

2015 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列各数中，无理数是 ()

- A. $\frac{22}{7}$ B. $\sqrt{9}$ C. π D. $\sqrt[3]{8}$

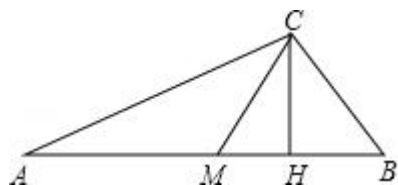
2. (4 分) 下列运算中，正确的是 ()

- A. $2x - x = 1$ B. $x + x = 2x$ C. $(x^3)^3 = x^6$ D. $x^8 \div x^2 = x^4$

3. (4 分) 某反比例函数的图象经过点 $(-2, 3)$ ，则此函数图象也经过点 ()

- A. $(2, -3)$ B. $(-3, -3)$ C. $(2, 3)$ D. $(-4, 6)$

4. (4 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，CH、CM 分别是斜边 AB 上的高和中线，则下列结论不正确的是 ()



- A. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ B. $CH^2 = AH \cdot HB$
C. $CM = \frac{1}{2}AB$ D. $CB = \frac{1}{2}AB$

5. (4 分) 某课外小组的同学们在社会实践活动中调查了 20 户家庭某月的用电量，如表所示：

用电量 (度)	120	140	160	180	200
户数	2	3	6	7	2

则这 20 户家庭该月用电量的众数和中位数分别是 ()

- A. 180, 160 B. 160, 180 C. 160, 160 D. 180, 180

6. (4 分) 下列命题中，假命题是 ()

- A. 没有公共点的两圆叫两圆相离

- B. 相交两圆的交点关于这两个圆的连心线所在直线对称
- C. 联结相切两圆圆心的直线必经过切点
- D. 内含的两个圆的圆心距大于零

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 计算： $2^{-2} =$ _____.

8. (4 分) 用科学记数法表示 660000 的结果是_____.

9. (4 分) 函数 $y = \frac{2x}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

10. (4 分) 分解因式： $4a^2 - 16 =$ _____.

11. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} -2x+5 < 1 \\ \frac{x-1}{3} \leq 2 \end{cases}$ 的解是_____.

12. (4 分) 方程 $\sqrt{6-x} = x$ 的解是_____.

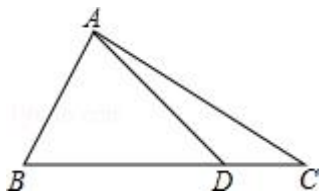
13. (4 分) 某商店运进 120 台空调准备销售，由于开展了促销活动，每天比原计划多售出 4 台，结果提前 5 天完成销售任务，则原计划每天销售多少台？

若原计划每天销售 x 台，则可得方程_____.

14. (4 分) 将 1、2、3 三个数字分别作为横坐标和纵坐标，随机生成的点的坐标如下表. 如果每个点出现的可能性相等，那么从中任意取一点，则这个点的函数 $y=x$ 图象上的概率是_____.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

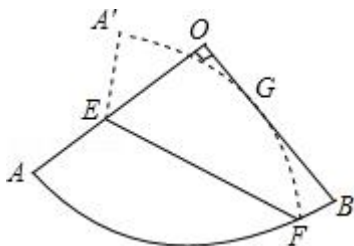
15. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 BC 上一点， $BD=3DC$ ， $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AD} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 来表示).



16. (4 分) 如果二次函数 $y=x^2+2x-m+2$ 图象的顶点在 x 轴上, 那么 m 的值是_____.

17. (4 分) 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 周长是 40, 若 $AC=16$, 则 $\sin \angle ABD=$ _____.

18. (4 分) 如图, 已知扇形 AOB 的半径为 6, 圆心角为 90° , E 是半径 OA 上一点, F 是 $\widehat{AB}$ 上一点. 将扇形 AOB 沿 EF 对折, 使得折叠后的圆弧 $\widehat{A'F}$ 恰好与半径 OB 相切于点 G , 若 $OE=5$, 则 O 到折痕 EF 的距离为_____.



三、(本大题共 7 题, 19-22 每题 10 分, 23、24 每题 12 分, 25 题 14 分, 满分 78 分)

19. (10 分) 化简并求值: $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} \cdot (x^2+\frac{x}{x-2})$, 其中 $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$.

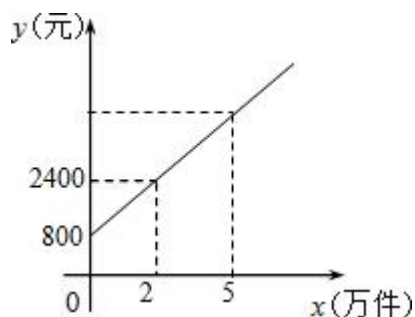
20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=9 \\ x^2-y^2-4x+4y=0 \end{cases}$$

21. (10 分) 某公司市场营销部的某营销员的个人月收入与该营销员每月的销售量成一次函数关系, 其图象如图所示, 根据图象提供的信息, 解答下列问题:

(1) 求营销员的个人月收入 y 元与该营销员每月的销售量 x 万件 ($x \geq 0$) 之间的函数关系式;

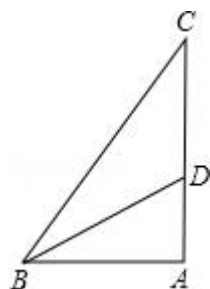
(2) 若两个月内该营销员的销售量从 2 万件猛增到 5 万件, 月收入两个月大幅

度增长，且连续两个月的月收入的增长率是相同的，试求这个增长率（保留到百分位）.



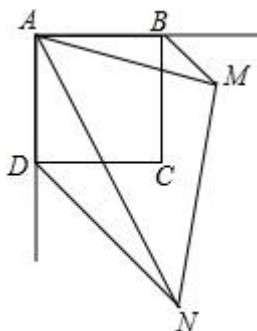
22. (10 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle CAB=90^\circ$ ， $\sin C=\frac{3}{5}$ ， $AC=6$ ， BD 平分 $\angle CBA$ 交 AC 边于点 D . 求：

- (1) 线段 AB 的长；
- (2) $\tan \angle DBA$ 的值.



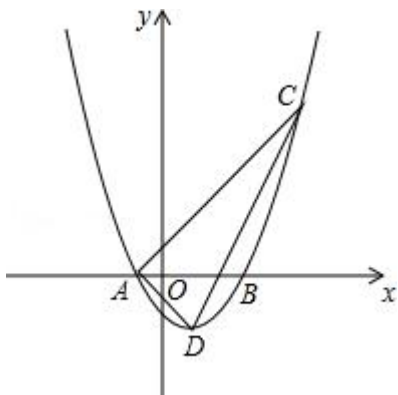
23. (12 分) 已知：如图，正方形 $ABCD$ ， BM 、 DN 分别是正方形的两个外角平分线， $\angle MAN=45^\circ$ ，将 $\angle MAN$ 绕着正方形的顶点 A 旋转，边 AM 、 AN 分别交两条角平分线于点 M 、 N ，联结 MN .

- (1) 求证： $\triangle ABM \sim \triangle NDA$ ；
- (2) 联结 BD ，当 $\angle BAM$ 的度数为多少时，四边形 $BMND$ 为矩形，并加以证明.



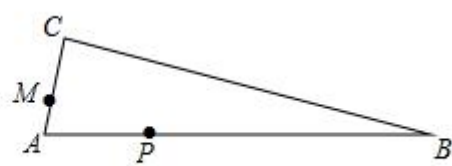
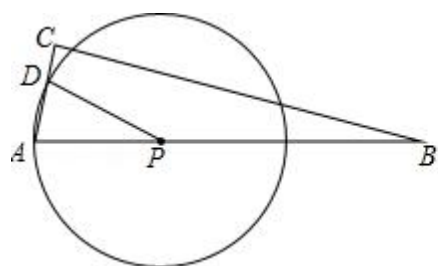
24. (12 分) 如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，开口向上的抛物线与 x 轴交于点 A (-1, 0) 和点 B (3, 0)，D 为抛物线的顶点，直线 AC 与抛物线交 C (5, 6)。

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 点 E 在 x 轴上，且 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AED$ 相似，求点 E 的坐标；
- (3) 若直角坐标平面中的点 F 和点 A、C、D 构成直角梯形，且面积为 16，试求点 F 的坐标。



25. (14 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=4$ ， $\cos A=\frac{1}{4}$ ，点 P 是边 AB 上的动点，以 PA 为半径作 $\odot P$ 。

- (1) 若 $\odot P$ 与 AC 边的另一交点为点 D，设 $AP=x$ ， $\triangle PCD$ 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并直接写出函数的定义域；
- (2) 若 $\odot P$ 被直线 BC 和直线 AC 截得的弦长相等，求 AP 的长；
- (3) 若 $\odot C$ 的半径等于 1，且 $\odot P$ 与 $\odot C$ 的公共弦长为 $\sqrt{2}$ ，求 AP 的长。



备用图

2015 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列各数中，无理数是 ()

A. $\frac{22}{7}$

B. $\sqrt{9}$

C. π

D. $\sqrt[3]{8}$

【考点】26: 无理数.

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

【解答】解：A、是分数，是有理数，选项错误；

B、 $\sqrt{9}=3$ ，是整数，是有理数，选项错误；

C、是无理数，选项正确；

D、 $\sqrt[3]{8}=2$ ，是整数，是有理数，选项错误.

故选：C.

【点评】此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 0.1010010001...，等有这样规律的数.

2. (4 分) 下列运算中，正确的是 ()

A. $2x - x = 1$

B. $x + x = 2x$

C. $(x^3)^3 = x^6$

D. $x^8 \div x^2 = x^4$

【考点】35: 合并同类项；47: 幂的乘方与积的乘方；48: 同底数幂的除法.

【分析】分别利用合并同类项以及幂的乘方运算和同底数幂的除法运算法则化简求出即可.

【解答】解：A、 $2x - x = x$ ，故此选项错误；

B、 $x + x = 2x$ ，故此选项正确；

C、 $(x^3)^3=x^9$ ，故此选项错误；

D、 $x^8 \div x^2 = x^6$ ，故此选项错误；

故选：B.

【点评】此题主要考查了合并同类项以及幂的乘方运算和同底数幂的除法运算法则等知识，正确化简各式是解题关键.

3. (4 分) 某反比例函数的图象经过点 $(-2, 3)$ ，则此函数图象也经过点 ()

- A. $(2, -3)$ B. $(-3, -3)$ C. $(2, 3)$ D. $(-4, 6)$

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】将 $(-2, 3)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 即可求出 k 的值，再根据 $k=xy$ 解答即可.

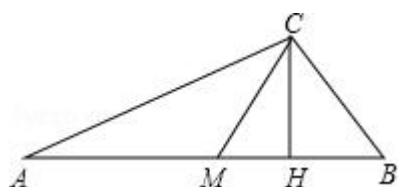
【解答】解：设反比例函数解析式为 $y=\frac{k}{x}$ ，将点 $(-2, 3)$ 代入解析式得 $k=-2 \times 3=-6$,

符合题意的点只有点 A: $k=2 \times (-3)=-6$.

故选：A.

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，只要点在函数的图象上，则一定满足函数的解析式. 反之，只要满足函数解析式就一定在函数的图象上.

4. (4 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，CH、CM 分别是斜边 AB 上的高和中线，则下列结论不正确的是 ()



A. $AB^2=AC^2+BC^2$

B. $CH^2=AH \cdot HB$

C. $CM=\frac{1}{2}AB$

D. $CB=\frac{1}{2}AB$

【考点】KP: 直角三角形斜边上的中线；KQ: 勾股定理；S9: 相似三角形的判

定与性质.

【分析】由 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 利用勾股定理即可求得 $AB^2=AC^2+BC^2$; 由 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, CH 是高, 易证得 $\triangle ACH \sim \triangle CHB$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 证得 $CH^2=AH \cdot HB$; 由 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, CM 是斜边 AB 上中线, 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半, 即可得 $CM=\frac{1}{2}AB$.

【解答】解: A、 $\because \triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$, 故正确;

B、 $\because CH$ 是高,

$\therefore \angle AHC=\angle CHB=90^\circ$,

$\therefore \angle A+\angle ACH=90^\circ$,

$\because \angle ACH+\angle BCH=90^\circ$,

$\therefore \angle A=\angle BCH$,

$\therefore \triangle ACH \sim \triangle CHB$,

$\therefore AH: CH=CH: HB$,

$\therefore CH^2=AH \cdot HB$, 故正确;

C、 $\because \triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, CM 斜边 AB 上的中线,

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB$, 故正确;

D、 $\because \angle A$ 的度数不确定,

$\therefore CB$ 不一定等于 $\frac{1}{2}AB$, 故错误.

故选: D.

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理以及直角三角形斜边上的中线的性质. 注意证得 $\triangle ACH \sim \triangle CHB$ 是关键.

5. (4分) 某课外小组的同学们在社会实践活动中调查了 20 户家庭某月的用电量, 如表所示:

用电量 (度)	120	140	160	180	200
户数	2	3	6	7	2

则这 20 户家庭该月用电量的众数和中位数分别是 ()

- A. 180, 160 B. 160, 180 C. 160, 160 D. 180, 180

【考点】W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】根据众数和中位数的定义就可以解决.

【解答】解: 在这一组数据中 180 是出现次数最多的, 故众数是 180;

将这组数据从小到大的顺序排列后, 处于中间位置的两个数是 160, 160, 那么

由中位数的定义可知, 这组数据的中位数是 $(160+160) \div 2 = 160$.

故选: A.

【点评】本题为统计题, 考查众数与中位数的意义. 众数是一组数据中出现次数最多的数, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数.

6. (4分) 下列命题中, 假命题是 ()

- A. 没有公共点的两圆叫两圆相离
B. 相交两圆的交点关于这两个圆的连心线所在直线对称
C. 联结相切两圆圆心的直线必经过切点
D. 内含的两个圆的圆心距大于零

【考点】O1: 命题与定理.

【分析】根据圆的位置关系的定义以及圆幂性质对各选项分析判断利用排除法求解.

【解答】解: A、没有公共点的两圆叫两圆相离, 正确, 故本选项错误;

- B、相交两圆的交点关于这两个圆的连心线所在直线对称，正确，故本选项错误；
- C、联结相切两圆圆心的直线必经过切点，正确，故本选项错误；
- D、内含的两个圆的圆心距大于零，错误，同心圆的圆心距等于 0，故本选项正确。

故选：D.

【点评】 本题主要考查命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 计算： $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

【考点】 6F：负整数指数幂.

【专题】 11：计算题.

【分析】 根据负整数指数幂的定义求解： $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数)

【解答】 解： $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

故答案为 $\frac{1}{4}$.

【点评】 本题考查了负整数指数幂的定义，解题时牢记定义是关键，此题比较简单，易于掌握.

8. (4 分) 用科学记数法表示 660000 的结果是 6.6×10^5 .

【考点】 1I：科学记数法—表示较大的数.

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】 解：将 660000 用科学记数法表示为： 6.6×10^5 .

故答案为: 6.6×10^5 .

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

9. (4 分) 函数 $y = \frac{2x}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq 1$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据分式的意义, 分母不等于 0, 可以求出 x 的范围.

【解答】解: 根据题意得: $x - 1 \neq 0$,

解得: $x \neq 1$.

故答案是: $x \neq 1$.

【点评】本题考查了函数自变量的范围的求法, 一般从三个方面考虑:

- (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;
- (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;
- (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

10. (4 分) 分解因式: $4a^2 - 16 =$ $4(a+2)(a-2)$.

【考点】55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】首先提取公因式 4, 进而利用平方差公式进行分解即可.

【解答】解: $4a^2 - 16 = 4(a^2 - 4) = 4(a+2)(a-2)$.

故答案为: $4(a+2)(a-2)$.

【点评】此题主要考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握公式形式是解题关键.

11. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} -2x+5 < 1 \\ \frac{x-1}{3} \leq 2 \end{cases}$ 的解是 $2 < x \leq 7$.

【考点】CB: 解一元一次不等式组.

【分析】首先解每个不等式,两个不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集.

【解答】解:
$$\begin{cases} -2x+5 < 1 \cdots \textcircled{1} \\ \frac{x-1}{3} \leq 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases},$$

解①得: $x > 2$,

解②得: $x \leq 7$.

则不等式组的解集是: $2 < x \leq 7$.

【点评】本题考查的是一元一次不等式组的解,解此类题目常常要结合数轴来判断.还可以观察不等式的解,若 $x >$ 较小的数、 $<$ 较大的数,那么解集为 x 介于两数之间.

12. (4 分) 方程 $\sqrt{6-x}=x$ 的解是 2.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】方程两边同时乘方后将无理方程转化为整式方程求解后验根即可确定正确的答案.

【解答】解: 方程两边同时乘方得: $6-x=x^2$,

解得: $x=-3$ 或 $x=2$,

当 $x=-3$ 时, 左边 $=\sqrt{6-(-3)}=\sqrt{9}=3 \neq$ 右边, 所以舍去,

故答案为: 2.

【点评】本题考查了无理方程的解法,解题的关键是了解如何将无理方程转化为有理方程求解.

13. (4 分) 某商店运进 120 台空调准备销售, 由于开展了促销活动, 每天比原计划多售出 4 台, 结果提前 5 天完成销售任务, 则原计划每天销售多少台?

若原计划每天销售 x 台, 则可得方程 $\frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} = 5$.

【考点】B6: 由实际问题抽象出分式方程.

【分析】设原计划每天销售 x 台, 则实际每天销售 $(x+4)$ 台, 由“结果提前 5

天完成销售任务”可得等量关系为：原计划销售时间－实际销售时间=5 天，
依此列出方程即可.

【解答】解：设原计划每天销售 x 台，则实际每天销售 $(x+4)$ 台，根据题意得

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} = 5.$$

故答案为 $\frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} = 5.$

【点评】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找到关键描述语，找到等量关系是解决问题的关键.

14. (4 分) 将 1、2、3 三个数字分别作为横坐标和纵坐标，随机生成的点的坐标如下表. 如果每个点出现的可能性相等，那么从中任意取一点，则这个点的函数 $y=x$ 图象上的概率是 $\frac{1}{3}$.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

【考点】F8：一次函数图象上点的坐标特征；X4：概率公式.

【分析】由题意可得共有 9 种等可能的结果，这个点的函数 $y=x$ 图象上的有 (1, 1)，(2, 2)，(3, 3)，然后直接利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】解：∵ 共有 9 种等可能的结果，这个点的函数 $y=x$ 图象上的有 (1, 1)，(2, 2)，(3, 3)，

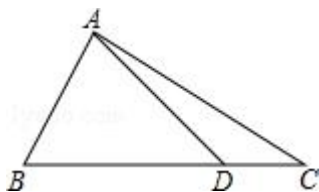
∴ 这个点的函数 $y=x$ 图象上的概率是： $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点评】此题考查了概率公式的应用. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

15. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 上一点， $BD=3DC$ ， $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ，

那么 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ (用向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 来表示).



【考点】LM: *平面向量.

【分析】由在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, $BD=3DC$, 即可表示出 $\overrightarrow{BD}$, 然后由三角形法则, 求得 $\overrightarrow{AD}$.

【解答】解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, $BD=3DC$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}.$$

故答案为: $\frac{3}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用.

16. (4 分) 如果二次函数 $y=x^2+2x-m+2$ 图象的顶点在 x 轴上, 那么 m 的值是 1.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】因为抛物线顶点在 x 轴上, 故函数图象与 x 轴只有一个交点, 根据 $\Delta=0$, 即可求出 m 的值.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y=x^2+2x-m+2$ 的顶点在 x 轴上,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times (-m+2) = 0, \text{ 即 } -4+4m=0,$$

解得 $m=1$.

故答案是: 1.

【点评】此题考查了二次函数图象与 y 轴交点个数与根的判别式的关系, 要明确:

$\Delta > 0$ 时, 图象与 x 轴有两个交点; $\Delta = 0$, 图象与 x 轴有一个交点; $\Delta < 0$,

图象与 x 轴无交点.

17. (4 分) 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 周长是 40, 若 $AC=16$, 则 $\sin \angle ABD = \frac{4}{5}$.

【考点】L8: 菱形的性质; T7: 解直角三角形.

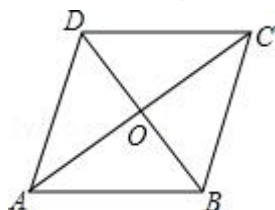
【分析】利用菱形的对角线互相平分且互相垂直进而利用锐角三角函数关系得出即可.

【解答】解: 如图所示: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 周长是 40, $AC=16$,

$$\therefore AO=8, AB=10,$$

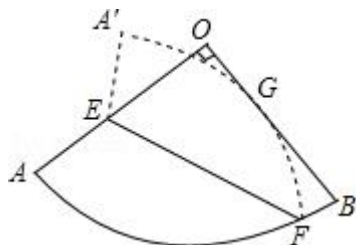
$$\therefore \sin \angle ABD = \frac{AO}{AB} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.



【点评】此题主要考查了菱形的性质与解直角三角形, 得出 AO 的长是解题关键.

18. (4 分) 如图, 已知扇形 AOB 的半径为 6, 圆心角为 90° , E 是半径 OA 上一点, F 是 $\widehat{AB}$ 上一点. 将扇形 AOB 沿 EF 对折, 使得折叠后的圆弧 $\widehat{A'F}$ 恰好与半径 OB 相切于点 G , 若 $OE=5$, 则 O 到折痕 EF 的距离为 $\sqrt{15}$.



【考点】KQ: 勾股定理; MC: 切线的性质; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】11: 计算题.

【分析】过点 G 作 $O'G \perp OB$, 作 $AO' \perp O'G$ 于 O' , 如图, 连结 OO' 交 EF 于 H ,

易得四边形 AOGO' 为矩形, 得到 $O'G=AO=5$, 根据折叠的性质得 $\widehat{AF}$ 与 $\widehat{A'F}$ 为等弧, 则它们所在圆的半径相等, 再利用经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心得到点 O' 为 $\widehat{A'F}$ 所在圆的圆心, 则可判断点 O 与点 O' 关于 EF 对称, 所以 $OO' \perp EF$, $OH=HO'$, 设 $OH=x$, 则 $OO'=2x$, 接着证明 $Rt\triangle OEH \sim Rt\triangle OO'A$, 然后利用相似比可计算出 x.

【解答】 解: 过点 G 作 $O'G \perp OB$, 作 $AO' \perp O'G$ 于 O', 如图, 连结 OO' 交 EF 于 H,

则四边形 AOGO' 为矩形,

$$\therefore O'G=AO=6,$$

$\therefore \widehat{AF}$ 沿 EF 折叠后所得得圆弧 $\widehat{A'F}$ 恰好与半径 OB 相切于点 G,

$\therefore \widehat{AF}$ 与 $\widehat{A'F}$ 所在圆的半径相等,

$\therefore$ 点 O' 为 $\widehat{A'F}$ 所在圆的圆心,

$\therefore$ 点 O 与点 O' 关于 EF 对称,

$$\therefore OO' \perp EF, OH=HO',$$

设 $OH=x$, 则 $OO'=2x$,

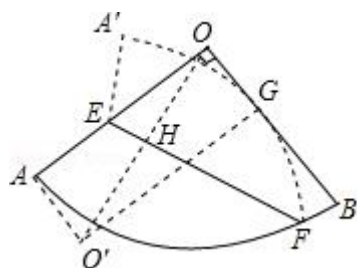
$$\therefore \angle EOH = \angle O'OA,$$

$$\therefore Rt\triangle OEH \sim Rt\triangle OO'A,$$

$$\therefore \frac{OH}{OA} = \frac{OE}{OO'}, \text{ 即 } \frac{x}{6} = \frac{5}{2x}, \text{ 解得 } x = \sqrt{15}.$$

即 O 到折痕 EF 的距离为 $\sqrt{15}$.

故答案为 $\sqrt{15}$.



【点评】 本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径；经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点；经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心. 运用切线的性质来进行计算或论证，常通过作辅助线连接圆心和切点，利用垂直构造直角三角形解决有关问题. 也考查了折叠的性质.

三、(本大题共 7 题，19-22 每题 10 分，23、24 每题 12 分，25 题 14 分，满分 78 分)

19. (10 分) 化简并求值： $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} \cdot (x^2+\frac{x}{x-2})$ ，其中 $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$.

【考点】 6D：分式的化简求值；7A：二次根式的化简求值.

【分析】 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再求出 x 的值代入进行计算即可.

【解答】 解：原式 $= \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)} \cdot \frac{x^2(x-2)+x}{x-2}$

$$= x(x-2) + 1,$$

$$= (x-1)^2,$$

$$\text{当 } x = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1 \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = (\sqrt{5}+1-1)^2 = 5.$$

【点评】 本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

20. (10 分) 解方程组：
$$\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=9 \\ x^2-y^2-4x+4y=0 \end{cases}$$

【考点】 AF：高次方程.

【分析】 先将原方程组变形为 $\begin{cases} (x-3y+3)(x-3y-3)=0 \\ (x+y-4)(x-y)=0 \end{cases}$ ，再变形为 $\begin{cases} x-3y+3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x-3y+3=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ ，最后解这四个二元一次方程组求出其解即可.

【解答】 解：原方程组变形为：

$$\begin{cases} (x-3y+3)(x-3y-3)=0 \\ (x+y-4)(x-y)=0 \end{cases},$$

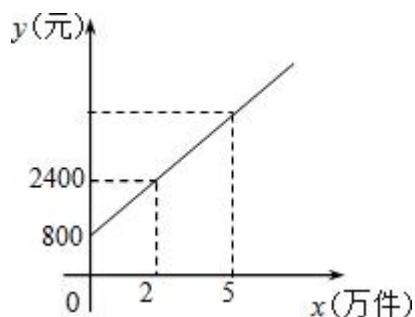
$$\therefore \begin{cases} x-3y+3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}, \begin{cases} x-3y+3=0 \\ x-y=0 \end{cases}, \begin{cases} x-3y-3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}, \begin{cases} x-3y-3=0 \\ x-y=0 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x_1=\frac{9}{4} \\ y_1=\frac{7}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{3}{2} \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_3=\frac{15}{4} \\ y_3=\frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_4=-\frac{3}{2} \\ y_4=-\frac{3}{2} \end{cases}.$

【点评】 本题考查了二元一次方程组的解法的运用，解二元二次方程组的消元、降次思想的运用，因式分解的运用. 解答时先将二元高次方程变形为二元一次方程组是关键.

21. (10 分) 某公司市场营销部的某营销员的个人月收入与该营销员每月的销售量成一次函数关系，其图象如图所示，根据图象提供的信息，解答下列问题：

- (1) 求营销员的个人月收入 y 元与该营销员每月的销售量 x 万件 ($x \geq 0$) 之间的函数关系式；
- (2) 若两个月内该营销员的销售量从 2 万件猛增到 5 万件，月收入两个月大幅度增长，且连续两个月的月收入的增长率是相同的，试求这个增长率 (保留到百分位).



【考点】 AD：一元二次方程的应用；FH：一次函数的应用.

【分析】 (1) 设 $y=kx+b$ ，将 $(0, 800)$ 与 $(2, 2400)$ 代入，利用待定系数法

即可求解;

(2) 设这个增长率为 x , 先根据 (1) 中所求的解析式求出 $x=5$ 时对应的 y 值,

再由两个月内该营销员的销售量从 2 万件猛增到 5 万件, 且连续两个月的月收入的增长率是相同的列出方程, 解方程即可.

【解答】 解: (1) 设 $y=kx+b$, 将 $(0, 800)$ 与 $(2, 2400)$ 代入,

$$\text{得} \begin{cases} b=800 \\ 2k+b=2400 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=800 \\ b=800 \end{cases},$$

故营销员的个人月收入 y 元与该营销员每月的销售量 x 万件 ($x \geq 0$) 之间的函数

关系式为 $y=800x+800$;

$$(2) \because y=800x+800,$$

$$\therefore \text{当 } x=5 \text{ 时, } y=800 \times 5+800=4800.$$

设这个增长率为 x , 根据题意得

$$2400(1+x)^2=4800,$$

$$\text{解得 } x_1=\sqrt{2}-1 \approx 0.41, x_2=-\sqrt{2}-1 \text{ (不合题意舍去)}.$$

答: 这个增长率约为 41%.

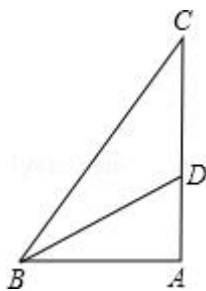
【点评】 本题考查一元二次方程的应用, 判断所求的解是否符合题意, 舍去不合题意的解. 找到关键描述语, 找到等量关系准确的列出方程是解决问题的关键.

22. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle CAB=90^\circ$, $\sin C=\frac{3}{5}$, $AC=6$, BD 平分

$\angle CBA$ 交 AC 边于点 D . 求:

(1) 线段 AB 的长;

(2) $\tan \angle DBA$ 的值.



【考点】KF：角平分线的性质；T7：解直角三角形.

【分析】(1) 先解 $\text{Rt}\triangle ABC$, 得出 $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, 设出 $AB=3k$, 则 $BC=5k$, 由 $BC^2 - AB^2 = AC^2$, 得出方程 $(5k)^2 - (3k)^2 = 6^2$, 解方程求出 k 的值, 进而得到 AB ;

(2) 过 D 点作 $DE \perp BC$ 于 E , 设 $AD=x$, 则 $CD=6-x$. 根据角平分线的性质得出 $DE=AD=x$, 利用 HL 证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle BDA$, 得到 $BE=BA=\frac{9}{2}$, 那么 $CE=BC-BE=3$. 然后在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中利用勾股定理得出 $DE^2 + CE^2 = CD^2$, 即 $x^2 + 3^2 = (6-x)^2$, 解方程求出 x 的值, 即为 AD 的长, 再根据正切函数的定义即可求解.

【解答】解: (1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB=90^\circ$,

$$\therefore \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}, \quad BC^2 - AB^2 = AC^2,$$

$\therefore$ 可设 $AB=3k$, 则 $BC=5k$,

$$\therefore AC=6,$$

$$\therefore (5k)^2 - (3k)^2 = 6^2,$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore AB = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2};$$

(2) 过 D 点作 $DE \perp BC$ 于 E , 设 $AD=x$, 则 $CD=6-x$.

$\because BD$ 平分 $\angle CBA$ 交 AC 边于点 D , $\angle CAB=90^\circ$,

$$\therefore DE=AD=x.$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 与 $\text{Rt}\triangle BDA$ 中,

$$\begin{cases} BD=BD \\ DE=DA \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle BDA \quad (\text{HL}),$$

$$\therefore BE=BA=\frac{9}{2},$$

$$\therefore CE=BC-BE=5 \times \frac{3}{2} - \frac{9}{2}=3.$$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\therefore \angle CED=90^\circ$,

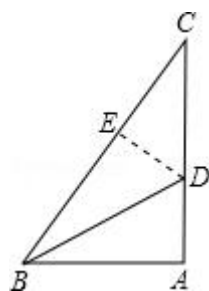
$$\therefore DE^2+CE^2=CD^2,$$

$$\therefore x^2+3^2=(6-x)^2,$$

$$\text{解得 } x=\frac{9}{4},$$

$$\therefore AD=\frac{9}{4},$$

$$\therefore \tan \angle DBA = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}.$$

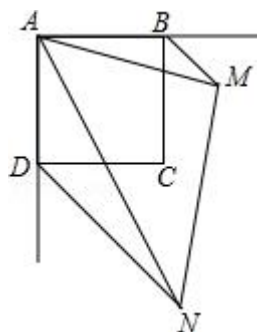


【点评】 本题考查了解直角三角形，锐角三角函数的定义，勾股定理，全等三角形的判定与性质，难度适中．准确作出辅助线是解决第（2）问的关键．

23. (12 分) 已知：如图，正方形 $ABCD$ ， BM 、 DN 分别是正方形的两个外角平分线， $\angle MAN=45^\circ$ ，将 $\angle MAN$ 绕着正方形的顶点 A 旋转，边 AM 、 AN 分别交两条角平分线于点 M 、 N ，联结 MN ．

(1) 求证： $\triangle ABM \sim \triangle NDA$ ；

(2) 联结 BD ，当 $\angle BAM$ 的度数为多少时，四边形 $BMND$ 为矩形，并加以证明.



【考点】 LC: 矩形的判定; LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 由正方形 $ABCD$ ， BM 、 DN 分别是正方形的两个外角平分线，可证得 $\angle ABM = \angle ADN = 135^\circ$ ，又由 $\angle MAN = 45^\circ$ ，可证得 $\angle BAM = \angle AND = 45^\circ - \angle DAN$ ，即可证得 $\triangle ABM \sim \triangle NDA$;

(2) 由四边形 $BMND$ 为矩形，可得 $BM = DN$ ，然后由 $\triangle ABM \sim \triangle NDA$ ，根据相似三角形的对应边成比例，可证得 $BM^2 = AB^2$ ，继而求得答案.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ,$$

$\because BM$ 、 DN 分别是正方形的两个外角平分线,

$$\therefore \angle ABM = \angle ADN = 135^\circ,$$

$$\because \angle MAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle AND = 45^\circ - \angle DAN,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle NDA;$$

(2) 解: $\because$ 四边形 $BMND$ 为矩形,

$$\therefore BM = DN,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle NDA,$$

$$\therefore \frac{AB}{DN} = \frac{BM}{AD},$$

$$\therefore BM^2 = AB^2,$$

$$\therefore BM = AB,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle BMA = \frac{180^\circ - \angle ABM}{2} = 22.5^\circ.$$

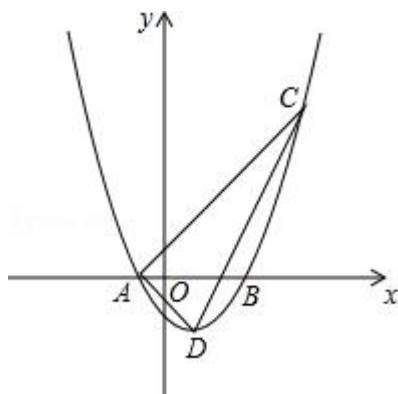
【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质、正方形的性质以及矩形的性质. 注意能证得当四边形 BMND 为矩形时, $\triangle ABM$ 是等腰三角形是难点.

24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 开口向上的抛物线与 x 轴交于点 A (-1, 0) 和点 B (3, 0), D 为抛物线的顶点, 直线 AC 与抛物线交 C (5, 6).

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 E 在 x 轴上, 且 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AED$ 相似, 求点 E 的坐标;

(3) 若直角坐标平面中的点 F 和点 A、C、D 构成直角梯形, 且面积为 16, 试求点 F 的坐标.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【分析】(1) 设出抛物线解析式, 把 A (-1, 0), B (3, 0), C (5, 6) 代入解析式, 即可解答;

(2) 分两种情况进行讨论, 当 $\triangle CAE \sim \triangle DAE$ 时, $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AE} = 1$, 不合题意, 舍去; 当 $\triangle CAE \sim \triangle EAD$ 时, $\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AD}$, $AE = 2\sqrt{6}$, 当点 E 在点 A 的右边时, 点 E 为 $(2\sqrt{6} - 1, 0)$; 当点 E 在点 A 的左边时, 点 E 为 $(-2\sqrt{6} - 1, 0)$; 所以 E $(2\sqrt{6} - 1, 0)$ 或 $(-2\sqrt{6} - 1, 0)$;

(3) 分两种情况进行讨论, 当 $FC \perp AC$ 时, $\frac{1}{2}(FC + AD) \cdot AC = 16$, 解得: $FC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $F_1(\frac{17}{3}, \frac{16}{3})$; 当 $FD \perp AD$ 时, $\frac{1}{2}(FD + AC) \cdot AD = 16$, 解得: $FD = 2\sqrt{2}$, 则 $F_2(3, 0)$.

【解答】 解: (1) 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

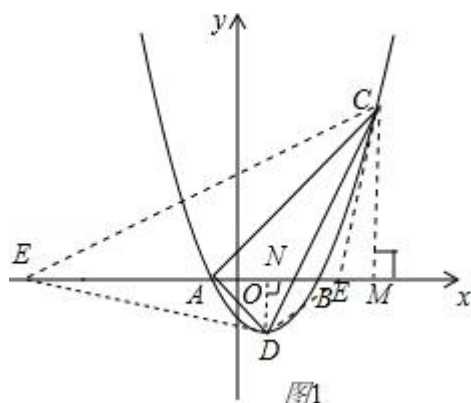
把 A $(-1, 0)$, B $(3, 0)$, C $(5, 6)$ 代入解析式得:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

(2) 如图 1, 过点 D 作 $ND \perp x$ 轴于点 N, 过点 C 作 $CM \perp x$ 轴于点 M,



顶点坐标为 D $(1, -2)$.

$\therefore$ A $(-1, 0)$, B $(3, 0)$, C $(5, 6)$, D $(1, -2)$.

$$\therefore AN=2, ND=2, CM=6, AM=1+5=6,$$

$$\therefore AN=ND, CM=AM, AD = \sqrt{AN^2+DN^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{AM^2+CM^2} = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle NAD = \angle ADN = 45^\circ, \angle CAM = \angle ACM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\text{当 } \triangle CAE \sim \triangle DAE \text{ 时, } \frac{AE}{AE} = \frac{AC}{AD} = 1, \text{ 不合题意, 舍去;}$$

$$\text{当 } \triangle CAE \sim \triangle EAD \text{ 时, } \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AD},$$

$$\text{即 } AE^2 = AC \cdot AD = 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 24,$$

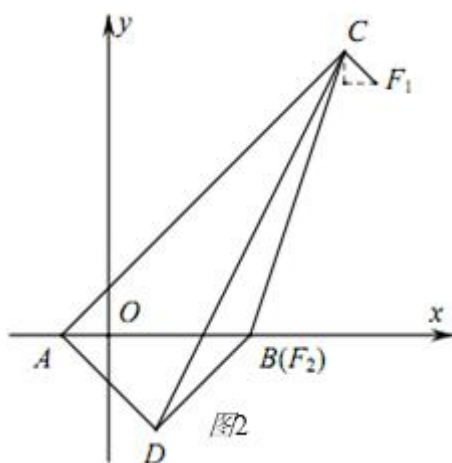
$$AE = 2\sqrt{6},$$

$$\text{当点 E 在点 A 的右边时, 点 E 为 } (2\sqrt{6}-1, 0);$$

$$\text{当点 E 在点 A 的左边时, 点 E 为 } (-2\sqrt{6}-1, 0);$$

$$\therefore E (2\sqrt{6}-1, 0) \text{ 或 } (-2\sqrt{6}-1, 0).$$

(3) 如图 2,



$$\text{当 } FC \perp AC \text{ 时, } \frac{1}{2} (FC+AD) \cdot AC = 16,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times (FC+2\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} = 16,$$

$$\text{解得: } FC = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

则 $F_1(\frac{17}{3}, \frac{16}{3})$;

当 $FD \perp AD$ 时, $\frac{1}{2}(FD+AC) \cdot AD=16$,

即 $\frac{1}{2} \times (FD+6\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}=16$.

解得: $FD=2\sqrt{2}$,

$$\therefore AF=\sqrt{AD^2+FD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4,$$

$$\therefore OF=AF-AO=4-1=3$$

则 $F_2(3, 0)$.

【点评】 本题考查了求抛物线解析式, 相似三角形的性质, 直角梯形, 解决本题的关键是对于 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AED$ 相似, 点 F 和点 A 、 C 、 D 构成直角梯形, 进行分类讨论.

25. (14 分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=4$, $\cos A=\frac{1}{4}$, 点 P 是边

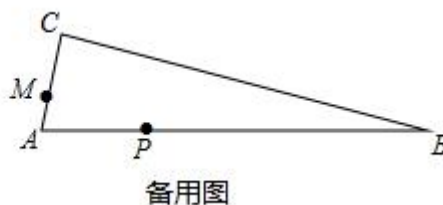
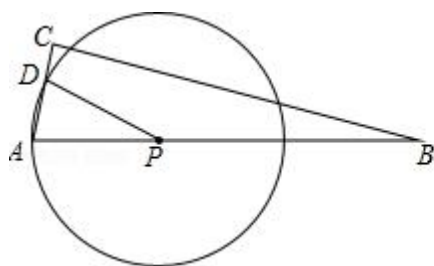
AB 上的动点, 以 PA 为半径作 $\odot P$.

(1) 若 $\odot P$ 与 AC 边的另一交点为点 D , 设 $AP=x$, $\triangle PCD$ 的面积为 y , 求 y

关于 x 的函数解析式, 并直接写出函数的定义域;

(2) 若 $\odot P$ 被直线 BC 和直线 AC 截得的弦长相等, 求 AP 的长;

(3) 若 $\odot C$ 的半径等于 1, 且 $\odot P$ 与 $\odot C$ 的公共弦长为 $\sqrt{2}$, 求 AP 的长.



【考点】 KQ: 勾股定理; MR: 圆的综合题; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 过点 P 作 $PH \perp AC$, 垂足为 H , 如图 1, 利用三角函数可得 $AH=\frac{1}{4}x$,

根据勾股定理可得 $PH = \frac{\sqrt{15}}{4}x$, 根据垂径定理可得 $AD = 2AH = \frac{1}{2}x$, 从而可得 $CD = 4 - \frac{1}{2}x$, 即可得到 y 与 x 的关系;

(2) 过点 P 作 $PG \perp BC$, 垂足为 G , 如图 2, 根据同圆中相等的弦所对的弦心距相等可得 $PH = PG = \frac{\sqrt{15}}{4}x$, 在 $Rt\triangle PGB$ 中, 运用三角函数即可求出 AP 的值;

(3) 设 $\odot P$ 与 $\odot C$ 的公共弦 EF 与 PC 交于点 O , 如图 3, 根据勾股定理可得 $CO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $PO = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$, 从而有 $CP = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$, 然后在 $Rt\triangle CHP$ 中, 运用勾股定理即可求出 x 的值.

【解答】解: (1) 过点 P 作 $PH \perp AC$, 垂足为 H , 连接 PC , 如图 1,

$$\text{则有 } AH = AP \cos A = \frac{1}{4}x, \quad PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}x,$$

$$AD = 2AH = \frac{1}{2}x, \quad CD = AC - AD = 4 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}CD \cdot PH = \frac{1}{2} \times \left(4 - \frac{1}{2}x\right) \times \frac{\sqrt{15}}{4}x = -\frac{\sqrt{15}}{16}x^2 + \frac{\sqrt{15}}{2}x \quad (0 < x < 8);$$

(2) 过点 P 作 $PG \perp BC$, 垂足为 G , 如图 2,

$\therefore \odot P$ 被直线 BC 和直线 AC 截得的弦长相等,

$$\therefore PH = PG = \frac{\sqrt{15}}{4}x.$$

在 $Rt\triangle ACB$ 中, $AC = AB \cdot \cos A$,

$$\therefore 4 = \frac{1}{4}AB, \quad \text{即 } AB = 16,$$

$$\therefore BP = AB - AP = 16 - x.$$

在 $Rt\triangle PGB$ 中,

$$\therefore \sin B = \frac{PG}{BP}, \quad \sin B = \cos A = \frac{1}{4}, \quad PG = \frac{\sqrt{15}}{4}x, \quad BP = 16 - x,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{15}}{4}x = \frac{1}{4}(16 - x),$$

$$\text{解得: } x = \frac{8\sqrt{15}-8}{7},$$

$$\therefore AP = \frac{8\sqrt{15}-8}{7};$$

(3) 设 $\odot P$ 与 $\odot C$ 的公共弦 EF 与 PC 交于点 O , 如图3,

则有 $EF = \sqrt{2}$, $EO = OF = \frac{1}{2}EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $PC \perp EF$, $CE = CF = 1$, $PE = PF = x$,

$$\therefore CO = \sqrt{CE^2 - OE^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad PO = \sqrt{PE^2 - OE^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}},$$

$$\therefore CP = OP + CO = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $Rt\triangle CHP$ 中,

$$\therefore CH^2 + PH^2 = PC^2,$$

$$\therefore \left(4 - \frac{1}{4}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}x\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$\text{整理得 } 16 - 2x = \sqrt{2x^2 - 1},$$

$$\therefore (16 - 2x)^2 = 2x^2 - 1,$$

$$\text{整理得 } 2x^2 - 64x + 257 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{32 - \sqrt{510}}{2}, \quad x_2 = \frac{32 + \sqrt{510}}{2}.$$

$\therefore$ 点 P 是边 AB 上的动点,

$$\therefore AP = x \leq 16,$$

$$\therefore AP = \frac{32 - \sqrt{510}}{2}.$$

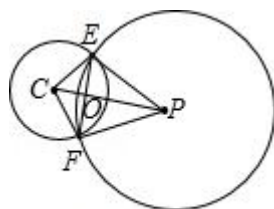


图3



图2

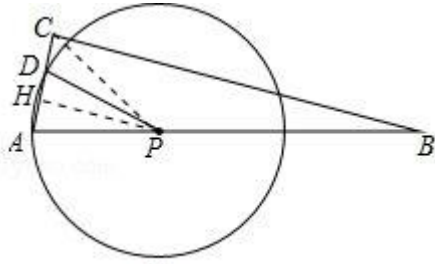


图1

【点评】 本题主要考查了垂径定理、相交两圆的性质、勾股定理、三角函数、同圆或同圆中弦与弦心距之间的关系等知识，要求一个未知数的值，通常可运用相似三角形的性质、勾股定理或三角函数建立方程，然后解这个方程就可解决问题.