$ ， $AC=EC$ ，得出 $\angle AFC=90^\circ$ ， $AF=EF$ ，由勾股定理求出 AB ，由直角三角形斜边上的中线性质的得出 $CD=\frac{1}{2}AB=AD$ ，得出 $\angle DCA=\angle DAC$ ，证出 $\triangle AFC \sim \triangle BCA$ ，得出对应边成比例 $\frac{AF}{BC}=\frac{AC}{AB}$ ，求出 AF ，即可得出 AE 的长.

【解答】解：如图所示：延长 CD 交 AE 于 F ，

由折叠的性质得： $CF \perp AE$ ， $AC=EC$ ，

$$\therefore \angle AFC=90^\circ, AF=EF,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，

$$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5},$$

$\therefore D$ 是斜边 AB 的中点，

$$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=AD,$$

$$\therefore \angle DCA=\angle DAC,$$

$$\therefore \angle AFC=\angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AFC \sim \triangle BCA,$$

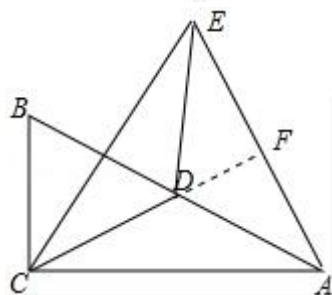
$$\therefore \frac{AF}{BC}=\frac{AC}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{AF}{2}=\frac{4}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore AF=\frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AE=2AF=\frac{8\sqrt{5}}{5};$$

$$\text{故答案为: } \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$



【点评】 本题考查了翻折变换的性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质；熟练掌握翻折变换的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

三、简答题，共 7 题，共 78 分

19. (10 分) 化简并求值： $(1+\frac{1}{x-1}) + \frac{x^2}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x=\sqrt{2}+1$.

【考点】 6D：分式的化简求值.

【分析】先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再把 x 的值代入进行计算即可.

【解答】解：原式 $= \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) + \frac{x^2}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-x}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-x}{(x-1)^2}$$

当 $x=\sqrt{2}+1$ 时，原式 $= \frac{2 \times (\sqrt{2}+1)^2 - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{5+3\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

20. (10 分) 解不等式组： $\begin{cases} 5x+2 \geq 3x-6 \\ \frac{x-2}{6} > \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$ ，并写出它的非负整数解.

【考点】CB：解一元一次不等式组；CC：一元一次不等式组的整数解.

【分析】首先分别计算出两个不等式的解集，然后再根据大小小大中间找确定不等式组的解集，然后再找出非负整数解.

【解答】解： $\begin{cases} 5x+2 \geq 3x-6 \text{ ①} \\ \frac{x-2}{6} > \frac{x}{2} - 1 \text{ ②} \end{cases}$

由①得： $x \geq -4$,

由②得： $x < 2$,

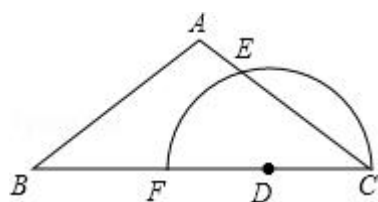
不等式组的解集为： $-4 \leq x < 2$,

非负整数解为： 0, 1.

【点评】此题主要考查了一元一次不等式组的解法，关键是掌握解集的规律：同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到.

21. (10 分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, 以点 D 为圆心, CD 为半径作半圆, 分别与边 AC 、 BC 相交于点 E 和点 F . 如果 $AB=AC=5$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $AE=1$. 求:

- (1) 线段 CD 的长度;
- (2) 点 A 和点 F 之间的距离.



【考点】M5: 圆周角定理; T7: 解直角三角形.

【分析】(1) 连接 EF , 利用圆周角定理得出 $\angle FEC=90^\circ$, 再利用等腰三角形的性质, 结合锐角三角函数得出答案;

(2) 利用锐角三角函数得出 NC 的长, 再利用勾股定理得出答案.

【解答】解: (1) 连接 EF ,

$\because$ 由题意可得 FC 是 $\odot D$ 的直径,

$\therefore \angle FEC=90^\circ$,

$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB$,

$\because AB=AC=5$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $AE=1$,

$\therefore EC=4$, $\cos B = \cos \angle ACB = \frac{4}{5} = \frac{EC}{FC} = \frac{4}{FC}$,

解得: $FC=5$,

则 $DC=2.5$;

(2) 连接 AF , 过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N ,

$$\therefore AB=5, \cos B=\frac{4}{5},$$

$$\therefore BN=4,$$

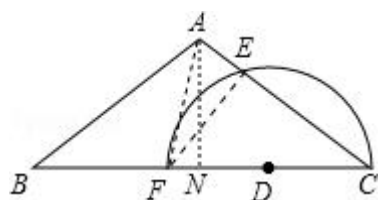
$$\therefore AN=3,$$

$$\therefore \cos C=\cos B=\frac{4}{5},$$

$$\therefore NC=4,$$

$$\therefore FN=1,$$

$$\therefore AF=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}.$$



【点评】此题主要考查了圆周角定理以及勾股定理和锐角三角函数等知识，正确应用锐角三角函数关系是解题关键.

22. (10 分) 小张利用休息日进行登山锻炼，从山脚到山顶的路程为 12 千米. 他上午 8 时从山脚出发，到达山顶后停留了半个小时，再原路返回，下午 3 时 30 分回到山脚. 假设他上山与下山时都是匀速行走，且下山比上山时的速度每小时快 1 千米. 求小张上山时的速度.

【考点】B7: 分式方程的应用.

【分析】设小张上山时的速度为 x 千米/小时，则下山时的速度为 $x+1$ 千米/小时，根据上下山所用时间和到达山顶后停留了半个小时为 15 时 30 分 - 8 时 = 7 小时 30 分列出方程解答即可.

【解答】解：设小张上山时的速度为 x 千米/小时，则下山时的速度为 $x+1$ 千米/小时，由题意得

$$\frac{12}{x} + \frac{1}{2} + \frac{12}{x+1} = 7.5,$$

解得： $x=3$ 或 $x=-\frac{4}{7}$ (不合题意，舍去)，

经检验 $x=3$ 是原分式方程的解.

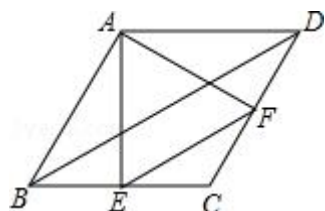
答：小张上山时的速度为 3 千米/小时.

【点评】 此题考查分式方程的实际运用，掌握行程问题中路程、时间、速度三者之间的关系是解决问题的关键.

23. (12 分) 如图，已知在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ，垂足为 E ， $AF \perp CD$ ，垂足为点 F .

(1) 如果 $AB=AD$ ，求证： $EF \parallel BD$;

(2) 如果 $EF \parallel BD$ ，求证： $AB=AD$.



【考点】 L5: 平行四边形的性质.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 (1) 直接利用平行四边形的性质结合全等三角形的判定方法得出 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (AAS)，进而求出答案;

(2) 利用平行线分线段成比例定理结合相似三角形的判定与性质得出 $\triangle ABE \sim \triangle ADF$ ，进而求出答案.

【解答】 证明：(1) $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle ADF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中

$$\therefore \begin{cases} \angle AEB = \angle AFD \\ \angle ABE = \angle ADF, \\ AB = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$,

$$\therefore BE=DF,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{DF}{DC},$$

$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$$

$$\therefore EF \parallel BD;$$

$$(2) \because EF \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{BC}{DC},$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ADF, \quad \angle AEB = \angle AFD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADF,$$

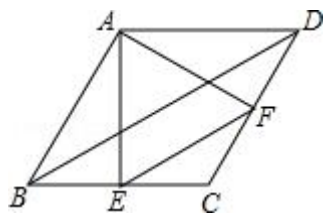
$$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{AB}{AD},$$

$$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD},$$

$$\therefore AD \times BC = AB \times DC,$$

$$\therefore AB^2 = AD^2,$$

$$\therefore AB = AD.$$



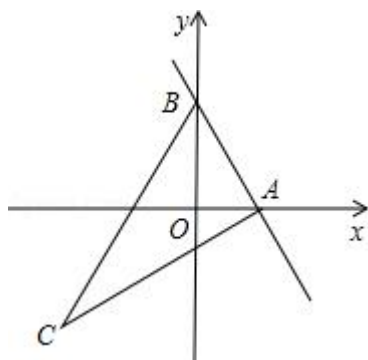
【点评】此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质和平行四边形的性质等知识，得出 $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD}$ 是解题关键.

24. (12 分) 已知: 如图, 直线 $y=kx+2$ 与 x 轴正半轴相交于 $A(t, 0)$, 与 y 轴相交于点 B , 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 A 和点 B , 点 C 在第三象限内, 且 $AC \perp AB$, $\tan \angle ACB = \frac{1}{2}$.

(1) 当 $t=1$ 时, 求抛物线的表达式;

(2) 试用含 t 的代数式表示点 C 的坐标;

(3) 如果点 C 在这条抛物线的对称轴上, 求 t 的值.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 把点 $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ 分别代入抛物线的表达式, 解方程组即可;

(2) 如图: 作 $CH \perp x$ 轴, 垂足为点 H , 根据 $\triangle AOB \sim \triangle CHA$, 得到 $\frac{OA}{CH} = \frac{OB}{AH} = \frac{AB}{AC}$,
根据 $\tan \angle ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, 得到 $\frac{OA}{CH} = \frac{OB}{AH} = \frac{1}{2}$, 根据 $OA=t$, 得到点 C 的坐标为 $(t-4, -2t)$.

(3) 根据点 $C(t-4, -2t)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的对称轴上, 得到 $t-4 = \frac{b}{2}$,
即 $b = 2t - 8$, 把点 $A(t, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 代入抛物线的表达式, 得 $-t^2 + bt + 2 = 0$,
可知 $t^2 + (2t - 8)t + 2 = 0$, 即 $t^2 - 8t + 2 = 0$, 据此即可求出 t 的值.

【解答】 解: (1) $\because t=1$, $y=kx+2$,

$\therefore A(1, 0)$, $B(0, 2)$,

把点 $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ 分别代入抛物线的表达式, 得 $\begin{cases} -1-b-c=0 \\ c=2 \end{cases}$,

解得, $\begin{cases} b=-1 \\ c=2 \end{cases}$,

$\therefore$ 所求抛物线的表达式为 $y = -x^2 - x + 2$.

(2) 如图: 作 $CH \perp x$ 轴, 垂足为点 H , 得 $\angle AHC = \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore AC \perp AB$,

$$\therefore \angle OAB + \angle CAH = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CAH + \angle ACH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle ACH,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle CHA,$$

$$\therefore \frac{OA}{CH} = \frac{OB}{AH} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{OA}{CH} = \frac{OB}{AH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OA = t, \quad OB = 2,$$

$$\therefore CH = 2t, \quad AH = 4,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (t - 4, -2t).$$

$$(3) \because \text{点 } C(t - 4, -2t) \text{ 在抛物线 } y = -x^2 + bx + c \text{ 的对称轴上},$$

$$\therefore t - 4 = \frac{b}{2}, \quad \text{即 } b = 2t - 8,$$

$$\text{把点 } A(t, 0)、B(0, 2) \text{ 代入抛物线的表达式, 得 } -t^2 + bt + 2 = 0,$$

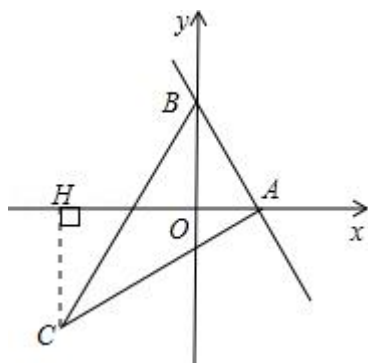
$$\therefore -t^2 + (2t - 8)t + 2 = 0, \quad \text{即 } t^2 - 8t + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } t = 4 \pm \sqrt{14},$$

$$\therefore \text{点 } C(t - 4, -2t) \text{ 在第三象限},$$

$$\therefore t = 4 + \sqrt{14} \text{ 不符合题意, 舍去},$$

$$\therefore t = 4 - \sqrt{14}.$$



【点评】 本题考查了二次函数综合题，涉及三角函数、待定系数法求二次函数解析式、相似三角形的性质等知识，难度较大.

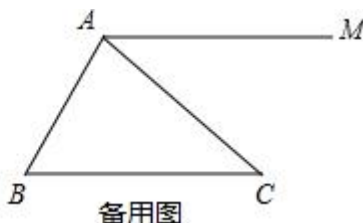
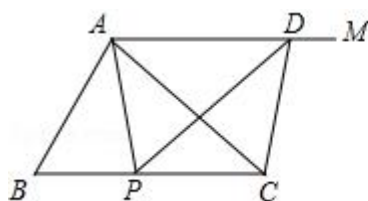
25. (14 分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，射线 $AM \parallel BC$ ，P 是边 BC 上一动点，

$\angle APD = \angle B$ ，PD 交射线 AM 于点 D. 联结 CD. $AB=4$ ， $BC=6$ ， $\angle B=60^\circ$.

(1) 求证: $AP^2 = AD \cdot BP$;

(2) 如果以 AD 为半径的圆 A 与以 BP 为半径的圆 B 相切. 求线段 BP 的长度;

(3) 将 $\triangle ACD$ 绕点 A 旋转，如果点 D 恰好与点 B 重合，点 C 落在点 E 的位置上，求此时 $\angle BEP$ 的余切值.



【考点】 SO: 相似形综合题.

【分析】 (1) 先由平行线证明 $\angle APB = \angle DAP$ ，再由已知条件 $\angle APD = \angle B$ ，证明 $\triangle ABP \sim \triangle DPA$ ，得出对应边成比例 $\frac{AP}{DA} = \frac{BP}{AP}$ ，即可得出结论;

(2) 设 $BP=x$ ，作 $AH \perp BC$ 于 H，先根据勾股定理求出 AH，再由勾股定理得出 $AP^2 = PH^2 + AH^2$ ，由两圆外切时， $AB = |AD \pm BP|$ ，得出方程，解方程即可;

(3) 作 $PG \perp AB$ 于 G; 先根据题意得出: $AD = AB = \frac{x^2 - 4x + 16}{x} = 4$ ，解方程求出

BP, 再证明 $\triangle ABP$ 为等边三角形, 求出PG, 然后证明四边形ADCH为矩形, 得出 $BE=CD=AH=2\sqrt{3}$, $\angle ABE=\angle ADC=90^\circ$, 求出BF, 即可求出 $\angle BEP$ 的余切值.

【解答】(1) 证明: $\because AM \parallel BC$,

$$\therefore \angle APB = \angle DAP,$$

$$\text{又} \because \angle APD = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle DPA,$$

$$\therefore \frac{AP}{DA} = \frac{BP}{AP},$$

$$\therefore AP^2 = AD \cdot BP;$$

(2) 解: 设 $BP=x$, 作 $AH \perp BC$ 于H, 如图1所示:

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAH = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\text{根据勾股定理得: } AH = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$AP^2 = PH^2 + AH^2 = (x-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 16,$$

$$\therefore AD = \frac{AP^2}{BP} = \frac{x^2 - 4x + 16}{x},$$

两圆相切时, $AB = |AD \pm BP|$,

$$\text{即 } 4 = |x \pm \frac{x^2 - 4x + 16}{x}|,$$

$$\text{解得: } x = 2,$$

$\therefore BP$ 的长度为2时, 两圆内切;

$$(3) \text{ 解: 根据题意得: } AD = AB = \frac{x^2 - 4x + 16}{x} = 4,$$

$$\text{解得: } x = 4,$$

$$\therefore BP=4,$$

$$\therefore \angle ABP=60^\circ, AB=BP=4,$$

$\therefore \triangle ABP$ 为等边三角形,

$$\therefore AD=AB=4, CH=BC-BH=4, AD \parallel CH, \angle AHC=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCH$ 为矩形,

$$\therefore BE=CD=AH=2\sqrt{3}, \angle ABE=\angle ADC=90^\circ,$$

作 $PG \perp AB$ 于 G , 如图 2 所示:

$$\text{则 } PG \parallel BE, PG=2\sqrt{3},$$

$$\therefore PG=BE,$$

$$\therefore BF=FG=\frac{1}{2}BG=1,$$

$$\therefore \cot \angle BEP = \frac{BE}{BF} = 2\sqrt{3}.$$

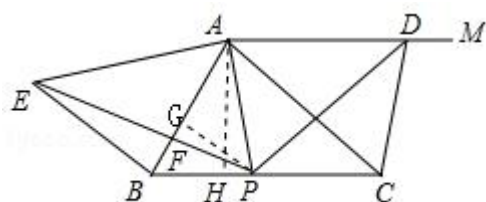


图 2

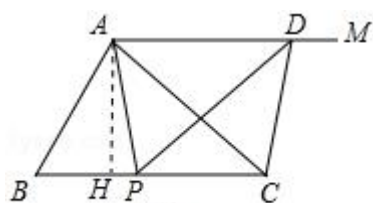


图 1

【点评】 本题是相似形综合题，考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理、两圆外切的条件、等边三角形的判定与性质、三角函数等知识；本题难度较大，综合性强，特别是 (2) (3) 中，需要通过作辅助线运用勾股定理和证明等边三角形、矩形才能得出结果.