

九年级数学试卷

(完成试卷时间: 100 分钟, 总分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列二次根式中, 不是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{a+b}$ B. $\sqrt{a-b}$ C. $\sqrt{ab}$ D. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

【答案】D

【解析】

【分析】最简二次根式需满足两个条件: 1、被开方数不含分母; 2、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式, 满足两个条件才是最简二次根式, 否则不是, 据此判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{a+b}$, 被开方数是整式, 无开得尽方的因式, 是最简二次根式;

B、 $\sqrt{a-b}$, 被开方数是整式, 无开得尽方的因式, 是最简二次根式;

C、 $\sqrt{ab}$, 被开方数是整式, 无开得尽方的因式, 是最简二次根式;

D、 $\sqrt{\frac{a}{b}}$, 被开方数含有分母, 不满足最简二次根式的条件, 不是最简二次根式.

2. 如果函数 $y = (k+1)x$ 与 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图像有公共点, 那么下列 k 的值中, 满足条件的是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】两个函数图象有公共点, 说明联立两个函数的解析式得到的方程组有非零解, 利用平方的非负性得到 k 的取值范围, 再结合选项判断即可.

【详解】解：∵函数 $y = (k+1)x$ 与 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象有公共点，

$$\therefore \text{联立 } \begin{cases} y = (k+1)x \\ y = \frac{k-1}{x} \end{cases} \text{ 有解, 且 } x \neq 0.$$

$$\text{消去 } y \text{ 得: } (k+1)x = \frac{k-1}{x},$$

$$\text{两边同乘 } x \ (x \neq 0) \text{ 得: } (k+1)x^2 = k-1,$$

$$\text{整理得: } x^2 = \frac{k-1}{k+1},$$

$$\therefore x^2 > 0 \ (x \neq 0),$$

$$\therefore \frac{k-1}{k+1} > 0, \text{ 即分子分母同号.}$$

可得两种情况:

$$\textcircled{1} \begin{cases} k-1 > 0 \\ k+1 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } k > 1;$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} k-1 < 0 \\ k+1 < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } k < -1;$$

结合选项, 只有 $k = 2$ 满足条件.

3. 解方程 $\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2-1} = 2$ 时, 令 $\frac{x^2-1}{x^2} = y$, 那么换元后去分母整理得到的整式方程是 ()

A. $y^2 - 2y - 3 = 0$

B. $y^2 - 2y + 3 = 0$

C. $y^2 + 2y - 3 = 0$

D. $y^2 + 2y + 3 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】将原方程中对应部分用换元后的 y 替换, 再对分式方程去分母整理得到整式方程即可解答.

$$\text{【详解】解: } \therefore \text{ 令 } y = \frac{x^2-1}{x^2}, \text{ 可得 } \frac{3x^2}{x^2-1} = \frac{3}{y}$$

$$\text{将其代入原方程得: } y - \frac{3}{y} = 2$$

$$\text{方程两边同乘 } (y(y \neq 0)) \text{ 去分母得: } y^2 - 3 = 2y,$$

$$\text{移项整理得: } y^2 - 2y - 3 = 0,$$

因此换元后整理得到的整式方程为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

4. 下列信息中, 适合用折线统计图, 而不适合用条形统计图表示是 ()

- A. 上海市 16 个区的人口数
- B. 张爷爷连续 7 天定时测得的体温
- C. 九 (3) 班 36 个学生的体重
- D. 向阳菜市场 15 种蔬菜的价格

【答案】B

【解析】

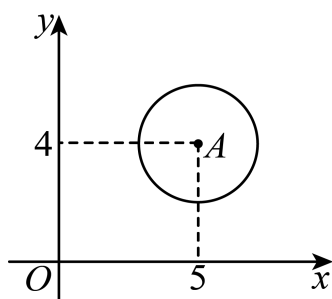
【分析】条形统计图适合表示不同类别的具体数量, 折线统计图适合反映数据的变化趋势, 根据二者用途判断选项即可.

【详解】解: 对于 A 选项: 统计上海市 16 个区的人口数, 只需比较不同区的人口数量, 适合用条形统计图; 对于 B 选项: 统计张爷爷连续 7 天的体温, 需要观察体温随时间的变化趋势, 适合用折线统计图, 不适合条形统计图;

对于 C 选项: 统计 36 名学生的体重, 只需得到不同学生的体重数量, 适合用条形统计图;

对于 D 选项: 统计 15 种蔬菜的价格, 只需比较不同蔬菜的价格, 适合用条形统计图.

5. 如图, 坐标平面内圆 A , 已知圆 A 的半径为 2, 圆心 $A(5, 4)$, 下列直线中, 与圆 A 相交, 且被圆 A 所截得的弦最长的是 ()



- A. $y = x$
- B. $y = -x$
- C. $y = \frac{4}{5}x$
- D. $y = -\frac{5}{4}x$

【答案】C

【解析】

【分析】根据圆中最长的弦是直径, 可得经过圆心的直线被圆所截得的弦最长, 判断选项中哪条直线经过圆心即可.

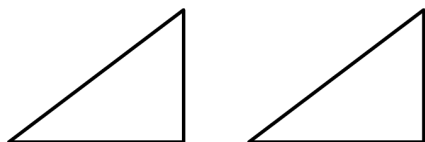
【详解】解: A、在直线 $y = x$ 中, 当 $x = 5$ 时, $y = 5$, $\therefore$ 直线 $y = x$ 不经过圆心 $A(5, 4)$, 故此选项错误;

B、在直线 $y = -x$ 中, 当 $x = 5$ 时, $y = -5$, $\therefore$ 直线 $y = -x$ 不经过圆心 $A(5, 4)$, 故此选项错误;

C、在直线 $y = \frac{4}{5}x$ 中, 当 $x = 5$ 时, $y = 4$, $\therefore$ 直线 $y = \frac{4}{5}x$ 经过圆心 $A(5, 4)$, 故此选项正确;

D、在直线 $y = -\frac{5}{4}x$ 中，当 $x = 5$ 时， $y = -\frac{25}{4}$ ， $\therefore$ 直线 $y = -\frac{5}{4}x$ 不经过圆心 $A(5, 4)$ ，故此选项错误.

6. 如图，现有两个全等三角形，它们的三边长分别为 3、4、5，将它们拼接成一个图形，拼接方式满足：(1) 两个三角形间有一条等长边完全重合；(2) 两个三角形拼接在等长边的两侧，那么共能拼接成形状不同的四边形的种数是 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

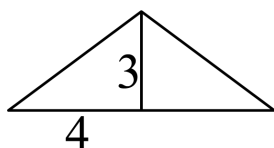
【解析】

【分析】两个全等三角形拼接成四边形，需将一条等长边重合且三角形位于两侧，根据重合边的不同 (3、4、5) 及拼接方式 (对称或交叉) 分类讨论，排除拼成三角形的情况，统计形状不同的四边形种数；

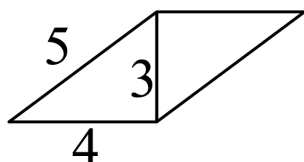
【详解】解： $\because$ 两个三角形全等，三边长分别为 3、4、5，且 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，

$\therefore$ 该三角形为直角三角形，直角边为 3、4，斜边为 5，

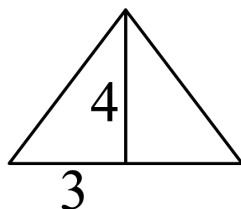
分三种情况讨论重合边：①当长度为 3 的直角边重合时，如图，拼成一个大三角形，不符合题意；



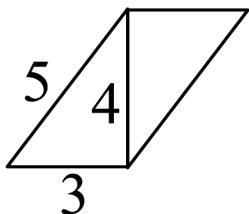
如图，则拼成一个平行四边形，其邻边长分别为 4、5；



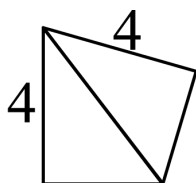
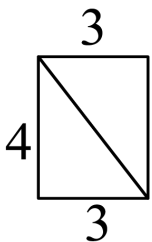
②当长度为 4 的直角边重合时，如图，拼成一个大三角形，不符合题意；



如图，则拼成一个平行四边形，其邻边长分别为 3、5；



③当长度为5的斜边重合时，如图，则拼成一个筝形，其四边长分别为3、4、4、3；如图，则拼成一个矩形，其邻边长分别为3、4；



综上所述，能拼接成形状不同的四边形共有4种.

二、填空题：(本大题共12题，每题4分，满分48分)【各题答案，请填写在答题纸的相应题号位置中.】

7. 因式分解： $\frac{1}{2}x^2 - 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}(x+2)(x-2)$

【解析】

【详解】解： $\frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4) = \frac{1}{2}(x+2)(x-2)$

8. 方程 $x = \sqrt{x+2}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的求法， 把方程两边平方求解， 再检验即可得到答案.

【详解】解： 把方程两边平方得： $x+2 = x^2$,

整理得： $(x-2)(x+1) = 0$,

解得： $x = 2$ 或 $x = -1$,

经检验， $x = 2$ 是原方程的解.

故答案为： $x = 2$.

9. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 3k - 4 = 0$ 有两个相等的实数根， 那么 k 的值是_____.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

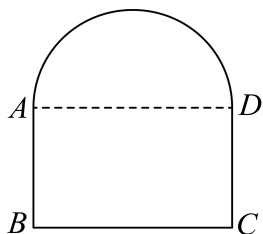
【分析】 根据一元二次方程根的判别式，当方程有两个相等的实数根时，判别式的值为0，据此列方程求解即可.

【详解】 解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + 3k - 4 = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (3k - 4) = 0, \text{ 整理得 } 20 - 12k = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{5}{3}.$$

10. 已知一个平面图形，其下方为一个矩形，上方为一个以矩形一边为直径的半圆（如图所示），设 $AB = a$ ， $AD = b$ ，那么这个平面图形的面积是_____（用 a ， b 的代数式表示）.



【答案】 $ab + \frac{1}{8}\pi b^2$

【解析】

【详解】 解：平面图形的面积 = 矩形的面积 + 半圆的面积 = $ab + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = ab + \frac{1}{8}\pi b^2$

11. 已知直线 $y = \frac{3}{4}x - 6$ 与坐标轴交于 A 、 B 两点，那么线段 AB 的长是_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 先求出 A 、 B 两点的坐标，再根据勾股定理求解即可.

【详解】 解：在直线 $y = \frac{3}{4}x - 6$ 中，

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -6;$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } \frac{3}{4}x - 6 = 0, \text{ 解得 } x = 8;$$

$$\therefore A(0, -6), B(8, 0).$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

12. 等腰三角形两腰上的高所在的直线形成的锐角为 40° ，则该等腰三角形的顶角的度数为_____.

【答案】 140° 或 40°

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质等知识，分两种情形画出图形分别求解即可解决问题.

【详解】 解：①如图 1，当 $\angle BAC$ 是钝角时，

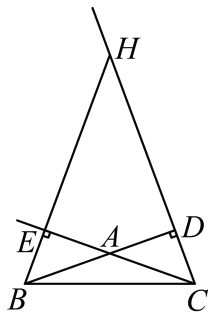


图1

由题意： $AB = AC$ ， $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$ ， $\angle EHD = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle EAD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 140^\circ,$$

②如图 2，当 $\angle A$ 是锐角时，

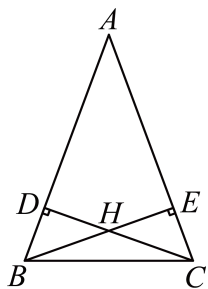


图2

由题意： $AB = AC$ ， $\angle CDA = \angle BEA = 90^\circ$ ， $\angle CHE = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle DHE = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$$

综上，该等腰三角形的底角的度数为 140° 或 40° ，

故答案为： 140° 或 40° .

13. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，那么 $\vec{b} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 表示).

【答案】 $-\frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 根据已知条件得到向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模长关系和方向关系，根据共线向量的性质解答即可.

【详解】 解： $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，

$$\therefore |\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|,$$

∵两个向量方向相反，系数为负，

$$\therefore \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

故答案为 $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

14. 现有 4 张卡片，上面分别标记着 3、4、5、6，从中随机抽取 2 张，将上面标记的两个数分别作为分子和分母，所得分数是最简分数的概率是_____.

【答案】

$$\frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】先列举出所有等可能的结果，再找出符合“所得分数是最简分数”条件的结果数，最后根据概率公式计算概率.

【详解】解：根据题意，从中随机抽取 2 张，将两个数分别作为分子和分母，所有等可能的结果为：

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5}, \text{共 12 种等可能的结果.}$$

$$\text{其中是最简分数的结果为: } \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \text{共 8 种.}$$

$$\text{根据概率公式可得，所得分数是最简分数的概率为 } \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

15. 社区食堂推出一种老年套餐，为了能更精准地备餐，食堂对社区内 800 名老人作调研，从中随机抽取了 50 名，就星期一到星期五的需求量进行了问卷调查，汇总整理得到下列统计表. 根据调研结果，食堂在星期一到星期五总共大约需要备这种老年套餐_____份.

套餐需求量统计表

星期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
数量	12	10	10	12	10

【答案】864

【解析】

【分析】先计算抽取的样本中五天的总需求量，再根据样本容量与总体容量的比例，估算出总体五天的总需求量.

【详解】解：由题意可得，抽取的 50 名老人五天的总需求量为： $12+10+10+12+10=54$ ；

总体容量为 800，样本容量为 50，因此总需求量约为

$$54 \times \frac{800}{50} = 54 \times 16 = 864.$$

16. 已知抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ ，将其向右平移 n 个单位 ($n > 0$)，使平移后所得的抛物线与坐标轴恰好只有两个公共点，那么 n 的值是_____.

【答案】3

【解析】

【分析】根据题意得出原点在平移后的抛物线上，将 $(0, 0)$ 代入平移后的抛物线解析式求解即可；

【详解】解： $y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$ ，

原抛物线判别式 $\Delta = 16 > 0$ ，

令 $x = 0$ 得 $y = 3$ ，

则原抛物线与 y 轴交点为 $(0, 3)$ ，

左右平移不改变抛物线的判别式，因此平移后抛物线始终与 x 轴有 2 个交点，且一定与 y 轴有 1 个交点，

$\therefore$ 平移后所得的抛物线与坐标轴恰好只有两个公共点，平移后的抛物线与 x 轴恒有两个不同交点，与 y 轴恒有一个交点，要使总共只有两个公共点，则必然是其中一个 x 轴交点与 y 轴交点重合于原点，

即原点在平移后的抛物线上，

抛物线向右平移 $n(n > 0)$ 个单位，平移后解析式为： $y = -(x+1-n)^2 + 4$ ，

将 $(0, 0)$ 代入得： $-(1-n)^2 + 4 = 0$ ，

解得： $n = 3$ ($n = -1$ 舍去)，

因此 n 的值为 3.

17. 已知 AB 是圆 O_1 和 O_2 的公共弦，如果弦 AB 是圆 O_1 的内接正方形的一边，也是圆 O_2 的内接正六边形的一边，那么圆 O_1 与 O_2 的半径之比是_____.

【答案】 $\sqrt{2}:2$

【解析】

【分析】设公共弦 $AB = a$ ， $\odot O_1$ 半径为 r_1 ， $\odot O_2$ 半径为 r_2 ，根据 AB 是 $\odot O_1$ 内接正方形的边，得出 $\triangle AO_1B$ 是等腰直角三角形，由勾股定理得 $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，根据 AB 是 $\odot O_2$ 内接正六边形的边，得出

$\triangle AO_2B$ 是等边三角形，则 $r_2 = AB = a$ ，即可求解；

【详解】解：设公共弦 $AB = a$ ， $\odot O_1$ 半径为 r_1 ， $\odot O_2$ 半径为 r_2 ，

$\because AB$ 是 $\odot O_1$ 内接正方形的边，正方形中心角为 $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AO_1B$ 是等腰直角三角形，

由勾股定理得： $AB^2 = r_1^2 + r_1^2$ ，即 $a^2 = 2r_1^2$ ，解得 $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，

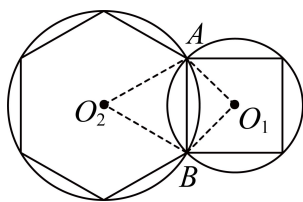
$\because AB$ 是 $\odot O_2$ 内接正六边形的边，正六边形中心角为 $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ，

又 $O_2A = O_2B = r_2$ ，

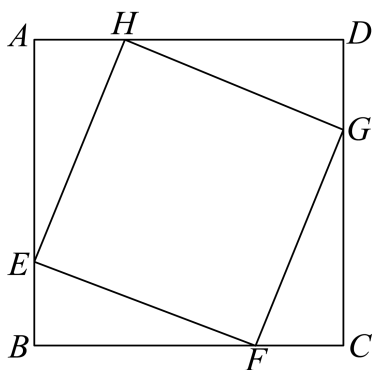
$\therefore \triangle AO_2B$ 是等边三角形，

$\therefore r_2 = AB = a$ ，

$\therefore r_1 : r_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right) : a = \sqrt{2} : 2$ 。



18. 如图，正方形 $EFGH$ 内接于正方形 $ABCD$ ，即点 E 、 F 、 G 、 H 分别在正方形 $ABCD$ 的四边上。请画出点 A 、 B 、 C 、 D 分别关于 HE 、 EF 、 FG 、 GH 的对称点 P 、 Q 、 R 、 S ，如果四边形 $PQRS$ 的面积恰好是正方形 $ABCD$ 面积的一半，那么 $\frac{EF}{AB}$ 的值是_____。



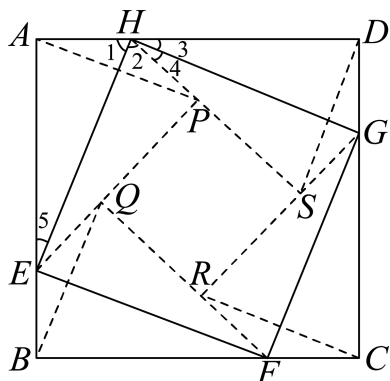
【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】先证明 $\triangle EAH \cong \triangle HDG \cong \triangle GCF \cong \triangle FBE$ ，然后得到点 P 在 SH 上，同理，点 Q, R, S 在

PE, FQ, RG 上, 由对称可设 $S_{\triangle EAH} = S_{\triangle EPH} = S_{\triangle DHG} = S_{\triangle SHG} = S_{\triangle CFG} = S_{\triangle RFG} = S_{\triangle FBE} = S_{\triangle FQE} = m$, 根据 $S_{\text{四边形} PQRS} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形} ABCD}$, 求出 $S_{\text{正方形} ABCD} = 16m$, $S_{\text{四边形} PQRS} = 8m$, 则 $S_{\text{正方形} EFGH} = 4m + 8m = 12m$, 再由正方形 $EFGH \sim$ 正方形 $ABCD$ 求解即可.

【详解】解: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD, EFGH$ 是正方形,

$\therefore \angle BAD = \angle ADC = \angle EHG = 90^\circ, EH = HG$,

$\therefore \angle 3 = \angle 5 = 90^\circ - \angle 1, \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

$\therefore \triangle EAH \cong \triangle HDG$ (AAS),

同理, $\triangle EAH \cong \triangle HDG \cong \triangle GCF \cong \triangle FBE$

由对称可得, $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2(\angle 1 + \angle 3) = 180^\circ$

$\therefore$ 点 P 在 SH 上,

同理, 点 Q, R, S 在 PE, FQ, RG 上,

由对称可设 $S_{\triangle EAH} = S_{\triangle EPH} = S_{\triangle DHG} = S_{\triangle SHG} = S_{\triangle CFG} = S_{\triangle RFG} = S_{\triangle FBE} = S_{\triangle FQE} = m$,

$\therefore S_{\triangle EAH} + S_{\triangle EPH} + S_{\triangle DHG} + S_{\triangle SHG} + S_{\triangle CFG} + S_{\triangle RFG} + S_{\triangle FBE} + S_{\triangle FQE} + S_{\text{四边形} PQRS} = S_{\text{正方形} ABCD}$

$\therefore 8m + S_{\text{四边形} PQRS} = S_{\text{正方形} ABCD}$,

$\therefore S_{\text{四边形} PQRS} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形} ABCD}$

$\therefore S_{\text{正方形} ABCD} = 16m, S_{\text{四边形} PQRS} = 8m$,

$\therefore S_{\text{正方形} EFGH} = 4m + 8m = 12m$,

∵ 正方形 $EFGH \sim$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore \left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{S_{\text{正方形}EFGH}}{S_{\text{正方形}ABCD}} = \frac{12}{16},$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $|2 - \sqrt{3}| + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^0 - \frac{2}{1 - \cot 30^\circ}.$

【答案】

4

【解析】

【分析】根据绝对值的性质, 零次幂, 特殊三角函数值, 依次计算即可.

【详解】解: 原式 $= 2 - \sqrt{3} + 1 - \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3} - \frac{2(1 + \sqrt{3})}{-2} = 3 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 4.$

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】整理后得出 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 解一元二次方程, 再代入①解答即可;

【详解】解:
$$\begin{cases} x + y = 3 \text{ ①} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \text{ ②} \end{cases}$$
, 由分式分母不为 0, 得 $x \neq 0, y \neq 0$,

②可化为: $\frac{x + y}{xy} = \frac{3}{2},$

将①代入, 得 $\frac{3}{xy} = \frac{3}{2}$, 解得: $xy = 2$ ③,

由①得 $y = 3 - x$, 代入③得: $x(3 - x) = 2,$

整理得: $x^2 - 3x + 2 = 0,$

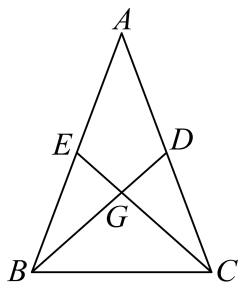
因式分解得 $(x-1)(x-2)=0$,

解得 $x_1=1$ 或 $x_2=2$,

代入①求 y 并检验, $x=1$ 时, $y=2$; $x=2$ 时, $y=1$, 两组解都满足原方程,

因此 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$ 是原方程组的解.

21. 如图, D 、 E 是 $\triangle ABC$ 边 AC 、 AB 上的点, BD 、 CE 交于点 G . 已知 $\frac{DG}{BG} = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{2}$.



(1) 求 $\frac{AD}{AC}$ 的值;

(2) 如果 $AB=AC$, $\angle BCE = \angle A$, 求 $\tan \angle ABC$ 的值.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 如图: 连接 DE , 证明 $\triangle DGE \sim \triangle BGC$ 可得 $\angle GDE = \angle GBC$, $\frac{DE}{BC} = \frac{DG}{BG} = \frac{1}{2}$, 再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 最后利用相似三角形的性质列比例式即可解答;

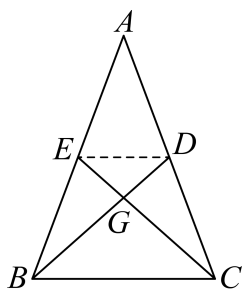
(2) 由 (1) 知 $DE \parallel BC$, 利用平行线分线段成比例以及线段的和差可得 $BE = \frac{1}{2}AB$, 利用等边对等角可得 $\angle ABC = \angle ACB$, 易证 $\triangle BCE \sim \triangle BAC$ 可得 $\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{AB}$, 进而得到 $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$; 如图: 过点 A 作

$AH \perp BC$ 于点 H . 利用等腰三角形三线合一的性质、勾股定理进而得 $BH = \frac{\sqrt{2}}{4}AB$ 、 $AH = \frac{\sqrt{14}}{4}AB$,

最后根据正切的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图: 连接 DE ,



$$\therefore \frac{DG}{BG} = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{2}, \quad \angle DGE = \angle BGC,$$

$$\therefore \triangle DGE \sim \triangle BGC,$$

$$\therefore \angle GDE = \angle GBC, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{DG}{BG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}.$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 知 $DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BE = AB - AE = \frac{1}{2} AB.$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

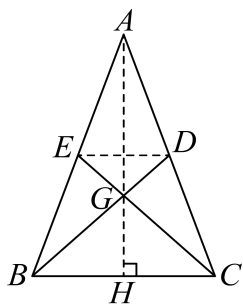
在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACB$ 中, $\angle BCE = \angle A, \angle CBE = \angle ACB$,

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle BAC.$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore BC^2 = AB \cdot BE = AB \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB^2, \quad \text{即 } BC = \frac{\sqrt{2}}{2} AB,$$

如图：过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H .



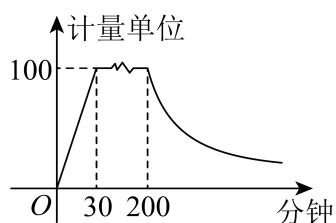
$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{4}AB,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}AB\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}AB,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4}AB}{\frac{\sqrt{2}}{4}AB} = \sqrt{7}.$$

22. 下图是通过实验测得的一种抗过敏药物服用后, 随时间的变化其有效成分含量在人体血液中的变化情况, 在最初 30 分钟含量会直线上升, 然后在 30 分钟至 200 分钟间稳定在饱和状态, 人体血液中含量恒为 100 个计量单位, 之后就会逐步下降, 下降过程中人体血液中有有效成分含量 y 个计量单位与时间 x 分钟之间大致符合函数 $y = \frac{k \times 10^6}{x^2}$ ($1 \leq k < 10$, k 为常数).



(1) 求 k 的值;

(2) 如果这种抗过敏药物在人体血液中的含量低于 40 个计量单位时, 就会失去抗过敏的效果, 那么这种抗过敏药物隔多少时间需服用一次 (结果精确到 1 小时). (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.163$)

【答案】 (1) $k = 4$

(2) 这种抗过敏药物约隔 5 小时需服用一次

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 根据 (1) 所求求出 $y = 40$ 时, x 的值即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, $100 = \frac{k \times 10^6}{200^2}$,

$$\therefore k = 4;$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得 $y = \frac{4 \times 10^6}{x^2}$,

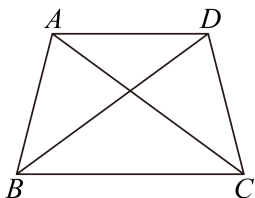
在 $y = \frac{4 \times 10^6}{x^2}$ 中, 当 $y = 40$ 时, $40 = \frac{4 \times 10^6}{x^2}$,

解得 $x = 100\sqrt{10} \approx 316.3$ 或 $x = -100\sqrt{10} \approx -316.3$ (舍去),

$$316.3 \div 60 \approx 5 \text{ 小时},$$

答: 这种抗过敏药物约隔 5 小时需服用一次.

23. 学校新建了一个录播教室, 为了适应不同教学场景的需要, 学校定制了一批新的课桌, 要求这批课桌的桌面是等腰梯形的. 这天数学老师带领八年级同学到录播教室开展数学探究活动, 探究内容就是如何验证这批课桌的桌面是不是等腰梯形的. 老师给同学们的探究工具是带刻度的直尺 (可以精确量出给定两点的距离) 和记号笔.



(1) 雏鹰小组给出了他们的验证方案, 如下: 先依次标记四边形桌面的顶点为 A 、 B 、 C 、 D , 接着测量 AC 与 BD 的长, 如果 $AC \neq BD$, 那么桌面不是等腰梯形; 如果 $AC = BD$, 再继续测量 AB 、 CD 、 AD 与 BC 的长, 如果 $AB = CD$, $AD \neq BC$ 或者 $AB \neq CD$, $AD = BC$, 那么桌面是等腰梯形, 不然, 桌面就不是等腰梯形.

其他小组讨论了雏鹰小组给出的验证方案, 一致认为这个方案是可行的. 如果按雏鹰小组的验证方案, 他们小组验证的结果为桌面确实是等腰梯形, 就请你来说明一下理由 (结合图示, 写出已知、求证, 并加以证明);

(2) 请再设计一个验证方案, 并说明验证的步骤.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 设 AC , BD 交于点 O , 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SSS), $\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (SSS), 得到 $\angle ACB = \angle DBC$, $\angle ADB = \angle DAC$; 进一步可证明 $\angle ACB = \angle DAC$, 得到 $AD \parallel BC$, 据此可证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

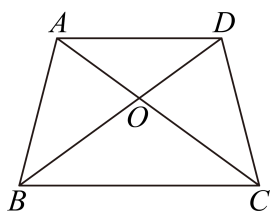
(2) 在 BC 上取 $BE = AD$, 连接 DE , 测量 AB , DE , DC 的长, 若 $AB = DE = DC$, 则可证明四边形 $ABED$ 是平行四边形, 得到 $AD = BE < BC$, $AD \parallel BC$, 则可证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

【小问 1 详解】

解: 已知: $AC = BD$, $AB = CD$, $AD \neq BC$,

求证: 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

证明如下: 如图所示, 设 AC , BD 交于点 O ,



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中,

$$\begin{cases} AB = DC \\ AC = DB, \\ BC = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DBC;$$

同理可证明 $\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (SSS),

$$\therefore \angle ADB = \angle DAC;$$

$$\because \angle ACB + \angle DBC + \angle BOC = 180^\circ = \angle ADB + \angle DAC + \angle AOD,$$

$$\angle AOD = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle DBC = \angle ADB + \angle DAC,$$

$$\therefore 2\angle ACB = 2\angle DAC, \text{ 即 } \angle ACB = \angle DAC,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

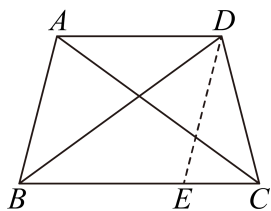
又 $\because AD \neq BC$, $AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

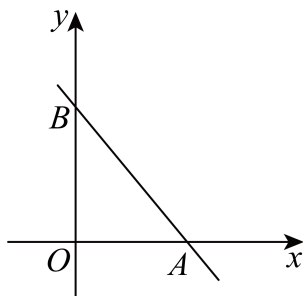
【小问 2 详解】

解: 如图所示, 测量出 AD 的长, 在 BC 上取 $BE = AD$, 连接 DE , 测量 AB , DE , DC 的长, 若

$AB = DE = DC$ ，那么四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，若不满足 $AB = DE = DC$ ，则四边形 $ABCD$ 不是等腰梯形.



24. 如图，直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B . 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A 、 B .



(1) 下列表述中，正确的是 ()

- A. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴在点 A 的右边还有一个公共点，那么 $a > 0$ ；
- B. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴在点 A 的右边还有一个公共点，那么 $a < 0$ ；
- C. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴在点 A 的左边还有一个公共点，那么 $a > 0$ ；
- D. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴在点 A 的左边还有一个公共点，那么 $a < 0$ 。

(2) 记抛物线与 x 轴异于 A 的公共点为 C ，抛物线的顶点为 D .

- ①当点 C 到 A 、 B 两点的距离相等时，求抛物线的表达式；
- ②如果点 D 关于 x 轴的对称点恰好在直线 AB 上，求点 C 的坐标.

【答案】 (1) A (2) ① $y = -\frac{8}{7}x^2 + \frac{44}{21}x + 4$ ；② $(1, 0)$.

【解析】

【分析】 (1) 先确定 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 4)$ ，易得抛物线的常数项为 4. 抛物线与 x 轴的一个交点是 $A(3, 0)$ ，设另一个交点为 $(x_1, 0)$ ，利用根与系数的关系可得 $3x_1 = \frac{c}{a} = \frac{4}{a}$ ，即 $x_1 = \frac{4}{3a}$. 然后分别利用二次函数图像的性质逐项判断即可；

(2) ①设 $C(x, 0)$ ，由 $CA = CB$ ，即 $\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{x^2 + 4^2}$ ，解得： $x = -\frac{7}{6}$ ，即 $C(-\frac{7}{6}, 0)$. 然后结合

点 A 、 B 的坐标运用待定系数法求解即可. ②设抛物线与 x 轴的交点为 $A(3,0)$ 和 $C(x_1,0)$, 则抛物线的对

称轴为 $x = \frac{3+x_1}{2}$, 顶点 D 的横坐标为 $\frac{3+x_1}{2}$. 进而得到顶点坐标为 $\left(\frac{3+x_1}{2}, -\frac{(x_1-3)^2}{3x_1}\right)$, 其关于 x 轴的

对称点为 $\left(\frac{3+x_1}{2}, \frac{(x_1-3)^2}{3x_1}\right)$, 再代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$, 求得 x_1 即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B

$\therefore A(3,0)$, $B(0,4)$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(3,0)$ 和 $B(0,4)$, 因此:

当 $x=0$ 时, $y=c=4$, 即抛物线的常数项为 4.

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + 4$

由抛物线与 x 轴的一个交点是 $A(3,0)$, 设另一个交点为 $(x_1,0)$,

利用根与系数的关系可得: $3x_1 = \frac{c}{a} = \frac{4}{a}$, 即 $x_1 = \frac{4}{3a}$.

A. 若另一交点在 A 的右边 ($x_1 > 3$), 则 $\frac{4}{3a} > 3$. 若 $a > 0$, 可解得 $0 < a < \frac{4}{9}$; 若 $a < 0$, 此时, 不等式 $\frac{4}{3a} > 3$

无解; 故 $a > 0$ 符合题意;

B. 由 A 选项分析可知选项 B 错误;

C. 若另一交点在 A 的左边 ($x_1 < 3$), 当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上, $x_1 = \frac{4}{3a} < 3$, 解得: $a > \frac{4}{9}$; 若 $a < 0$,

则 $x_1 < 0$, 即小于 3; 但 $a < 0$ 时, $x_1 = \frac{4}{3a} < 0 < 3$, 也满足在 A 左边, 故不能推出 $a > 0$, 即选项 C 错误;

D. 由 C 选项分析可知选项 D 错误;

【小问 2 详解】

解: ① 设 $C(x,0)$, 由 $CA = CB$, 即 $\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{x^2 + 4^2}$,

$\therefore (x-3)^2 = x^2 + 4^2$, 解得: $x = -\frac{7}{6}$,

$\therefore C\left(-\frac{7}{6}, 0\right)$.

抛物线过 $A(3,0)$, $B(0,4)$, $C\left(-\frac{7}{6}, 0\right)$,

设 $y = a(x-3)\left(x+\frac{7}{6}\right)$, 代入 $B(0,4)$ 得:

$$4 = a(0-3)\left(0+\frac{7}{6}\right), \text{ 解得: } a = -\frac{8}{7}.$$

$$\therefore \text{ 抛物线表达式为: } y = -\frac{8}{7}(x-3)\left(x+\frac{7}{6}\right) = -\frac{8}{7}x^2 + \frac{44}{21}x + 4, \text{ 即 } y = -\frac{8}{7}x^2 + \frac{44}{21}x + 4;$$

② 设抛物线与 x 轴的交点为 $A(3,0)$ 和 $C(x_1,0)$, 则抛物线的对称轴为 $x = \frac{3+x_1}{2}$, 顶点 D 的横坐标为 $\frac{3+x_1}{2}$.

设抛物线为 $y = a_1(x-3)(x-x_1)$, 代入 $B(0,4)$ 得:

$$4 = a_1(0-3)(0-x_1), \text{ 解得: } a_1 = \frac{4}{3x_1},$$

$$\therefore y_D = a_1\left(\frac{3+x_1}{2}-3\right)\left(\frac{3+x_1}{2}-x_1\right) = a_1\left(\frac{x_1-3}{2}\right)\left(\frac{3-x_1}{2}\right) = -\frac{4}{3x_1} \cdot \frac{(x_1-3)^2}{4} = -\frac{(x_1-3)^2}{3x_1},$$

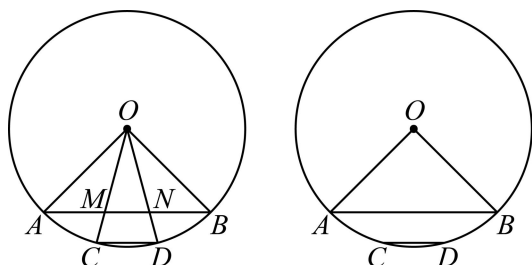
$$\therefore \text{ 抛物线的顶点坐标为 } \left(\frac{3+x_1}{2}, -\frac{(x_1-3)^2}{3x_1}\right),$$

$$\text{点 } D \text{ 关于 } x \text{ 轴的对称点为 } \left(\frac{3+x_1}{2}, \frac{(x_1-3)^2}{3x_1}\right), \text{ 该点在直线 } AB: y = -\frac{4}{3}x + 4 \text{ 上,}$$

$$\therefore \frac{(x_1-3)^2}{3x_1} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3+x_1}{2} + 4, \text{ 解得 } x_1 = 3 \text{ (与 } A \text{ 重合, 舍去) 或 } x_1 = 1,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(1,0)$.

25. 如图, 圆心 O 是一处激光光源, 照射在圆 O 的弦 AB 所在的挡板上, 且 $\angle AOB = 90^\circ$, 现在弦 AB 上两个位置 M 、 N 处开缝, 使激光束透过这两个缝隙最终照射在弧 AB 上的两个亮点 C 、 D 恰好能将弧 AB 三等分.



备用图

(1) 求证: $CD \parallel AB$;

(2) 试说明: 点 M 、 N 不是弦 AB 的两个三等分点;

(3) 假设弦 AB 上的开缝位置 P 、 Q 恰好是弦 AB 的两个三等分点，试画出新的激光光源 S 的位置，使得激光束通过缝隙 P 、 Q 后最终照射在弧 AB 上的两个亮点恰好是 C 、 D ，并求 $\angle ASB$ 的大小。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 30°

【解析】

【分析】(1) 先说明 $\angle AOC = \angle COD = \angle BOD$ ，如图：取 AB 的中点 E ，连接 OE ，进而说明 OE 平分 $\angle COD$ ，利用等腰三角形的性质可得 $OE \perp CD$ ，最后根据垂直于同一条直线的两直线平行即可证明结论；

(2) 先根据已知条件说明 $\angle ABO = \angle OAB = 45^\circ$ ，如图：过点 M 作 $MF \perp OB$ 于点 F ，过点 M 作 $MI \perp AO$ 于点 I ，则四边形 $MIOF$ 是矩形， $MF = BF$ ， $OF = IA$ ， $\angle FMB = 45^\circ$ ， $\angle OMF = 30^\circ$ ，进而得到 $OM = 2OF$ ；设 $OF = a$ ，则 $OM = 2a$ ， $IA = IM = a$ ，利用等腰直角三角形的性质以及勾股定理可得 $MB = \sqrt{6}a$ ， $AM = \sqrt{2}a$ ，则 $AB = (\sqrt{2} + \sqrt{6})a$ ，易得 $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \neq \frac{1}{3}$ ，即点 M 不是 AB 的三等分点；

同理：点 N 不是 AB 的三等分点，从而证明结论；

(3) 如图：连接 AC, CD, BD ，运用等腰三角形的性质以及相关已知条件可得 $\angle ACM = \angle AMC = 75^\circ$ ，即 $AC = CM$ ；设 $AC = CD = BD = 2b$ ，则 $AM = NB = 2b$ ，利用 $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ 可得 $AB = 2(\sqrt{3}+1)b$ ；

如图：取 AB 的中点 E ，则 $OE \perp AB$ ，易得 $OE = (\sqrt{3}+1)b$ ， $\angle MOE = 15^\circ$ ， $ME = (\sqrt{3}-1)b$ ；如图：

连接 CP, DP 并延长交于 S ，由对称性可知点 S 在 AB 的垂直平分线上，同时也在 CD 的垂直平分线上，连

接 SO 延长交 AB, CD 于 G, H ，然后求得 $AP = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3}b$ ， $PG = \frac{\sqrt{3}+1}{3}b$ ；连接 AC ，过 C 作 $CI \perp AP$ ，

则 $AC = 2b$ ， $\angle CAI = 30^\circ$ ， $HG = CI = b$ ，设 $SG = h$ ，则 $SH = h+b$ ，证明 $\triangle SPG \sim \triangle SCH$ ，可求得

$h = \frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}b$ ，利用三角函数可得 $\tan \angle ASG = 2 - \sqrt{3}$ ，即 $\angle ASG = 15^\circ$ ，进而完成解答。

【小问 1 详解】

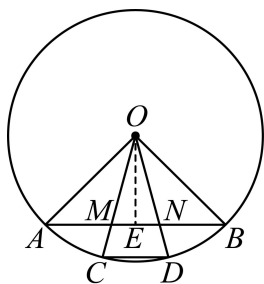
证明：

$\because$ 点 C, D 恰好将 $\widehat{AB}$ 三等分，

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ ，

$\therefore \angle AOC = \angle COD = \angle BOD$ ，

如图：取 AB 的中点 E ，连接 OE ，



$$\because OA = OB,$$

$$\therefore OE \perp AB, \quad \angle AOE = \angle BOE,$$

$$\because \angle AOC = \angle BOD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE - \angle AOC = \angle BOE - \angle BOD,$$

$$\therefore \angle COE = \angle DOE$$

$$\therefore OE \text{ 平分 } \angle COD.$$

在 $\triangle COD$ 中, $OC = OD$, OE 平分 $\angle COD$.

$$\therefore OE \perp CD.$$

$$\because OE \perp AB, \quad OE \perp CD$$

$$\therefore CD \parallel AB;$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得: $\angle AOC = \angle COD = \angle BOD$,

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 60^\circ,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ, \quad OA = OB,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle OAB = 45^\circ,$$

$\because$ 点 C 、 D 恰好将 $\widehat{AB}$ 三等分,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}, \quad AC = CD = BD,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle COD = \angle BOD = 30^\circ,$$

$$\because OA = OC = OD,$$

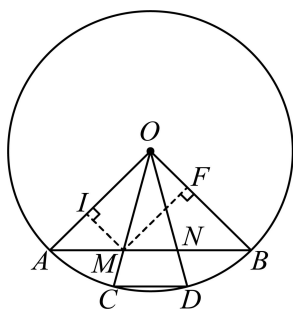
$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = \angle OCD = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OMN = \angle OCD = 75^\circ, \text{ 同理可得: } \angle ONM = \angle ODC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle OMN = \angle ONM = 75^\circ,$$

如图：过点 M 作 $MF \perp OB$ 于点 F ，过点 M 作 $MI \perp AO$ 于点 I ，则四边形 $MIOF$ 是矩形， $MF = BF$ ， $OF = IA$ ， $\angle FMB = 45^\circ$ ，



$$\because \angle OMF = \angle OMN - \angle FMB = 30^\circ,$$

$$\therefore OM = 2OF,$$

设 $OF = a$ ，则 $OM = 2a$ ， $IA = IM = a$

$$\therefore BF = MF = \sqrt{OM^2 - OF^2} = \sqrt{3}a, \quad AM = \sqrt{AI^2 + MI^2} = \sqrt{2}a$$

$$\therefore MB = \sqrt{BF^2 + MF^2} = \sqrt{6}a,$$

$$\therefore AB = AM + MB = (\sqrt{2} + \sqrt{6})a,$$

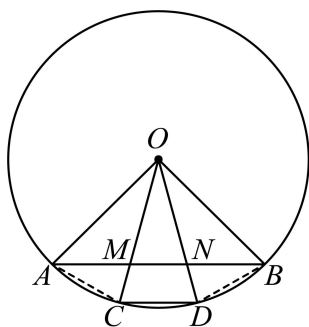
$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{2}a}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})a} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \neq \frac{1}{3}, \text{ 即点 } M \text{ 不是 } AB \text{ 的三等分点,}$$

同理：点 N 不是 AB 的三等分点，

$\therefore$ 点 M 、 N 不是弦 AB 的两个三等分点.

【小问3详解】

解：如图：连接 AC, CD, BD ，



$\because$ 点 C 、 D 恰好将 $\widehat{AB}$ 三等分，

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}, \quad AC = CD = BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle COD = \angle BOD = 30^\circ,$$

$$\because OA = OC = OD,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = \angle OCD = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OMN = \angle OCD = 75^\circ, \text{ 同理可得: } \angle ONM = \angle ODC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle OMN = \angle ONM = 75^\circ,$$

$$\therefore OM = ON,$$

$$\because \angle OMN = \angle AMC = 75^\circ$$

$$\therefore \angle ACM = \angle AMC = 75^\circ$$

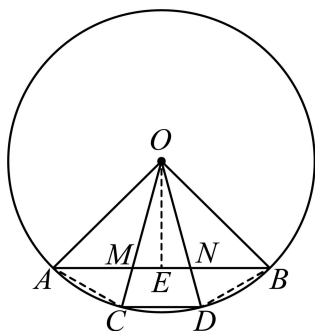
$$\therefore AC = CM,$$

设 $AC = CD = BD = 2b$, 则 $AM = NB = 2b$,

$$\text{由 (2) 解答过程可知: } \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}+1},$$

$$\therefore \frac{2b}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}, \text{ 解得: } AB = 2(\sqrt{3}+1)b,$$

如图: 取 AB 的中点 E , 则 $OE \perp AB$,



$$\because OA = OB, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB = EA = EB = (\sqrt{3}+1)b, \angle MOE = \frac{1}{2} \angle COD = 15^\circ,$$

$$\therefore ME = AE - AM = (\sqrt{3}+1)b - 2b = (\sqrt{3}-1)b,$$

$$\therefore \tan \angle MOE = \tan 15^\circ = \frac{ME}{OE} = \frac{(\sqrt{3}-1)b}{(\sqrt{3}+1)b} = 2 - \sqrt{3}, \text{ 即 } \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3};$$

如图: 连接 CP, DP 并延长交于 S , 由对称性可知点 S 在 AB 的垂直平分线上, 同时也在 CD 的垂直平分线上, 连接 SO 延长交 AB, CD 于 G, H ,

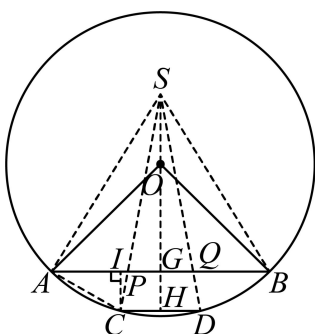
$$\therefore AG = \frac{1}{2}AB = (\sqrt{3}+1)b, \quad CH = \frac{1}{2}CD = b, \quad \angle ASB = 2\angle ASG$$

$$\because P、Q \text{ 恰好是弦 } AB \text{ 的两个三等分点}, \quad AB = 2(\sqrt{3}+1)b,$$

$$\therefore AP = \frac{1}{3}AB = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3}b,$$

$$\therefore PG = AG - AP = (\sqrt{3}+1)b - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3}b = \frac{\sqrt{3}+1}{3}b,$$

如图：连接 AC ，过 C 作 $CI \perp AP$ ，则 $AC = 2b, \angle CAI = \angle OAC - \angle OAB = 30^\circ$ ， $HG = IC$



$$\therefore HG = CI = \frac{1}{2}AC = b,$$

设 $SG = h$ ，则 $SH = h + b$ ，

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle SPG \sim \triangle SCH,$$

$$\therefore \frac{SG}{SH} = \frac{PG}{CH}, \quad \text{即} \quad \frac{h}{h+b} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{3}b}{b}, \quad \text{解得: } h = \frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}b,$$

$$\therefore SG = \frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}b,$$

$$\therefore \tan \angle ASG = \frac{AG}{SG} = \frac{(\sqrt{3}+1)b}{\frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}b} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\because \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ASG = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ASB = 2\angle ASG = 30^\circ.$$