

2026 年上海市初中学业水平考试

数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

(试卷共 5 页, 答题纸共 2 页)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列选项中, 是无理数的是()

A. $\frac{5}{7}$

B. 4

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{9}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查无理数的概念, 根据无理数和有理数的定义逐一判断选项即可, 用到的知识点为: 无理数是无限不循环小数, 有理数是整数和分数的统称.

【详解】 解: 选项 A, $\frac{5}{7}$ 是分数, 属于有理数,

选项 B, 4 是整数, 属于有理数,

选项 C, $\sqrt{2}$ 是无限不循环小数, 是无理数,

选项 D, $\sqrt{9} = 3$, 3 是整数, 属于有理数.

2. 下列选项中, 与 $2a^2bc$ 是同类项的是 ()

A. ab^2c

B. a^2bc

C. $2abc$

D. $2ab^2c$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据同类项定义: 所含字母相同, 且相同字母的指数分别相同的单项式为同类项, 逐一判断选项即可.

【详解】 解: A、 $2a^2bc$ 与 ab^2c 中字母 a, b 的指数对应不相同, 不是同类项, 故选项不符合题意;

B、符合同类项的定义, 故选项符合题意;

C、 $2a^2bc$ 与 $2abc$ 中字母 a 的指数不相同, 不是同类项, 故选项不符合题意;

D、 $2a^2bc$ 与 $2ab^2c$ 中字母 a, b 的指数对应不相同, 不是同类项, 故选项不符合题意.

3. 下列方程中, 没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$

B. $x^2 - 2 = 0$

C. $x^2 + 2x = 0$

D. $x^2 + 2 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 当判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根, 计算各选项的判别式即可判断.

【详解】解: 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$.

选项 A: 方程为 $x^2 - 2x = 0$, $\therefore a = 1, b = -2, c = 0$,

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 > 0$, 方程有两个不相等的实数根.

选项 B: 方程为 $x^2 - 2 = 0$, $\therefore a = 1, b = 0, c = -2$,

$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 8 > 0$, 方程有两个不相等的实数根.

选项 C: 方程为 $x^2 + 2x = 0$, $\therefore a = 1, b = 2, c = 0$,

$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 > 0$, 方程有两个不相等的实数根.

选项 D: 方程为 $x^2 + 2 = 0$, $\therefore a = 1, b = 0, c = 2$,

$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 2 = -8 < 0$, 方程没有实数根.

4. 已知一周的周一至周五, 某同学的运动时间为 34、28、40、36、32 分钟, 为了让一周 7 天内的平均活动时间恰好达到 40 分钟, 该同学周六、周日应分别运动 () 分钟.

A. 50, 50

B. 45, 60

C. 50, 60

D. 55, 60

【答案】C

【解析】

【分析】根据平均数的定义, 先求出 7 天需要的总运动时间, 再减去前 5 天的总运动时间, 得到周六周日的总运动时间, 对比选项得到结果.

【详解】解: $\therefore$ 7 天平均运动时间为 40 分钟,

$\therefore$ 7 天总运动时间为 $40 \times 7 = 280$ 分钟,

$\therefore$ 周一到周五的总运动时间为 $34 + 28 + 40 + 36 + 32 = 170$ 分钟,

$\therefore$ 周六和周日的总运动时间为 $280 - 170 = 110$ 分钟,

对比各选项, 只有 C 选项中 $50 + 60 = 110$, 符合题意.

5. 已知 $\odot A$ 的半径为3, $\odot B$ 的半径为7, 且 $AB=2$, 则 $\odot A$ 与 $\odot B$ 位置关系是 ()

- A. 内含 B. 相交 C. 相切 D. 相离

【答案】A

【解析】

【分析】本题根据两圆位置关系的判定方法, 比较圆心距与两圆半径差的大小, 即可得出结论, 若两圆半径分别为 R, r ($R > r$), 圆心距为 d , 当 $d < R - r$ 时, 两圆内含.

【详解】解: 设 $\odot A$ 的半径 $r=3$, $\odot B$ 的半径 $R=7$, 两圆圆心距 $d=AB=2$,

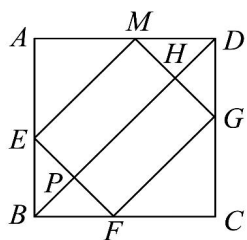
$$\therefore R-r=7-3=4,$$

$$\because d=2 < 4=R-r,$$

$\therefore \odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系是内含.

6. 如图, 已知边长为1的正方形 $ABCD$, 点 E 是边 AB 上的一点(不与点 A, B 重合), 过点 E 作 $EM \parallel BD$, 交边 AD 与点 M , 作点 E, M 关于 BD 的对称点 F, G , 联结 EF, MG 交 BD 于点 P, H , 现有以下两个命题: ①四边形 $EFGM$ 的周长是一个定值; ②四边形 $EPHM$ 的周长是一个定值;

下列说法中, 正确的是()



- A. ①、②均正确 B. ①正确, ②错误
C. ①错误, ②正确 D. ①、②均错误

【答案】B

【解析】

【分析】设 $AM=a$, 则 $MD=1-a$, 根据题意以及正方形的性质分别求得 $EF=MG=\sqrt{2}(1-a)$, $FG=EM=\sqrt{2}a$, 进而求得四边形 $EFGM$ 、 $EPHM$ 的周长, 即可求解.

【详解】解: 依题意, $AM=AE, MD=DG, BF=BE, CF=CG$, 设 $AM=a$, 则 $MD=1-a$,

$\triangle AME$ 是等腰直角三角形, 则 $EM=\sqrt{2}a$, $\triangle MDG$ 是等腰直角三角形, $MG=\sqrt{2}(1-a)$, $\triangle MHD$ 是等腰直角三角形, 则 $MH=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)$

同理可得 $EF = MG = \sqrt{2}(1-a)$, $FG = EM = \sqrt{2}a$,

$\therefore$ 四边形 $EFGM$ 的周长 $= 2(EM + EF) = 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$

四边形 $EPHM$ 的周长 $= 2(EM + MH) = 2\sqrt{2}a + \sqrt{2} - \sqrt{2}a = \sqrt{2}a + \sqrt{2}$

故①正确, ②错误

二、填空题 (本大题共 11 小题, 每小题 4 分, 满分 44 分)

【请将结果直接填入答题纸相应的空格内】

7. 计算 $(m^2)^4$ 的结果为_____.

【答案】 m^8

【解析】

【分析】 根据幂的乘方运算法则计算即可.

【详解】 解: $(m^2)^4 = m^{2 \times 4} = m^8$.

8. 在 1, -2, -3, 4, 5 这 5 个数中选一个数, 选出的数是正数的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 先确定所有等可能的结果总数, 再找出选出的数为正数的结果数, 再根据概率公式计算即可.

【详解】 解: 根据题意, 总共有 5 个数, 所有等可能的结果总数 $n = 5$, 其中正数为 1, 4, 5, 满足条件的结果数 $m = 3$.

根据概率公式 $P = \frac{m}{n}$, 可得选出的数是正数的概率为 $P = \frac{3}{5}$.

9. 方程 $\sqrt{13x-1} = 5$ 的解为_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【详解】 解: $\sqrt{13x-1} = 5$

$\therefore 13x-1 = 25$

解得: $x = 2$, 经检验 $x = 2$ 是原方程的解.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$, 则 $\tan B$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】先利用勾股定理求出直角边 BC 的长度，再根据锐角三角函数中正切的定义计算即可.

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，

由勾股定理得 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，

根据正切的定义， $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

11. 在等腰三角形 ABC ($\angle A \neq \angle B$) 中， $\angle A = 80^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数为_____.

【答案】 20° 或 50°

【解析】

【分析】本题分 $\angle A$ 是顶角， $\angle A$ 是底角两种情况，结合等腰三角形性质，三角形内角和定理和已知条件 $\angle A \neq \angle B$ ，排除不符合条件的情况后求解.

【详解】已知等腰 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ，且 $\angle A \neq \angle B$.

若 $\angle A$ 是顶角，则 $\angle B = \angle C$ ，所以 $\angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$ ，符合 $\angle A \neq \angle B$ ；

若 $\angle A$ 是底角，当 $\angle B$ 是顶角时， $\angle C = \angle A = 80^\circ$ ，所以 $\angle B = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ ，符合 $\angle A \neq \angle B$ ；

当 $\angle C$ 是顶角时， $\angle B = \angle A = 80^\circ$ ，与 $\angle A \neq \angle B$ 矛盾，故舍去.

综上， $\angle B$ 的度数为 20° 或 50° .

12. 已知点 $A(m, n)$ 与点 $B(3, 4)$ 在同一条反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，若 $0 < m < 3$ ，则 n 的取值范围是_____.

【答案】 $n > 4$

【解析】

【分析】先根据点 B 的坐标求出反比例函数的 k 值，得到反比例函数解析式，再利用反比例函数的增减性，结合 m 的取值范围，得到 n 的取值范围.

【详解】解： $\because$ 点 $B(3, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$\therefore k = 3 \times 4 = 12$ ，

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$ ，

$\because k = 12 > 0$ ，

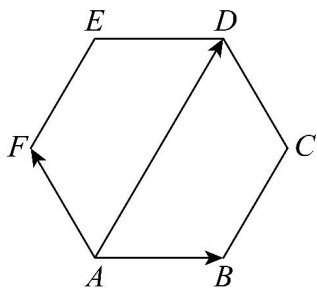
$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 在第一象限内， y 随 x 的增大而减小，

$\because$ 点 $A(m, n)$ 在该反比例函数图象上，且 $0 < m < 3$ ，

当 $x = 3$ 时， $y = 4$ ，

$\therefore n > 4$.

13. 如图, 在正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{AF} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$ 的结果是_____.

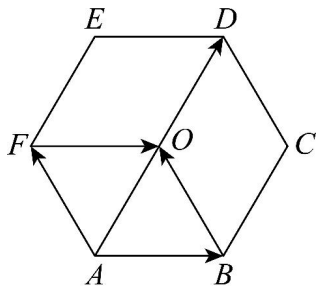


【答案】 $2\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据正六边形的性质得到 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$, 再结合平行四边形法则得到 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$, 进而求出用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$ 的结果.

【详解】 解: 如图, 设正六边形的中点为 O , 连接 $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{BO}$,



在正六边形中, $AB \parallel FO$ 、 $AF \parallel BO$, 且 $AB = FO$ 、 $AF = BO$,

$\therefore$ 四边形 $ABOF$ 是平行四边形,

根据向量加法的平行四边形法则, 平行四边形的对角线向量等于两邻边向量之和: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

14. 某市 2024 年进出口集装箱 5.15×10^7 个, 2025 年进出口集装箱 5.5×10^7 个, 则 2025 年较 2024 年集装箱的进出口数量增加了_____. (用科学记数法表示)

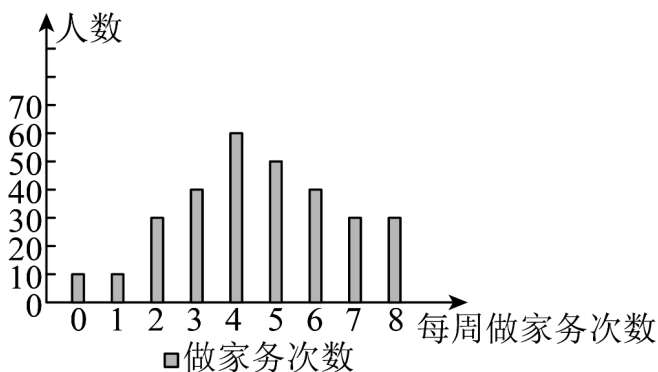
【答案】 3.5×10^6

【解析】

【分析】 用 2025 年进出口集装箱数量减去 2024 年的数量, 将结果整理为符合要求的科学记数法的形式即可解答.

【详解】解：根据题意列算式计算得： $5.5 \times 10^7 - 5.15 \times 10^7 = (5.5 - 5.15) \times 10^7 = 0.35 \times 10^7 = 3.5 \times 10^6$.

15. 某区抽查 300 名学生每周做家务的次数，如图所示，据此可以推测全区 9000 名学生每周做家务次数大于 5 次的有_____人.



【答案】 3000

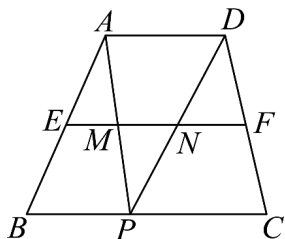
【解析】

【详解】解：由题意知，300 名学生每周做家务次数大于 5 次的有 $40 + 30 + 30 = 100$ (人)，

在 300 名学生中，每周做家务次数大于 5 次的学生占比为 $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ ，

据此可以推测全区 9000 名学生每周做家务次数大于 5 次的有 $9000 \times \frac{1}{3} = 3000$ (人)，

16. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， EF 是梯形的中位线，点 P 是边 BC 上一点，联结 AP 、 DP 分别交 EF 于点 M 、 N ，若 $BC = 2AD$ ， $S_{\triangle PMN} = 1$ ，则梯形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】设梯形的高为 h ，用 AD 表示出 MN 的长度，利用三角形面积公式求出 AD 与 h 的乘积，最后代入梯形面积公式计算即可求解.

【详解】解：设梯形 $ABCD$ 的高为 h

$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线

$\therefore EF \parallel AD \parallel BC$ ， $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ， EF 与 BC 之间的距离为 $\frac{h}{2}$

$\because BC = 2AD$

在 $\triangle ABP$ 中, E 为 AB 中点, $EM \parallel BP$

$$\therefore EM = \frac{1}{2}BP \text{ 同理可得 } FN = \frac{1}{2}PC$$

$$\therefore MN = EF - EM - FN = \frac{3}{2}AD - \frac{1}{2}(BP + PC) = \frac{3}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}AD - AD = \frac{1}{2}AD$$

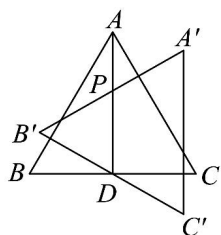
$$\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot \frac{h}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}AD \cdot h = 1$$

$$\therefore AD \cdot h = 8$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(3AD)h = \frac{3}{2} \times 8 = 12.$$

17. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 BC 的中点, 连接 AD , 将 $\triangle ABC$ 绕点 D 旋转 α° ($0 < \alpha < 90$), 得到 $\triangle A'B'C'$, 边 $A'B'$ 交 AD 于点 P , 当 $A'B' \perp AC$ 时, $\frac{AP}{PD}$ 的值为_____.



【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质得出 $AD \perp BC$, $\angle DAC = 30^\circ$, 结合 $A'B' \perp AC$ 求出 $\angle B'PD = 60^\circ$, 利用旋转的性质得到 $\angle B' = 60^\circ$, $DB' = DB$, 判定 $\triangle B'PD$ 为等边三角形, 从而得出 $PD = DB$, 最后在 $Rt\triangle ABD$ 中求出 AD 与 BD 的数量关系即可求解.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 BC 的中点,

$$\therefore AD \perp BC, \angle B = \angle BAC = 60^\circ, \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ,$$

$$\because A'B' \perp AC,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle APE$ (设 $A'B'$ 交 AC 于点 E) 中,

$$\angle APE = 90^\circ - \angle DAC = 60^\circ$$

由旋转的性质可知 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$,

$$\therefore \angle B' = \angle B = 60^\circ, DB' = DB,$$

在 $\triangle B'PD$ 中, $\angle B'PD = 60^\circ, \angle PB'D = 60^\circ$,

$\therefore \triangle B'PD$ 是等边三角形,

$$\therefore PD = DB',$$

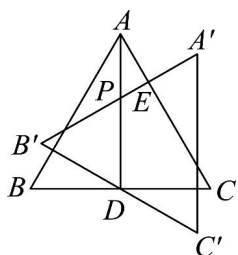
$$\therefore PD = DB,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore AD = BD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}BD$$

$$\therefore AP = AD - PD = \sqrt{3}BD - BD = (\sqrt{3} - 1)BD,$$

$$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{(\sqrt{3} - 1)BD}{BD} = \sqrt{3} - 1.$$



三、解答题 (本大题共 7 小题, 满分 82 分)

【请在答题纸相应位置写下相应步骤】

18. 计算: $\left(-\frac{1}{4}\right)^0 + |\sqrt{3} - 1| - \sqrt{48} + \frac{4}{\sqrt{3} - 1}.$

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查零指数幂、绝对值的性质、二次根式化简以及分母有理化的知识. 先分别化简每一项, 再合并同类二次根式即可得到结果.

【详解】 解: 原式 $= 1 + \sqrt{3} - 1 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2$
 $= (1 - 1 + 2) + (\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$
 $= 2 - \sqrt{3}.$

19. 解方程组: $\begin{cases} y^2 - 2x = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}.$

【答案】 $\begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

【解析】

【分析】本题使用代入消元法求解，先将一次方程变形，用含 y 的代数式表示 x ，再代入二次方程得到一元二次方程，求解后再回代求 x 的值.

【详解】解：
$$\begin{cases} y^2 - 2x = 7 \text{ ①} \\ x - y = 4 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得 $x = y + 4$ ③

把③代入①得 $y^2 - 2(y + 4) = 7$

整理得 $y^2 - 2y - 15 = 0$

因式分解得 $(y - 5)(y + 3) = 0$

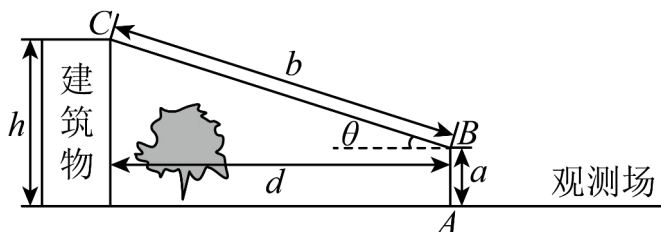
解得 $y_1 = 5, y_2 = -3$

把 $y = 5$ 代入③得 $x = 5 + 4 = 9$

把 $y = -3$ 代入③得 $x = -3 + 4 = 1$

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$.

20. 如图，小明正在确认某一建筑物与栏杆是否安全，栏杆 AB 与建筑物的底端处在同一水平面上，规定建筑物高度 h 与栏杆到建筑物的距离 d 满足 $\frac{h}{d} < \frac{1}{8}$ 即为安全.



(1) 当 $d = 100$ 米时， h 至少需要小于多少米？

(2) 若在观测场测得 AB 的长是 a ， BC 的长为 b ，在 B 处观测 C 的仰角为 θ ，求 $\frac{h}{d}$. (用含 a 、 b 、 θ 的代数式表示)

【答案】(1) h 至少需要小于 12.5 米

(2) $\frac{h}{d} = \frac{a + b \sin \theta}{b \cos \theta}$

【解析】

【分析】(1) 将 $d = 100$ 代入 $\frac{h}{d} < \frac{1}{8}$ 中，解得 $h < 12.5$ ，即可求解；

(2) 过点 B 作建筑物的垂线, 垂足为点 D , 则 $BD = d$, $CD = h - a$, 在 $Rt\triangle BCD$ 中, $\sin\theta = \frac{CD}{BC} = \frac{h-a}{b}$, $\cos\theta = \frac{BD}{BC} = \frac{d}{b}$, 得到 $h = a + b\sin\theta$, $d = b\cos\theta$, 即可求解.

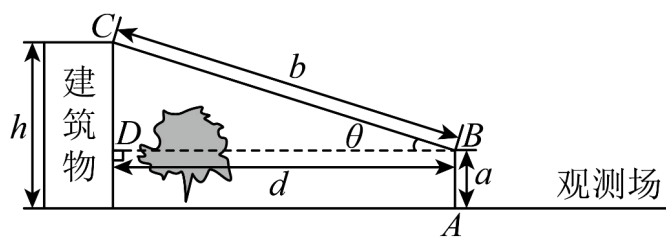
【小问 1 详解】

解: 由题可知, 当 $d = 100$ 米时, $\frac{h}{100} < \frac{1}{8}$, 解得 $h < 12.5$,

$\therefore h$ 至少需要小于 12.5 米;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 B 作建筑物的垂线, 垂足为点 D , 则 $BD = d$, $CD = h - a$,



在 $Rt\triangle BCD$ 中, $\sin\theta = \frac{CD}{BC} = \frac{h-a}{b}$, $\cos\theta = \frac{BD}{BC} = \frac{d}{b}$,

$\therefore h = a + b\sin\theta$, $d = b\cos\theta$,

$\therefore \frac{h}{d} = \frac{a + b\sin\theta}{b\cos\theta}$.

21. 某景区通过自动扶梯将游客送往观景台, 8:10:00 时第一位游客站上扶梯, 8:10:51 时第一位游客到达观景台, 此后的游客有序排队入场, 每位游客到达时间的间隔为 0.8 秒.

(1) 设登上观景台的游客数为 x , 时间为 y (从 8:10:00 开始计时, 单位为秒), 请完成表格, 并写出 y 关于 x 的函数解析式; (不用写定义域)

x	1	6
y		

表 1

(2) ①请你求出从 8 点 10 分 0 秒整到 8 点 12 分 0 秒整, 一共有几位游客到达观景台;

②请你求出从 8 点 12 分 0 秒整到 8 点 14 分 0 秒整, 一共有几位游客到达观景台.

【答案】(1) 表格依次填入 51, 55; y 关于 x 的函数解析式为 $y = 0.8x + 50.2$

(2) ① 87 位; ② 150 位

【解析】

【分析】本题为一次函数实际应用问题，解题思路为：首先根据题意得到第一位游客到达的时间，结合游客到达间隔推出表格数据，再推导得到 y 关于 x 的一次函数解析式，最后根据不同时间段的总计时 y 的范围，结合 x 为正整数的性质，计算得到对应游客数量。用到的性质为一次函数的定义与一元一次不等式的求解。

【小问1详解】

解：由题意可知，第一位游客到达时间为从计时开始51秒。

所以当 $x=1$ 时， $y=51$ 。

每位游客到达间隔为0.8秒，

当 $x=6$ 时， $y=51+0.8\times(6-1)=55$ 。

$\therefore x$ 位游客，第一位用时51秒，剩余 $(x-1)$ 位每位间隔0.8秒，

$$\therefore y=51+0.8(x-1)=0.8x+50.2$$

【小问2详解】

解：①从8点10分0秒整到8点12分0秒整，总计时 $y=120$ 秒。

$$\text{令 } 0.8x+50.2 \leq 120$$

解得 $x \leq 87.25$ x 为正整数，因此最大 $x=87$ 。

答：一共有87位游客到达观景台。

②从8点10分0秒整到8点14分0秒整，总计时 $y=240$ 秒。

$$\text{令 } 0.8x+50.2 \leq 240$$

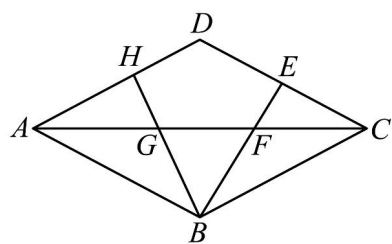
解得 $x \leq 237.25$ x 为正整数，

因此到8点14分0秒整最多有237位游客到达。

该时间段游客数为 $237-87=150$ 。

答：一共有150位游客到达观景台。

22. 如图，菱形 $ABCD$ 中， E 是线段 CD 上的点，连接 BE 交对角线 AC 于点 F ，且 $\angle FBC = \angle CAB$ 。



(1) 如果 $AF=2BF$ ，求证： $CE=DE$ ；

(2) 如果 $\angle ABE$ 的角平分线交 AC 、 AD 于点 G 、 H ，求证： $CD \cdot BG = BH \cdot BF$ 。

【答案】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA = \angle CAB = \angle BCA, \quad AB = DC,$$

$$\because \angle FBC = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle BCA,$$

$$\therefore FB = FC,$$

$$\because AF = 2BF,$$

$$\therefore AF = 2CF,$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle ABF,$$

$$\because \angle EFC = \angle AFB,$$

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle CFE,$$

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{AB}{CE}, \quad \text{即} \quad \frac{AB}{CE} = 2,$$

$$\because AB = DC,$$

$$\therefore \frac{DC}{CE} = 2, \quad \text{即} \quad DC = 2CE$$

故 $CE = DE$.

(2) 证明: $\because$ 据 (1) 可知 $\angle FBC = \angle BCA$,

$$\therefore \angle BFA = \angle FBC + \angle BCA = 2\angle FBC,$$

$$\because \angle FBC = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle BFA = 2\angle CAB,$$

$$\because \angle DAC = \angle DCA = \angle CAB = \angle BCA, \quad \angle BAH = \angle DAC + \angle CAB,$$

$$\therefore \angle BAH = 2\angle CAB,$$

$$\therefore \angle BFA = \angle BAH,$$

$$\because BH \text{ 平分 } \angle ABE,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle GBF,$$

$$\therefore \triangle BFG \sim \triangle BAH,$$

$$\therefore \frac{BF}{BA} = \frac{BG}{BH},$$

$$\because BA = CD,$$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{BG}{BH},$$

$$\therefore CD \cdot BG = BH \cdot BF.$$

【解析】

【分析】(1) 利用菱形对角线平分内角，结合等角对等边得 $FB = FC$ ，由 $AF = 2BF$ 得到 $AF = 2CF$ ，再由 $AB \parallel CD$ 证 $\triangle AFB \sim \triangle CFE$ ，推出 $AB = 2CE$ ，结合菱形边长相等证出 $CE = DE$ ；

(2) 先通过 $\angle BFA = 2\angle FBC$ 与 $\angle FBC = \angle CAB$ 推导 $\angle BFA = \angle BAH$ ，结合角平分线得 $\angle ABH = \angle GBF$ ，证得 $\triangle BFG \sim \triangle BAH$ ，写出相似比例式，用 $BA = CD$ 代换，变形得到乘积等式.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

23. 对于函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，对称轴与 x 轴交于点 A ，将点 A 向右平移一个单位得到点 B ，使点 C 与点 B 的横坐标相等，且点 C 的纵坐标为 $2a$ ，则称点 C 为抛物线的“派生点”，并且将直线 AC 称为抛物线的“派生直线”.

(1) 已知函数 $y = 2x^2 + 3$ ，求该函数的“派生直线”解析式；

(2) 已知点 C 为某抛物线的“派生点”，点 $P(1, m)$ 和 $Q(7, n)$ 在其“派生直线” $y = 2x - 6$ 上，且点 P 是该抛物线与其“派生直线”的交点，求 $\frac{PC}{CQ}$ 的值，并判断点 Q 是否在抛物线上.

【答案】(1) $y = 4x$

(2) $\frac{PC}{CQ} = 1$ ，点 Q 在抛物线上

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求一次函数解析式；

(2) 先根据点在直线上的性质求出各点坐标，计算线段比，再求出抛物线解析式，代入点坐标验证点是否在抛物线上.

【小问 1 详解】

解：已知函数 $y = 2x^2 + 3$ ，可得 $a = 2$ ， $b = 0$ ，二次函数对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 0$ ，对称轴与 x 轴交点 A 坐标为 $(0, 0)$ ，

将 A 向右平移 1 个单位得到 B ，

B 的横坐标为 $0 + 1 = 1$ ，

根据定义, C 横坐标为 1, 纵坐标为 $2a = 4$. 即 $C(1, 4)$,

设派生直线 AC 解析式为 $y = kx$,

代入 $C(1, 4)$ 得 $k = 4$.

因此该函数的派生直线解析式为 $y = 4x$.

【小问 2 详解】

解: 由题意, A 是派生直线 $y = 2x - 6$ 与 x 轴的交点, A 纵坐标为 0,

将 $y = 0$ 代入 $y = 2x - 6$ 得 $0 = 2x - 6$,

解得 $x = 3$, 因此 $A(3, 0)$,

根据定义, B 横坐标为 $3 + 1 = 4$, 因此 C 横坐标为 4,

将 $x = 4$ 代入 $y = 2x - 6$ 得 $y = 2$.

因此 $C(4, 2)$,

将 $P(1, m)$ 代入 $y = 2x - 6$ 得

$m = -4$, 即 $P(1, -4)$,

将 $Q(7, n)$ 代入 $y = 2x - 6$ 得 $n = 8$, 即 $Q(7, 8)$,

$$\therefore PC = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-4))^2} = 3\sqrt{5}, \quad CQ = \sqrt{(7-4)^2 + (8-2)^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{PC}{CQ} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 1,$$

由定义, 抛物线对称轴为 $x = 3$,

C 纵坐标为 $2a = 2$, 得

$$a = 1,$$

设抛物线解析式为 $y = (x - 3)^2 + k$,

$\therefore P(1, -4)$ 在抛物线上, 代入得 $-4 = (1 - 3)^2 + k$,

解得 $k = -8$,

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = (x - 3)^2 - 8 = x^2 - 6x + 1,$$

$\therefore$ 将 $x = 7$ 代入抛物线解析式得 $y = 7^2 - 6 \times 7 + 1 = 8$, 与 Q 的纵坐标相等,

因此点 Q 在抛物线上.

24. 在半圆 AOQ 中, 点 O 为圆心, 线段 AQ 为直径, B 、 C 是半圆上两点, D 是 AB 上一点, 连接 AB 、 CD 交于点 P , 且 $AB = CD$.

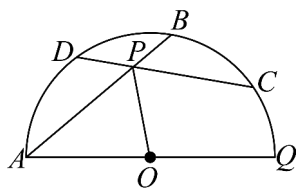


图1

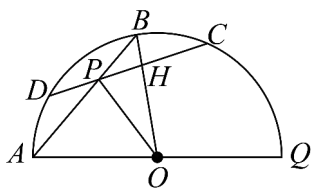


图2

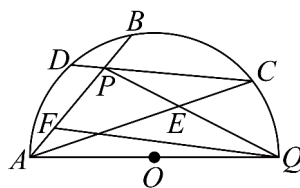


图3

(1) 如图 1, 连接 OP ;

①求证: $\angle APO = \angle CPO$;

②如图 2, 连接 OB 交弦 CD 于点 H , 若 $AQ = 4$, $PB = 1$, $PO = HO$, 求 PH 的长;

(2) 如图 3, 连接 PQ 、 AC 交于点 E , 线段 AP 上有一点 F 使得 $PF = 4AF$, 若 $PE = QE$, $\angle PEA = \angle PFQ$, 求 $\frac{PE}{EA}$ 的值.

【答案】(1) ①证明: 如图, 作 $OG \perp AB$ 于 G , $OZ \perp CD$ 于 Z , 连接 OC ,

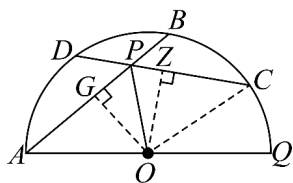


图1

$$\therefore AG = \frac{1}{2} AB, \quad CZ = \frac{1}{2} CD,$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore AG = CZ,$$

$$\because OA = OC, \quad \angle AGO = \angle CZO = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OAG \cong \text{Rt}\triangle OCZ (\text{HL}),$$

$$\therefore OG = OZ,$$

$$\because \angle PGO = \angle PZO = 90^\circ, \quad OP = OP,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OPG \cong \text{Rt}\triangle OPZ (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle APO = \angle CPO;$$

$$\textcircled{2} PH = \frac{3}{4};$$

$$(2) \frac{PQ}{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

【解析】

【分析】(1) ①作 $OG \perp AB$ 于 G , $OZ \perp CD$ 于 Z , 连接 OC , 利用垂径定理结合 $AB = CD$, 得出 $AG = CZ$, 证明 $Rt\triangle OAG \cong Rt\triangle OCZ (HL)$, 得出 $OG = OZ$, 再证明 $Rt\triangle OPG \cong Rt\triangle OPZ (HL)$, 即可求证;

②先证明 $\angle APO = \angle OHP$, 得出 $\angle BPO = \angle BHP$, 可得 $\triangle BPH \sim \triangle BOP$, 则 $\frac{BP}{OB} = \frac{BH}{BP} = \frac{PH}{OP}$, 即可得出 $BH = \frac{1}{2}$, $PH = \frac{1}{2}OP$, 再求出 $OH = OP = \frac{3}{2}$, 即可求解;

(2) 证明 $\triangle FPQ \sim \triangle EPA$, 得出 $\frac{PF}{PE} = \frac{PQ}{AP}$, 设 $PF = 4AF = 4m$, $PE = QE = n$, 可得 $AP = 5m$, $\frac{4m}{n} = \frac{2n}{5m}$, 求出 $n = \sqrt{10}m$, 连接 OP , 交 AC 于点 K , 由 (1) 可得 $AP = CP$, $\angle APO = \angle CPO$, 得出 $OP \perp AC$, 证明 K 为 $\triangle APQ$ 的重心, 得出 $AK = 2EK$, 设 $AK = 2EK = 2k$, 在 $Rt\triangle APK$ 和 $Rt\triangle EPK$ 中, 利用勾股定理列式求出 $k = \sqrt{5}m$, 可得 $AK = 2EK = 2\sqrt{5}m$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: ①略;

② $\because PO = HO$,

$\therefore \angle OPH = \angle OHP$,

由 (1) 可知, $\angle OPC = \angle APO$,

$\therefore \angle APO = \angle OHP$,

$\therefore \angle BPO = 180^\circ - \angle APO$, $\angle BHP = 180^\circ - \angle OHP$,

$\therefore \angle BPO = \angle BHP$,

在 $\triangle BPH$ 和 $\triangle BOP$ 中, $\angle BPO = \angle BHP$, $\angle PBH = \angle OBP$,

$\therefore \triangle BPH \sim \triangle BOP$,

$\therefore \frac{BP}{OB} = \frac{BH}{BP} = \frac{PH}{OP}$,

$\therefore AQ = 4$,

$\therefore OB = 2$,

$\therefore BP = 1$,

$\therefore \frac{BP}{OB} = \frac{1}{2} = \frac{BH}{BP} = \frac{PH}{OP}$,

$\therefore BH = \frac{1}{2}$, $PH = \frac{1}{2}OP$,

$$\therefore OH = OP = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore PH = \frac{3}{4};$$

【小问2详解】

解: $\because \angle PFQ = \angle PEA, \angle FPQ = \angle EPA,$

$$\therefore \triangle FPQ \sim \triangle EPA,$$

$$\therefore \frac{PF}{PE} = \frac{PQ}{AP},$$

$$\because PF = 4AF, PE = QE,$$

设 $PF = 4AF = 4m, PE = QE = n,$

则 $AP = 5m,$

$$\therefore \frac{4m}{n} = \frac{2n}{5m},$$

$$\therefore 20m^2 = 2n^2,$$

$$\therefore n = \sqrt{10}m,$$

连接 OP , 交 AC 于点 K ,

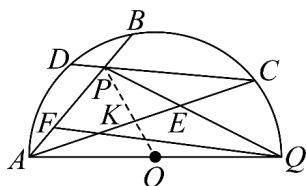


图3

由 (1) ①中 $Rt\triangle OPG \cong Rt\triangle OPZ$ 可得 $PG = PZ$ (图 1),

又 $\because AG = CZ$ (①已证),

$$\therefore AG + PG = PZ + CZ,$$

$$\therefore AP = CP,$$

又 $\because \angle APO = \angle CPO$ (①已证),

$$\therefore OP \perp AC,$$

$$\therefore \angle AKP = \angle CKP = 90^\circ,$$

$\because O$ 为 $\triangle APQ$ 边 AQ 的中点, E 为 $\triangle APQ$ 边 PQ 的中点,

$\therefore K$ 为 $\triangle APQ$ 的重心,

$$\therefore AK = 2EK,$$

$$\text{设 } EK = k, \text{ 则 } AK = 2EK = 2k,$$

$$\because \text{在 } Rt\triangle APK \text{ 和 } Rt\triangle EPK \text{ 中, } PK^2 = AP^2 - AK^2 = PE^2 - EK^2,$$

$$\therefore (5m)^2 - (2k)^2 = (\sqrt{10}m)^2 - k^2,$$

$$\text{化简得 } k = \sqrt{5}m \text{ (负值舍),}$$

$$\therefore AK = 2EK = 2\sqrt{5}m,$$

$$\therefore \frac{PE}{EA} = \frac{PE}{AK + EK} = \frac{\sqrt{10}m}{3\sqrt{5}m} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$