

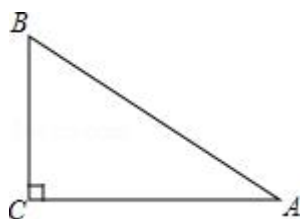
2014 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一、选择题：（共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各式中，正确的是（ ）

- A. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ B. $a^4 \cdot a^2 = a^6$ C. $a^4 \cdot a^2 = a^{16}$ D. $a^4 \cdot a^2 = a^2$

2.（4 分）已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\cos A$ 表示（ ）的值.

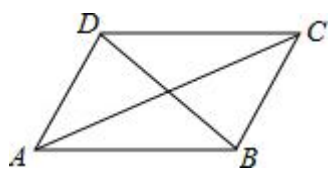


- A. $\frac{BC}{AC}$ B. $\frac{BC}{AB}$ C. $\frac{AC}{BC}$ D. $\frac{AC}{AB}$

3.（4 分）二次函数 $y = -(x-1)^2 + 3$ 的图象的顶点坐标是（ ）

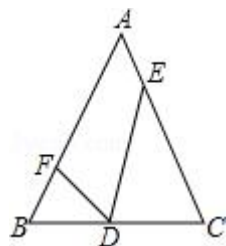
- A. $(-1, 3)$ B. $(1, 3)$ C. $(-1, -3)$ D. $(1, -3)$

4.（4 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么 $\vec{a} + \vec{b}$ 等于（ ）



- A. $\overrightarrow{BD}$ B. $\overrightarrow{AC}$ C. $\overrightarrow{DB}$ D. $\overrightarrow{CA}$

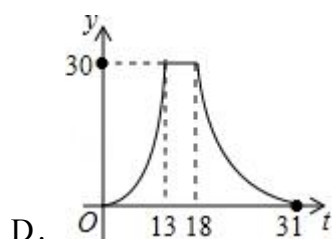
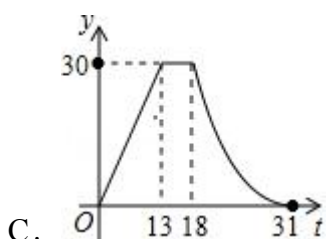
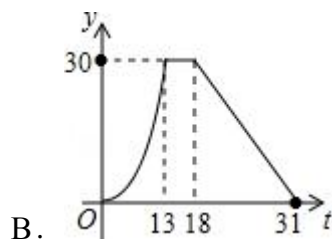
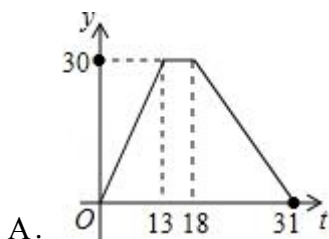
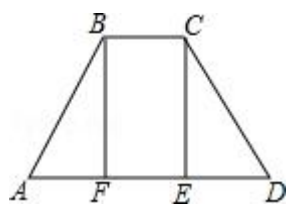
5.（4 分）已知 D 、 E 、 F 分别为等腰 $\triangle ABC$ 边 BC 、 CA 、 AB 上的点，如果 $AB = AC$ ， $BD = 2$ ， $CD = 3$ ， $CE = 4$ ， $AE = \frac{3}{2}$ ， $\angle FDE = \angle B$ ，那么 AF 的长为（ ）



- A. 5.5 B. 4.5 C. 4 D. 3.5

6.（4 分）如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BF \perp AD$ ， $CE \perp AD$ ，且 $AF = EF = ED = 5$ ， $BF = 12$ ，动点 G 从点 A 出发，沿折线 $AB - BC - CD$ 以每秒 1 个单位长的速度运动到点 D 停止. 设运动时间为 t 秒， $\triangle EFG$ 的面积为 y ，则 y 关

于 t 的函数图象大致是 ()



二、填空题: (共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

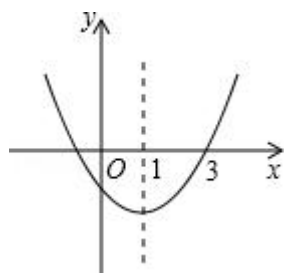
7. (4 分) 计算 $(a+1)(a-1)$ 的结果是_____.

8. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 1 \\ x-1 < 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

9. (4 分) 关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根的判别式是_____.

10. (4 分) 二次函数 $y=2x^2+3$ 的图象开口方向_____.

11. (4 分) 如图, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=1$, 图象经过 $(3, 0)$, 则 $a-b+c$ 的值是_____.

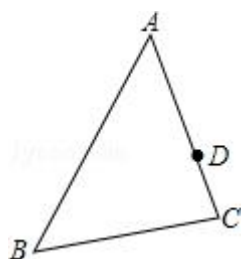


12. (4 分) 抛物线 $y=(x+2)^2-3$ 可以由抛物线 $y=x^2-3$ 向_____ (平移) 得到.

13. (4 分) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反, 且 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, 则 $\vec{a}+\vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向_____.

14. (4 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, D 为边 AC 上一点, P 为边 AB 上一点, AB

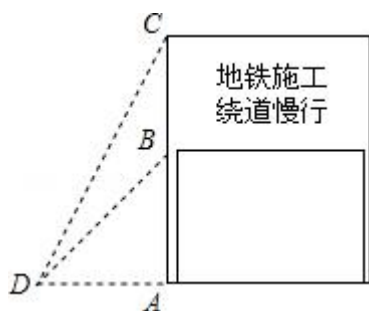
$= 12$, $AC = 8$, $AD = 6$, 当 AP 的长度为_____时, $\triangle ADP$ 和 $\triangle ABC$ 相似.



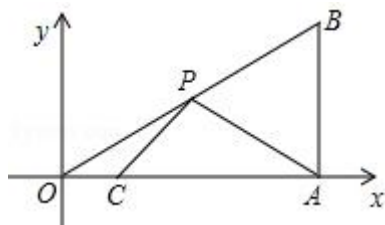
15. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角, 若 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____三角形.

16. (4分) 某坡面的坡度为 $1: \frac{12}{5}$, 某车沿该坡面爬坡行进了_____米后, 该车起始位置和终止位置两地所处的海拔高度上升了 5 米.

17. (4分) 在地铁施工期间, 交管部门在施工路段设立了矩形路况警示牌 (如图所示), 已知立杆 AB 的高度是 6 米, 从侧面 D 测到路况警示牌顶端 C 点和低端 B 点的仰角分别是 60° 和 45° , 则路况警示牌宽 BC 的值为_____.



18. (4分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 A 的坐标为 $(9, 0)$, $\tan \angle BOA = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 C 的坐标为 $(2, 0)$, 点 P 为斜边 OB 上的一个动点, 则 $PA + PC$ 的最小值为_____.



三、(共 8 题, 第 19-22 题每题 8 分; 第 23、24 题每题 10 分; 第 25 题 12 分; 第 26 题 14 分, 共 78 分)

19. (8分) 化简并求值: $(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}) \div \frac{2}{x^2-4}$, 其中 $x = 2\cos 45^\circ - \tan 45^\circ$.

20. (8分) 已知一个二次函数的顶点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 且图象经过点 $B(2,$

3).

(1) 求这个二次函数的解析式.

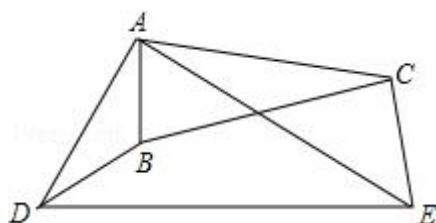
(2) 设图象与 y 轴的交点为 C , 记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, 试用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ (直接写出答案)

21. (8 分) 已知抛物线 $l_1: y = -x^2 + 2x + 3$ 和抛物线 $l_2: y = x^2 + 2x - 3$ 相交于 A, B , 其中 A 点的横坐标比 B 点的横坐标大.

(1) 求 A, B 两点的坐标.

(2) 射线 OA 与 x 轴正方向所相交成的角的正弦值.

22. (8 分) 如图已知: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$, 求证: $\angle ABC = \angle ADE$.



23. (10 分) 通过锐角三角比的学习, 我们已经知道在直角三角形中, 一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定, 因此边长比与角的大小之间可以相互转化. 类似的我们可以在等腰三角形中建立边角之间的联系. 我们定义: 等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对 (sad). 如图在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$,

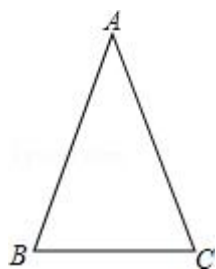
顶角 A 的正对记作 $sadA$, 这时 $sadA = \frac{\text{底边}}{\text{腰}} = \frac{BC}{AB}$. 我们容易知道一个角的大小与

这个角的正对值也是互相唯一确定的. 根据上述角的正对定义, 解下列问题:

(1) $sad60^\circ =$ _____; $sad90^\circ =$ _____.

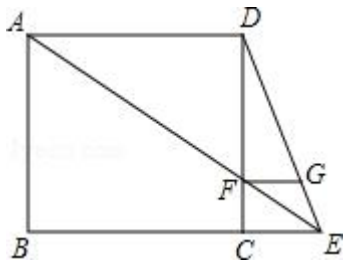
(2) 对于 $0^\circ < A < 180^\circ$, $\angle A$ 的正对值 $sadA$ 的取值范围是_____.

(3) 试求 $sad36^\circ$ 的值.



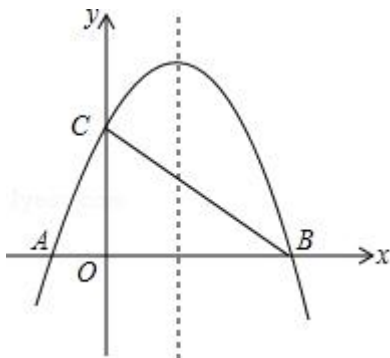
24. (10 分) 如图, E 为正方形 $ABCD$ 边 BC 延长线上一点, AE 交 DC 于 F , $FG \parallel BE$ 交 DE 于 G

- (1) 求证: $FG = FC$;
- (2) 若 $FG = 1$, $AD = 3$, 求 $\tan \angle GFE$ 的值.



25. (12 分) 如图, 已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 若已知 B 点的坐标为 $B(8, 0)$.

- (1) 求抛物线的解析式及其对称轴方程;
- (2) 连接 AC 、 BC , 试判断 $\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 是否相似? 并说明理由;
- (3) M 为抛物线上 BC 之间的一点, N 为线段 BC 上的一点, 若 $MN \parallel y$ 轴, 求 MN 的最大值;
- (4) 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q , 使 $\triangle ACQ$ 为等腰三角形? 若存在, 求出符合条件的 Q 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



26. (14 分) 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 5\text{cm}$; $\triangle DEF$ 中, $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $DE = 3\text{cm}$. 现将 $\triangle DEF$ 的直角边 DF 与 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 重合在一起, 并将 $\triangle DEF$ 沿 AB 方向移动 (如图). 在移动过程中, D 、 F 两点始终在 AB 边上 (移动开始时点 D 与点 A 重合, 一直移动至点 F 与点 B 重合为止).

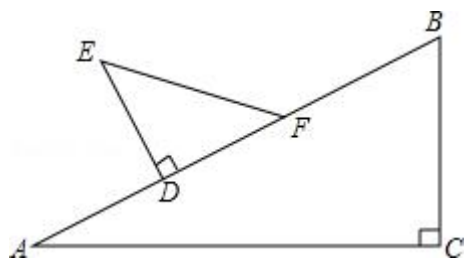
- (1) 在 $\triangle DEF$ 沿 AB 方向移动的过程中, 有人发现: E 、 B 两点间的距离随 AD 的变化而变化, 现设 $AD = x$, $BE = y$, 请你写出 y 与 x 之间的函数关系式及其定义域.

(2) 请你进一步研究如下问题:

问题①: 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, E 、 B 的连线与 AC 平行?

问题②: 在 $\triangle DEF$ 的移动过程中, 是否存在某个位置, 使得 $\angle EBD = 22.5^\circ$? 如果存在, 求出 AD 的长度; 如果不存在, 请说明理由.

问题③: 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, 以线段 AD 、 EB 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形?



2014 年上海市宝山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各式中，正确的是（ ）

A. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ B. $a^4 \cdot a^2 = a^6$ C. $a^4 \cdot a^2 = a^{16}$ D. $a^4 \cdot a^2 = a^2$

【考点】46：同底数幂的乘法.

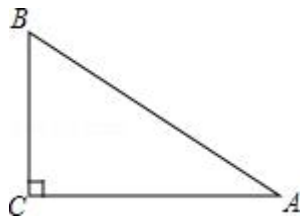
【分析】根据同底数幂的乘法，底数不变指数相加，可得答案.

【解答】解： $a^4 \cdot a^2 = a^{4+2} = a^6$,

故选：B.

【点评】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的乘法，底数不变指数相加.

2.（4 分）已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\cos A$ 表示（ ）的值.



A. $\frac{BC}{AC}$ B. $\frac{BC}{AB}$ C. $\frac{AC}{BC}$ D. $\frac{AC}{AB}$

【考点】T1：锐角三角函数的定义.

【分析】根据余弦函数的定义即可判断.

【解答】解： $\cos A = \frac{AC}{AB}$.

故选：D.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

3.（4 分）二次函数 $y = -(x-1)^2 + 3$ 的图象的顶点坐标是（ ）

A. $(-1, 3)$ B. $(1, 3)$ C. $(-1, -3)$ D. $(1, -3)$

【考点】H3：二次函数的性质.

【专题】16：压轴题.

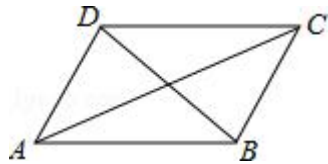
【分析】根据二次函数的顶点式一般形式的特点，可直接写出顶点坐标.

【解答】解：二次函数 $y = -(x-1)^2 + 3$ 为顶点式，其顶点坐标为 $(1, 3)$.

故选：B.

【点评】主要考查了求抛物线的顶点坐标的方法.

4. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\vec{a} + \vec{b}$ 等于 ()



A. $\overrightarrow{BD}$

B. $\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{DB}$

D. $\overrightarrow{CA}$

【考点】LM: *平面向量.

【专题】16: 压轴题.

【分析】由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 可得 $AD = BC$, $AD \parallel BC$, 则可得 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 然后由三角形法则, 即可求得答案.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

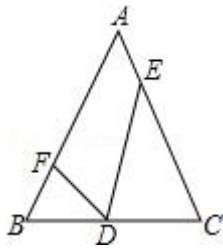
$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

故选：B.

【点评】此题考查了平面向量的知识与平行四边形的性质. 此题难度不大, 注意掌握三角形法则的应用, 注意数形结合思想的应用.

5. (4分) 已知 D 、 E 、 F 分别为等腰 $\triangle ABC$ 边 BC 、 CA 、 AB 上的点, 如果 $AB = AC$, $BD = 2$, $CD = 3$, $CE = 4$, $AE = \frac{3}{2}$, $\angle FDE = \angle B$, 那么 AF 的长为 ()



A. 5.5

B. 4.5

C. 4

D. 3.5

【考点】 KH：等腰三角形的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】 由 AE 和 CE 的长可求出 AC 的长，因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $AB = AC$ ，若要求 AF 的长，可求出 BF 的长即可．而通过证明 $\triangle DBF \sim \triangle DCE$ 即可求出 BF 的长，问题得解．

【解答】 解： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle BFD = 180^\circ - \angle B - \angle FDB, \quad \angle EDC = 180^\circ - \angle FDE - \angle FDB,$$

$$\text{又} \because \angle FDE = \angle B,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle DBF \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore BD : CE = BF : CD,$$

$$\because BD = 2, \quad CD = 3, \quad CE = 4,$$

$$\therefore 2 : 4 = BF : 3,$$

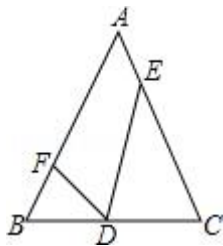
$$\therefore BF = 1.5,$$

$$\because AC = AE + CE = \frac{3}{2} + 4 = 5.5,$$

$$\therefore AB = 5.5,$$

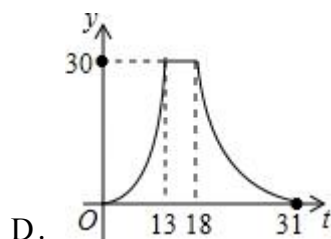
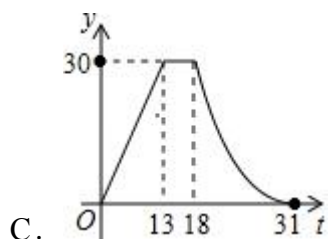
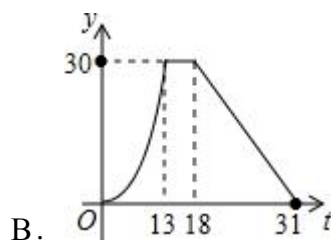
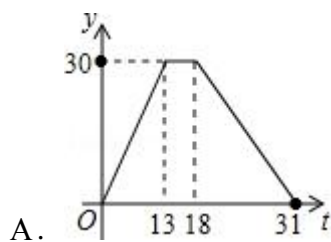
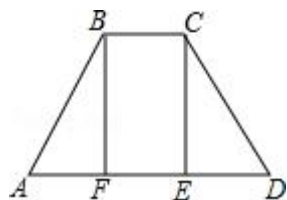
$$\therefore AF = AB - BF = 5.5 - 1.5 = 4,$$

故选：C．



【点评】 本题考查了等腰三角形的性质、相似三角形的判定和性质以及三角形内角和定理，解题的关键是求 AF 的长，转化为求 BF 的长．

6. (4分) 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BF \perp AD$, $CE \perp AD$, 且 $AF = EF = ED = 5$, $BF = 12$, 动点 G 从点 A 出发, 沿折线 $AB - BC - CD$ 以每秒 1 个单位长的速度运动到点 D 停止. 设运动时间为 t 秒, $\triangle EFG$ 的面积为 y , 则 y 关于 t 的函数图象大致是 ()



【考点】 E7: 动点问题的函数图象.

【分析】 分三段考虑, ①点 G 在 AB 上运动, ②点 G 在 BC 上运动, ③点 G 在 CD 上运动, 分别求出 y 与 t 的函数表达式, 继而可得出函数图象.

【解答】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = 13$, 在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中, $CD = \sqrt{BF^2 + CF^2} = 13$,

①点 G 在 AB 上运动:

过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M , 则 $GM = AG \sin \angle A = \frac{12}{13}t$,

此时 $y = \frac{1}{2}EF \times GM = \frac{30}{13}t$, 为一次函数;

②点 G 在 BC 上运动, $y = \frac{1}{2}BF \times EF = 30$;

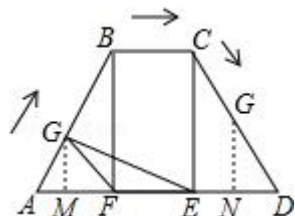
③点 G 在 CD 上运动, 过点 G 作 $GN \perp AD$ 于点 N , 则 $GN = DG \sin \angle D = \frac{12}{13}$

$$(AB + BC + CD - t) = \frac{12(12-t)}{13},$$

则 $y = \frac{1}{2}EF \times PN = \frac{30(31-t)}{13}$, 为一次函数.

综上可得选项 A 的图象符合.

故选: A.



【点评】 本题考查了动点问题的函数图象, 解答本题的关键是分段讨论 y 与 t 的函数关系式, 当然在考试过程中, 建议同学们直接判断是一次函数还是二次函数, 不需要按部就班的解出解析式.

二、填空题: (共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算 $(a+1)(a-1)$ 的结果是 $a^2 - 1$.

【考点】 4F: 平方差公式.

【分析】 利用平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, 直接计算即可.

【解答】 解: $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$.

故答案为: $a^2 - 1$.

【点评】 此题考查平方差公式的实际运用, 注意抓住式子的特点.

8. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 1 \\ x-1 < 1 \end{cases}$ 的解集是 $1 < x < 2$.

【考点】 CB: 解一元一次不等式组.

【分析】 分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

【解答】 解: $\begin{cases} 2x-1 > 1 \text{ ①} \\ x-1 < 1 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得, $x > 1$,

由②得, $x < 2$,

所以, 不等式组的解集为: $1 < x < 2$.

故答案为: $1 < x < 2$.

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

9. (4分) 关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根的判别式是 p^2-4q .

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】根据根的判别式公式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 解答.

【解答】解: $\because$ 方程 $x^2+px+q=0$ 的二次项系数 $a=1$, 一次项系数 $b=p$, 常数项 $c=q$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q.$$

故答案是: $p^2 - 4q$.

【点评】本题主要考查了一元二次方程的根的判别式公式 $\Delta = b^2 - 4ac$. 在利用该公式解题的时, 一定要弄清楚 a 、 b 、 c 的含义.

10. (4分) 二次函数 $y=2x^2+3$ 的图象开口方向 向上.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】由抛物线解析式可知, 二次项系数 $a=2>0$, 可知抛物线开口向上.

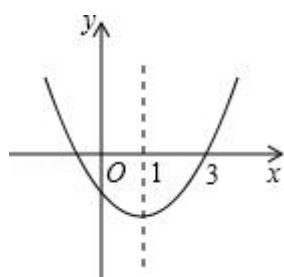
【解答】解: $\because$ 二次函数 $y=2x^2+3$ 的二次项系数 $a=2>0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上.

故答案为: 向上.

【点评】本题考查了抛物线的开口方向与二次项系数符号的关系. 当 $a>0$ 时, 抛物线开口向上, 当 $a<0$ 时, 抛物线开口向下.

11. (4分) 如图, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=1$, 图象经过 $(3, 0)$, 则 $a-b+c$ 的值是 0.



【考点】HA: 抛物线与 x 轴的交点.

【分析】根据已知对称轴为直线 $x=1$, 图象经过 $(3, 0)$, 得出图象与 x 轴的另一交点, 进而得出 $a-b+c$ 的值.

【解答】解: $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=1$, 图象经过 $(3, 0)$,

$\therefore$ 图象还经过 $(-1, 0)$,

则 $a - b + c$ 的值是： $x = -1$ 时，对应 y 的值为 0.

故答案为：0.

【点评】此题主要考查了抛物线与 x 轴交点性质，得出图象与 x 轴的另一个坐标是解题关键.

12. (4 分) 抛物线 $y = (x+2)^2 - 3$ 可以由抛物线 $y = x^2 - 3$ 向 左平移 2 个单位 (平移) 得到.

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】根据平移前后的抛物线的顶点坐标确定平移方法.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (x+2)^2 - 3$ 的顶点坐标为 $(-2, -3)$,

抛物线 $y = x^2 - 3$ 的顶点坐标为 $(0, -3)$,

$\therefore$ 抛物线 $y = (x+2)^2 - 3$ 可以由抛物线 $y = x^2 - 3$ 向左平移 2 个单位得到.

故答案为：左平移 2 个单位.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目利用顶点的平移解答更简便.

13. (4 分) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反，且 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} + \vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向 相同.

【考点】LM：*平面向量.

【分析】根据 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反，且 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 和向量的定义即可求得答案.

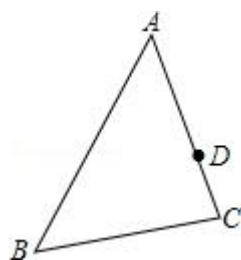
【解答】解： $\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反，且 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$,

$\therefore \vec{a} + \vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；

故答案为：相同.

【点评】此题考查了平面向量，解题的关键是掌握相反向量的定义.

14. (4 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， D 为边 AC 上一点， P 为边 AB 上一点， $AB = 12$ ， $AC = 8$ ， $AD = 6$ ，当 AP 的长度为 4 或 9 时， $\triangle ADP$ 和 $\triangle ABC$ 相似.



【考点】S8：相似三角形的判定.

【分析】 分别根据当 $\triangle ADP \sim \triangle ACB$ 时, 当 $\triangle ADP \sim \triangle ABC$ 时, 求出 AP 的长即可.

【解答】 解: 当 $\triangle ADP \sim \triangle ACB$ 时,

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore \frac{AP}{12} = \frac{6}{8},$$

解得: $AP = 9$,

当 $\triangle ADP \sim \triangle ABC$ 时,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AC},$$

$$\therefore \frac{6}{12} = \frac{AP}{8},$$

解得: $AP = 4$,

$\therefore$ 当 AP 的长度为4或9时, $\triangle ADP$ 和 $\triangle ABC$ 相似.

故答案为: 4或9.

【点评】 此题主要考查了相似三角形的判定与性质, 利用倒推法以及分类讨论得出是解题关键.

15. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角, 若 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为等边三角形.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 根据 $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$, 求出 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的度数, 根据三角形的内角和定理求出 $\angle C$ 的度数, 可得出 $\triangle ABC$ 的形状.

【解答】 解: $\because \angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \angle A = 60^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

故答案为: 等边.

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值, 解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值, 求得 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的度数.

16. (4分) 某坡面的坡度为1: $\frac{12}{5}$, 某车沿该坡面爬坡行进了13米后, 该

车起始位置和终止位置两地所处的海拔高度上升了 5 米.

【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】 已知坡面的坡度为 $1: \frac{12}{5}$, $AB = 5$ 米, 可求得 BC 的长度, 然后可用勾股定理求出坡面距离.

【解答】 解: $\because AB: BC = 1: \frac{12}{5}$, $AB = 5$ 米,

$\therefore BC = 12$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

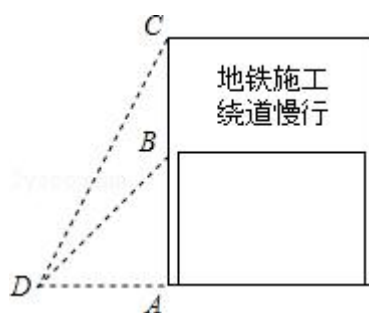
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (米)}.$$

故答案为: 13.



【点评】 本题考查了解直角三角形的应用, 解答本题的关键是掌握坡度的定义, 本题需注意的是坡角的正切等于坡度, 不要混淆概念.

17. (4 分) 在地铁施工期间, 交管部门在施工路段设立了矩形路况警示牌 (如图示), 已知立杆 AB 的高度是 6 米, 从侧面 D 测到路况警示牌顶端 C 点和低端 B 点的仰角分别是 60° 和 45° , 则路况警示牌宽 BC 的值为 $6(\sqrt{3} - 1)$ 米.



【考点】 TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 在直角 $\triangle ABD$ 中, 利用三角函数求得 AD 的长度, 然后再在直角 $\triangle ADC$ 中利用三角函数求得 AC 的长, 根据 $BC = AC - AB$ 即可求解.

【解答】 解: $\because$ 在直角 $\triangle ABD$ 中, $\angle BDA = 45^\circ$,

$\therefore AD = AB = 6$ (米),

在直角 $\triangle ADC$ 中, $\tan \angle CDA = \frac{AC}{AD}$,

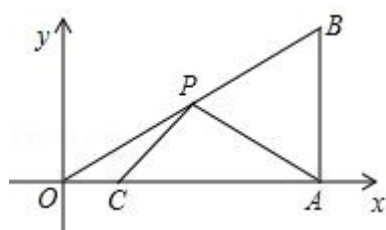
$$\therefore AC = AD \cdot \tan \angle CDA = 6 \times \tan 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ (米)},$$

则 $BC = AC - AB = 6(\sqrt{3} - 1)$ 米.

故答案是 $6(\sqrt{3} - 1)$ 米.

【点评】 本题考查了仰角的定义, 以及三角函数, 正确理解仰角的定义, 理解图中角的度数是关键.

18. (4分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 A 的坐标为 $(9, 0)$, $\tan \angle BOA = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 C 的坐标为 $(2, 0)$, 点 P 为斜边 OB 上的一个动点, 则 $PA+PC$ 的最小值为 $\sqrt{67}$.



【考点】 D5: 坐标与图形性质; PA: 轴对称 - 最短路线问题; T7: 解直角三角形.

【分析】 作 A 关于 OB 的对称点 D , 连接 CD 交 OB 于 P , 连接 AP , 过 D 作 $DN \perp OA$ 于 N , 则此时 $PA+PC$ 的值最小, 求出 AM , 求出 AD , 求出 DN 、 CN , 根据勾股定理求出 CD , 即可得出答案.

【解答】 解: 作 A 关于 OB 的对称点 D , 连接 CD 交 OB 于 P , 连接 AP , 过 D 作 $DN \perp OA$ 于 N , 则此时 $PA+PC$ 的值最小,

$\because \text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 A 的坐标为 $(9, 0)$,

$$\therefore OA = 9,$$

$$\because \tan \angle BOA = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{3}, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore OB = 2AB = 6\sqrt{3},$$

由三角形面积公式得: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times AB = \frac{1}{2} \times OB \times AM$, 即 $9 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}AM$,

$$\therefore AM = \frac{9}{2},$$

$$\therefore AD = 2 \times \frac{9}{2} = 9,$$

$$\because \angle AMB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\because \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAM = 60^\circ,$$

$$\because DN \perp OA,$$

$$\therefore \angle NDA = 30^\circ,$$

$$\therefore AN = \frac{1}{2}AD = \frac{9}{2}, \text{ 由勾股定理得: } DN = \sqrt{AD^2 - AN^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

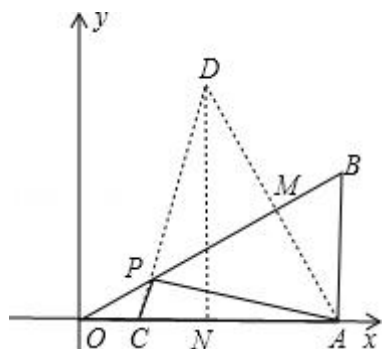
$$\because C(2, 0),$$

$$\therefore CN = 9 - \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DNC \text{ 中, 由勾股定理得: } DC = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{67}$$

即 $PA+PC$ 的最小值是 $\sqrt{67}$,

故答案为: $\sqrt{67}$.



【点评】 本题考查了三角形的内角和定理，轴对称 - 最短路线问题，勾股定理，含 30° 角的直角三角形性质的应用，关键是求出 P 点的位置，题目比较好，难度适中。

三、(共 8 题，第 19-22 题每题 8 分；第 23、24 题每题 10 分；第 25 题 12 分；第 26 题 14 分，共 78 分)

19. (8 分) 化简并求值: $\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) \div \frac{2}{x^2-4}$, 其中 $x = 2\cos 45^\circ - \tan 45^\circ$.

【考点】 6D: 分式的化简求值; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再根据 $x = 2\cos 45^\circ - \tan 45^\circ$ 求出 x 的值，代入代数式进行计算即可．

【解答】 解：原式 $= \frac{x-x+2}{x(x-2)} \div \frac{2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{2}{x(x-2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{2}$
 $= \frac{x+2}{x},$
 $\therefore x = 2\cos 45^\circ - \tan 45^\circ$
 $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
 $= \sqrt{2} - 1,$
 $\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{2}-1+2}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2}.$

【点评】 本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键．

20. (8分) 已知一个二次函数的顶点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ，且图象经过点 $B(2, 3)$ ．

(1) 求这个二次函数的解析式．

(2) 设图象与 y 轴的交点为 C ，记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ，试用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ (直接写出答案)

【考点】 H8：待定系数法求二次函数解析式；LM：*平面向量．

【分析】 (1) 由一个二次函数的顶点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ，且图象经过点 $B(2, 3)$ ，利用顶点式求解即可求得答案；

(2) 由点 B 与 C 关于对称轴 $x = 1$ 对称，可求得 $\overrightarrow{BC}$ ，继而求得答案．

【解答】 解：(1) 设这个二次函数的解析式为： $y = a(x-1)^2$ ，

$\because$ 图象经过点 $B(2, 3)$ ，

$$\therefore 3 = a(2-1)^2,$$

解得： $a = 3$ ，

$\therefore$ 这个二次函数的解析式为： $y = 3(x-1)^2$ ．

(2) 当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$\therefore C$ 的坐标为： $(0, 3)$ ，

∴ 点 B 与 C 关于对称轴 $x = 1$ 对称,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA} = -2\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC} = -2\vec{a}.$$

【点评】 此题考查了平面向量的知识以及二次函数的性质. 此题比较适中, 注意掌握三角形法则的应用.

21. (8 分) 已知抛物线 $l_1: y = -x^2 + 2x + 3$ 和抛物线 $l_2: y = x^2 + 2x - 3$ 相交于 A 、 B , 其中 A 点的横坐标比 B 点的横坐标大.

(1) 求 A 、 B 两点的坐标.

(2) 射线 OA 与 x 轴正方向所相交成的角的正弦值.

【考点】 H3: 二次函数的性质; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 根据两函数图象的交点问题, 得到方程组 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$, 再解方程

组即可得到 A 点坐标为 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, B 点坐标为 $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$;

(2) 作 $AH \perp x$ 轴于 H , 根据 A 点坐标得到 $OH = \sqrt{3}$, $AH = 2\sqrt{3}$, 然后根据三角函数的定义求解.

【解答】 解: (1) 解方程组 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -2\sqrt{3} \end{cases}$,

所以 A 点坐标为 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, B 点坐标为 $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$;

(2) 作 $AH \perp x$ 轴于 H , 如图,

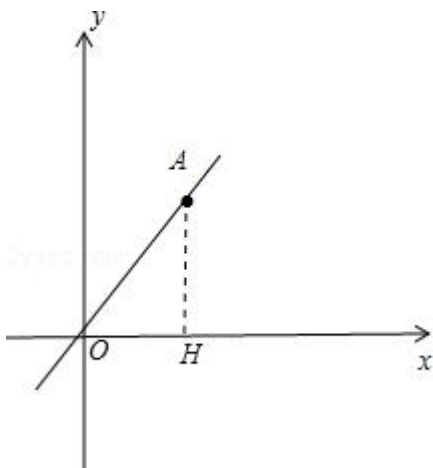
$$\because A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore AH = 2\sqrt{3}, OH = \sqrt{3},$$

$$AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15},$$

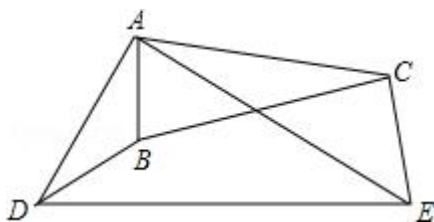
$$\therefore \sin \angle AOH = \frac{AH}{AO} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

即射线 OA 与 x 轴正方向所相交成的角的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



【点评】 本题考查了二次函数的性质：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线，当 $a > 0$ ，抛物线开口向上；对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ；抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$ ；当 $b^2 - 4ac > 0$ ，抛物线与 x 轴有两个交点；当 $b^2 - 4ac = 0$ ，抛物线与 x 轴有一个交点；当 $b^2 - 4ac < 0$ ，抛物线与 x 轴没有交点．也考查了锐角三角函数的定义．

22. (8 分) 如图已知： $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$ ，求证： $\angle ABC = \angle ADE$ ．



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质．

【专题】 14：证明题．

【分析】 由 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$ ，可证得 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ，继而可得 $\angle DAE = \angle BAC$ ，即可证得 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，继而证得结论．

【解答】 证明： $\because \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$ ，

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADE.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质．此题难度适中，注意掌握数形结合思想的应用．

23. (10分) 通过锐角三角比的学习，我们已经知道在直角三角形中，一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定，因此边长比与角的大小之间可以相互转化．类似的我们可以在等腰三角形中建立边角之间的联系．我们定义：等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对 (*sad*)．如图在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，

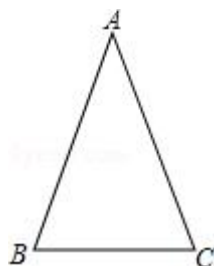
顶角 A 的正对记作 $sadA$ ，这时 $sadA = \frac{\text{底边}}{\text{腰}} = \frac{BC}{AB}$ ．我们容易知道一个角的大小与

这个角的正对值也是互相唯一确定的．根据上述角的正对定义，解下列问题：

(1) $sad60^\circ = \underline{1}$ ； $sad90^\circ = \underline{\sqrt{2}}$ ．

(2) 对于 $0^\circ < A < 180^\circ$ ， $\angle A$ 的正对值 $sadA$ 的取值范围是 $\underline{0 < sadA < 2}$ ．

(3) 试求 $sad36^\circ$ 的值．



【考点】T7：解直角三角形．

【专题】21：阅读型；23：新定义．

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质，求出底角的度数，判断出三角形为等边三角形，再根据正对的定义解答进而得出 $sad90^\circ$ 的值；

(2) 求出 0 度和 180 度时等腰三角形底和腰的比即可；

(3) 作出等腰 $\triangle ABC$ ，构造等腰三角形 BCD ，根据正对的定义解答．

【解答】解：(1) 根据正对定义，

当顶角为 60° 时，等腰三角形底角为 60° ，

则三角形为等边三角形，

$$\text{则 } sad60^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

根据正对定义，

当顶角为 90° 时，等腰三角形底角为 45° ，

则三角形为等腰直角三角形，

$$\text{则 } \text{sad}90^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

故答案为：1， $\sqrt{2}$ 。

(2) 当 $\angle A$ 接近 0° 时， $\text{sad}A$ 接近 0，

当 $\angle A$ 接近 180° 时，等腰三角形的底接近于腰的二倍，故 $\text{sad}A$ 接近 2。

于是 $\text{sad}A$ 的取值范围是 $0 < \text{sad}A < 2$ 。

故答案为： $0 < \text{sad}A < 2$ 。

(3) 如图所示：已知： $\angle A = 36^\circ$ ， $AB = AC$ ， $BC = BD$ ，

$$\therefore \angle A = \angle CBD = 36^\circ, \angle ABC = \angle C = 72^\circ,$$

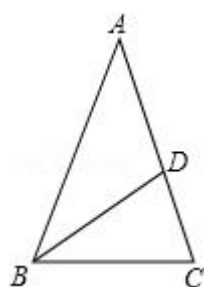
$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC},$$

$$\therefore \frac{BC}{BC+CD} = \frac{CD}{BC},$$

$$\text{解得： } BC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}CD,$$

$$\therefore \text{sad}36^\circ = \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

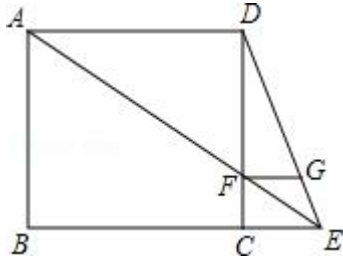


【点评】 本题考查了解直角三角形：利用三角函数的定义和相似三角形的判定与性质，根据题意得出 BC 与 CD 的关系是解题关键。

24. (10 分) 如图， E 为正方形 $ABCD$ 边 BC 延长线上一点， AE 交 DC 于 F ， $FG \parallel BE$ 交 DE 于 G

(1) 求证： $FG = FC$ ；

(2) 若 $FG = 1$ ， $AD = 3$ ，求 $\tan \angle GFE$ 的值。



【考点】LE：正方形的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】（1）由四边形 $ABCD$ 是正方形，可得 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD$ ，即可证得 $\triangle CEF \sim \triangle BEA$ ， $\triangle EFG \sim \triangle EAD$ ，然后由相似三角形的对应边成比例，证得结论．

（2）由 $FG \parallel BE$ ，可得 $\angle DAF = \angle GFE$ ，即可得 $\tan \angle GFE = \tan \angle DAF = \frac{DF}{AD}$ ．

【解答】（1）证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle BEA, \triangle EFG \sim \triangle EAD,$$

$$\therefore \frac{CF}{AB} = \frac{EF}{AE}, \frac{FG}{AD} = \frac{EF}{AE}.$$

$$\therefore \frac{FG}{AD} = \frac{CF}{AB}.$$

$$\therefore CF = FG.$$

（2）解： $\because FG \parallel BE$ ，

$$\therefore \angle DAF = \angle GFE,$$

$$\because FC = FG = 1, CD = AD = 3,$$

$$\therefore DF = CD - FC = 2,$$

$$\therefore \tan \angle GFE = \tan \angle DAF = \frac{DF}{AD} = \frac{2}{3}.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及正方形的性质．此题难度适中，注意掌握数形结合思想的应用．

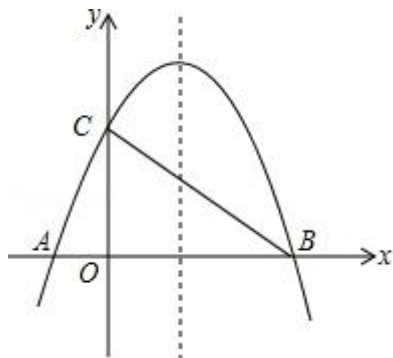
25.（12分）如图，已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点，与 y 轴相交于点 C ，若已知 B 点的坐标为 $B(8, 0)$ ．

（1）求抛物线的解析式及其对称轴方程；

（2）连接 AC 、 BC ，试判断 $\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 是否相似？并说明理由；

(3) M 为抛物线上 BC 之间的一点, N 为线段 BC 上的一点, 若 $MN \parallel y$ 轴, 求 MN 的最大值;

(4) 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q , 使 $\triangle ACQ$ 为等腰三角形? 若存在, 求出符合条件的 Q 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 (1) 把点 B 的坐标代入抛物线解析式求出 b 的值, 即可得到抛物线解析式, 再根据对称轴方程列式计算即可得解;

(2) 令 $y=0$, 解方程求出点 A 的坐标, 令 $x=0$ 求出 y 的值得到点 C 的坐标, 再求出 OA 、 OB 、 OC , 然后根据对应边成比例, 夹角相等的两个三角形相似证明;

(3) 设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$, 利用待定系数法求出解析式, 再表示出 MN , 然后根据二次函数的最值问题解答;

(4) 利用勾股定理列式求出 AC , 过点 C 作 $CD \perp$ 对称轴于 D , 然后分① $AC = CQ$ 时, 利用勾股定理列式求出 DQ , 分点 Q 在点 D 的上方和下方两种情况求出点 Q 到 x 轴的距离, 再写出点的坐标即可; ②点 Q 为对称轴与 x 轴的交点时, $AQ = CQ$, 再写出点 Q 的坐标即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 点 $B(8, 0)$ 在抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 4$ 上,

$$\therefore -\frac{1}{4} \times 64 + 8b + 4 = 0,$$

$$\text{解得 } b = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4,$$

对称轴为直线 $x = -\frac{\frac{3}{2}}{2 \times (-\frac{1}{4})} = 3$;

(2) $\triangle AOC \sim \triangle COB$.

理由如下: 令 $y = 0$, 则 $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 0$,

即 $x^2 - 6x - 16 = 0$,

解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 8$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$,

令 $x = 0$, 则 $y = 4$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 4)$,

$\therefore OA = 2$, $OB = 8$, $OC = 4$,

$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC} = 2$, $\angle AOC = \angle COB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOC \sim \triangle COB$;

(3) 设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

则 $\begin{cases} 8k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$,

$\because MN \parallel y$ 轴,

$\therefore MN = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 - (-\frac{1}{2}x + 4)$,

$= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 + \frac{1}{2}x - 4$,

$= -\frac{1}{4}x^2 + 2x$,

$= -\frac{1}{4}(x - 4)^2 + 4$,

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时, MN 的值最大, 最大值为 4;

(4) 由勾股定理得, $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

过点 C 作 $CD \perp$ 对称轴于 D , 则 $CD = 3$,

$$\textcircled{1} AC = CQ \text{ 时, } DQ = \sqrt{CQ^2 - CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 3^2} = \sqrt{11},$$

点 Q 在点 D 的上方时, 点 Q 到 x 轴的距离为 $4 + \sqrt{11}$,

此时点 $Q_1(3, 4 + \sqrt{11})$,

点 Q 在点 D 的下方时, 点 Q 到 x 轴的距离为 $4 - \sqrt{11}$,

此时点 $Q_2(3, 4 - \sqrt{11})$,

$\textcircled{2}$ 点 Q 为对称轴与 x 轴的交点时, $AQ = 5$,

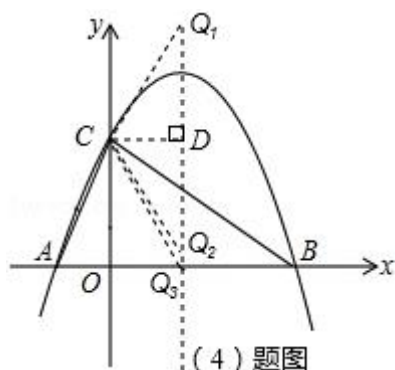
$$CQ = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore AQ = CQ,$$

此时, 点 $Q_3(3, 0)$,

$\textcircled{3}$ 当 $AC = AQ$ 时, $\because AC = 2\sqrt{5}$, 点 A 到对称轴的距离为 5, $2\sqrt{5} < 5$, $\therefore$ 这种情况不存在.

综上所述, 点 Q 的坐标为 $(3, 4 + \sqrt{11})$ 或 $(3, 4 - \sqrt{11})$ 或 $(3, 0)$ 时, $\triangle ACQ$ 为等腰三角形时.



【点评】 本题是二次函数综合题型, 主要利用了待定系数法求二次函数解析式, 待定系数法求一次函数解析式, 相似三角形的判定, 二次函数的最值问题, 勾股定理的应用, 等腰三角形的性质, 难点在于(4)要分情况讨论.

26. (14分) 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 5\text{cm}$; $\triangle DEF$ 中, $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $DE = 3\text{cm}$. 现将 $\triangle DEF$ 的直角边 DF 与 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 重合在一起, 并将 $\triangle DEF$ 沿 AB 方向移动(如图). 在移动过程中, D 、 F 两点始终在 AB 边上(移动开始时点 D 与点 A 重合, 一直移动至点 F 与点 B

重合为止).

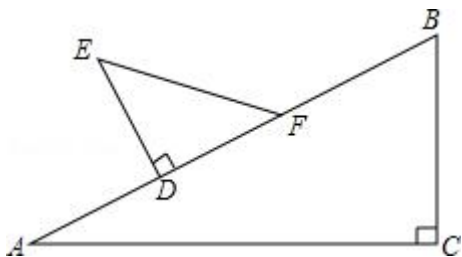
(1) 在 $\triangle DEF$ 沿 AB 方向移动的过程中, 有人发现: E 、 B 两点间的距离随 AD 的变化而变化, 现设 $AD = x$, $BE = y$, 请你写出 y 与 x 之间的函数关系式及其定义域.

(2) 请你进一步研究如下问题:

问题①: 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, E 、 B 的连线与 AC 平行?

问题②: 在 $\triangle DEF$ 的移动过程中, 是否存在某个位置, 使得 $\angle EBD = 22.5^\circ$? 如果存在, 求出 AD 的长度; 如果不存在, 请说明理由.

问题③: 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, 以线段 AD 、 EB 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形?



【考点】RB: 几何变换综合题.

【分析】(1) 在直角 $\triangle ABC$ 中, 由“30度角所对的直角边是斜边的一半”求得 $AB = 10cm$; 在直角 $\triangle EBD$ 中, 利用勾股定理列出 y 与 x 的函数关系, 由线段 AB 、 DF 的长度来确定 x 的取值范围;

(2) 问题①: 因为 $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 5cm$, 所以 $AB = 10cm$, 又因为 $\angle FDE = 90^\circ$, $\angle DEF = 45^\circ$, $DE = 3cm$, 所以 $DF = 4cm$, 连接 EB , 设 $BE \parallel AC$, 则可求证 $\angle EBD = \angle A = 30^\circ$, 故 AD 的长度可求;

问题②: 当 $\angle EBD = 22.5^\circ$ 时, 利用三角形外角的性质求得 $\angle BEF = 22.5^\circ$, 则 $\angle EBD = \angle BEF$, 故 $BF = EF = 3\sqrt{2}$, $AD = BD - BF - DF = 7 - 3\sqrt{2} (cm)$;

问题③: 分情况讨论: EB 为斜边; AD 为斜边; BC 为斜边. 综合分析即可求得 AD 的长.

【解答】解: (1) 如图, 连接 EB .

$\because \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 5cm$,

$\therefore AB = 2BC = 10cm$.

又 $\because$ 在 $\triangle DEF$ 中, $\angle EDF = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $DE = 3cm$,

$$\therefore DF = DE = 3cm.$$

$$\therefore \text{在直角}\triangle BED\text{中}, BE^2 = ED^2 + BD^2 = ED^2 + (10 - AD)^2,$$

$$\text{即 } y^2 = 3^2 + (10 - x)^2,$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 20x + 109}.$$

$$\therefore AB = 10cm, DF = 3cm.$$

$$\therefore 0 \leq AD \leq 7, \text{ 即 } 0 \leq x \leq 7.$$

综上所述, y 与 x 之间的函数关系式及其定义域分别是: $y = \sqrt{x^2 - 20x + 109}$ ($0 \leq x \leq 7$);

(2) 问题①: $AD = (10 - 3\sqrt{3})cm$ 时, $BE \parallel AC$. 理由如下:

设 $EB \parallel AC$, 则 $\angle EBD = \angle A = 30^\circ$,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EBD\text{中}, DB = 3\sqrt{3}cm$$

$$\therefore AD = AB - BD = (10 - 3\sqrt{3})cm$$

$$\therefore AD = (10 - 3\sqrt{3})cm \text{ 时}, BE \parallel AC;$$

问题②: 在 $\triangle DEF$ 的移动过程中, 当 $AD = (7 - 3\sqrt{2})cm$ 时, 使得 $\angle EBD = 22.5^\circ$. 理由如下:

假设 $\angle EBD = 22.5^\circ$.

$$\therefore \text{在}\triangle DEF\text{中}, \angle D = 90^\circ, \angle DEF = 45^\circ, DE = 3cm,$$

$$\therefore EF = 3\sqrt{2}cm, \angle DEF = \angle DFE = 45^\circ, DE = DF = 3cm.$$

$$\text{又} \because \angle DFE = \angle FEB + \angle FBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle BEF,$$

$$\therefore BF = EF = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AD = AB - BF - DF = 7 - 3\sqrt{2} (cm).$$

$$\therefore \text{在}\triangle DEF\text{的移动过程中}, \text{当 } AD = (7 - 3\sqrt{2})cm \text{ 时}, \text{使得 } \angle EBD = 22.5^\circ;$$

问题③: i) 当 EB 为斜边时.

$$\text{由 } AD^2 + BC^2 = EB^2 \text{ 得}, x^2 + 5^2 = (10 - x)^2 + 9,$$

$$\text{解得}, x = 4.2, \text{ 即 } AD = 4.2cm.$$

$$\therefore \text{由 (1) 知}, 0 \leq x \leq 7,$$

$\therefore AD = 4.2\text{cm}$ 符合题意;

ii) 当 AD 为斜边时.

由 $EB^2 + BC^2 = AD^2$ 得, $(10 - x)^2 + 9 + 5^2 = x^2$,

解得, $x = 6.7$, 即 $AD = 6.7\text{cm}$.

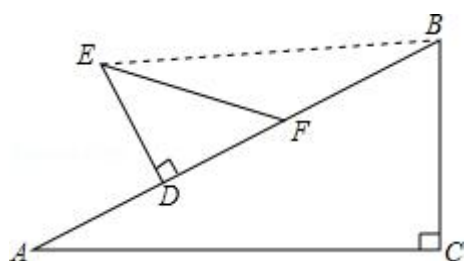
$\because$ 由 (1) 知, $0 \leq x \leq 7$,

$\therefore AD = 6.7\text{cm}$ 符合题意;

iii) 当 BC 为斜边时,

由 $AD^2 + EB^2 = BC^2$ 得, $x^2 + (10 - x)^2 + 9 = 25$, 即 $x^2 - 10x + 42 = 0$, 该方程无解.

综合 i)、ii)、iii) 得, 当 AD 的长为 4.2cm 或 6.7cm 时, 以线段 AD 、 EB 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形.



【点评】 本题把等腰三角形的判定、勾股定理和勾股定理的逆定理结合求解. 综合性强, 难度大. 考查学生综合运用数学知识的能力. 注意解题的方法不惟一, 可让学生采用不同方法求解, 培养学生的思维能力.