

数学练习

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 函数 $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$ 的定义域是 ()

- A. $x=1$ B. $x=2$ C. $x \neq 1$ D. $x \neq 2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据分式的性质, 分母不能为 0, 据此计算得到 x 的取值范围即可选出正确答案.

【详解】 解: $\because$ 函数 $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$ 中 $\frac{1-x}{x-2}$ 是分式, 分式的分母不能为 0,

$\therefore x-2 \neq 0$,

解得 $x \neq 2$,

因此函数的定义域为 $x \neq 2$.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $2x \cdot 3x = 6x^2$ B. $x + x = x^2$
- C. $(-x)^3 \div (-x)^2 = x$ D. $\left(-\frac{1}{x}\right)^{-2} = -x^2$

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用单项式乘法法则、合并同类项法则、同底数幂除法法则、负整数指数幂运算法则, 对各选项逐一计算判断, 即可得到正确结果.

【详解】 解: A、 $2x \cdot 3x = 6x^2$, 选项计算正确, 符合题意;

B、 $x + x = 2x \neq x^2$, 选项计算错误, 不符合题意;

C、 $(-x)^3 \div (-x)^2 = -x^3 \div x^2 = -x \neq x$ ，选项计算错误，不符合题意；

D、 $\left(-\frac{1}{x}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2 \neq -x^2$ ，选项计算错误，不符合题意.

3. 当 a 是任意有理数时，下列代数式的值一定为正数的是 ()

- A. a^2 B. $a^2 + a$ C. $a^2 + a + \frac{1}{5}$ D. $a^2 + a + 1$

【答案】 D

【解析】

【分析】 利用平方数的非负性，通过举反例和配方变形，逐个判断各选项是否满足代数式的值一定为正数即可.

【详解】 解： A、当 $a = 0$ 时， $a^2 = 0$ ，0 不是正数，故 A 选项不符合题意；

B、当 $a = 0$ 时， $a^2 + a = 0$ ，0 不是正数，故 B 选项不符合题意；

C、 $a^2 + a + \frac{1}{5} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}$ ，当 $a = -\frac{1}{2}$ 时， $a^2 + a + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20} < 0$ ，故 C 选项不符合题意；

D、 $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ ， $\because \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ ， $\therefore \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ，即代数式的值一定为正数，故 D 选项符合题意.

4. 已知一组数据： x_1 ， x_2 ， x_3 ，它们的平均数是 3，方差是 2，那么数据 $2x_1$ ， $2x_2$ ， $2x_3$ 的平均数与方差分别是 ()

- A. 3， 2 B. 6， 8 C. 3， 4 D. 6， 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据平均数和方差的公式计算即可得出结果.

【详解】 解： $\because$ 一组数据： x_1 ， x_2 ， x_3 ，它们的平均数是 3，方差是 2，

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 3, \quad s^2 = \frac{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2}{3} = 2,$$

$$\therefore \text{数据 } 2x_1, 2x_2, 2x_3 \text{ 的平均数为: } \frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3}{3} = \frac{2(x_1 + x_2 + x_3)}{3} = 2 \times 3 = 6,$$

数据 $2x_1$ ， $2x_2$ ， $2x_3$ 的方差为：

$$\frac{(2x_1-6)^2+(2x_2-6)^2+(2x_3-6)^2}{3} = \frac{[2(x_1-3)]^2+[2(x_2-3)]^2+[2(x_3-3)]^2}{3} = \frac{4[(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3-3)^2]}{3} = 4 \times 2 = 8.$$

5. 直角坐标平面上有一点 $A(a, b)$ ，其中 $ab \neq 0$ ，先将点 A 沿着直线 $y = x$ 翻折，得到点 B ，再将点 B 绕着原点逆时针旋转 90° 后得到点 C ，那么点 C 与点 A 的位置关系是 ()

- A. 关于 x 轴对称
B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称
D. 关于直线 $y = -x$ 对称

【答案】B

【解析】

【分析】先根据轴对称的坐标变换规律得到点 B 的坐标，再根据绕原点逆时针旋转 90° 的坐标变换规律得到点 C 的坐标，最后对比点 A 和点 C 的坐标，判断二者位置关系.

【详解】解： $\because$ 点 $A(a, b)$ 沿直线 $y = x$ 翻折得到点 B ，点关于 $y = x$ 对称时横纵坐标互换，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (b, a) .

$\because$ 平面内任意点 (x, y) 绕原点逆时针旋转 90° 后，所得点的坐标为 $(-y, x)$ ，

$\therefore$ 将 $B(b, a)$ 代入得，点 C 的坐标为 $(-a, b)$.

$\because$ 点 $A(a, b)$ 与点 $C(-a, b)$ 纵坐标相等，横坐标互为相反数，

$\therefore$ 点 A 与点 C 关于 y 轴对称.

6. 从四边形两条对角线的交点分别向四条边所在的直线作垂线，顺次连接四个垂足，如果我们把此时所得的四边形叫做原四边形的垂足四边形，那么下列说法正确的是 ()

- A. 等腰梯形的垂足四边形是等腰梯形
B. 矩形的垂足四边形是矩形
C. 平行四边形的垂足四边形是平行四边形
D. 菱形的垂足四边形是菱形

【答案】C

【解析】

【分析】对于等腰梯形、矩形、平行四边形和菱形，分别分析它们的对角线性质，再根据垂足四边形的定义判断其形状.

【详解】解：A、等腰梯形的对角线相等，但不一定互相垂直，当等腰梯形的对角线不互相垂直时，从对角线交点向四条边所在直线作垂线，顺次连接四个垂足得到的四边形不一定是等腰梯形，故 A 选项错误，不符合题意；

B、矩形的对角线相等且互相平分，但不一定互相垂直，当矩形的对角线不互相垂直时，从对角线交点向四条边所在直线作垂线，顺次连接四个垂足得到的四边形不一定是矩形，故 B 选项错误，不符合题意；

C、平行四边形的对角线互相平分，且是中心对称图形，对角线的交点是对称中心，从对角线交点向四条边所在直线作垂线，两组对边的垂足分别关于对称中心对称，故顺次连接四个垂足得到的四边形的对角线互相平分，则顺次连接四个垂足得到的四边形是平行四边形，故 C 选项正确，符合题意；

D、菱形的对角线垂直且互相平分，但不一定相等，当菱形的对角线不相等时，从对角线交点向四条边所在直线作垂线，顺次连接四个垂足得到的四边形不一定是菱形，故 D 选项错误，不符合题意。

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算： $(-1)^0 =$ _____.

【答案】

1

【解析】

【详解】 $(-1)^0 = 1$.

8. 分解因式： $a^2 - b^2 =$ _____.

【答案】 $(a+b)(a-b)$

【解析】

【分析】利用平方差公式直接分解即可求得答案.

【详解】解： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

故答案为 $(a+b)(a-b)$.

9. 已知正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 图像经过点 $(-1, 2)$ ，那么当自变量 x 的值增大时， y 的值随之_____。(填“增大”或“减小”)

【答案】减小

【解析】

【分析】本题考查正比例函数的性质. 将已知点的坐标代入正比例函数解析式求出 k 的值，根据 k 的符号判断函数的增减性即可得到结论.

【详解】解：把 $(-1, 2)$ 代入 $y = kx$,

可得 $2 = -k$,

解得 $k = -2 < 0$,

根据正比例函数的性质，当 $k < 0$ 时，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小.

10. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x - k = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{4}$ -0.25

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式的意义，根据题意得出 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，解方程，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x - k = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4k = 0,$$

$$\text{解得: } k = -\frac{1}{4},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{4}.$$

11. 方程 $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 首先根据二次根式有意义的条件，判定 x 的取值范围，然后方程两边同时平方，解一元二次方程即可得解.

【详解】 根据题意，得

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x \geq 1$$

$$\text{将方程两边平方，得 } (x-1)(x+1) = 0$$

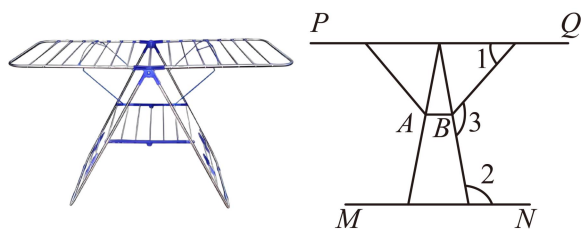
$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$\text{综上， } x = 1$$

【点睛】 此题主要考查二次根式有意义的条件以及一元二次方程的求解，熟练掌握，即可解题.

12. 我们知道，晾衣架中存在多组平行关系，现将其侧面抽象成几何图形 (如图所示)，已知 $AB \parallel MN \parallel PQ$ ，

如果 $\angle 2 = 100^\circ$ ， $\angle 3 = 130^\circ$ ，那么 $\angle 1 =$ _____ $^\circ$.

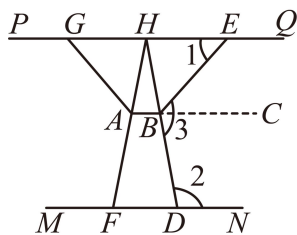


【答案】 50

【解析】

【分析】延长 AB 到点 C ，由 $AB \parallel MN$ ，得到 $\angle CBD = 180^\circ - \angle 2 = 80^\circ$ ，进而求出 $\angle CBE = \angle 3 - \angle CBD = 50^\circ$ ，再根据 $AB \parallel PQ$ 得到 $\angle 1 = \angle CBE = 50^\circ$ 。

【详解】解：如图，延长 AB 到点 C ，



$\because AB \parallel MN$,

$\therefore \angle 2 + \angle CBD = 180^\circ$,

$\because \angle 2 = 100^\circ$,

$\therefore \angle CBD = 180^\circ - \angle 2 = 80^\circ$,

$\therefore \angle CBE = \angle 3 - \angle CBD = 130^\circ - 80^\circ = 50^\circ$,

$\because AB \parallel PQ$,

$\therefore \angle 1 = \angle CBE = 50^\circ$,

故答案为：50。

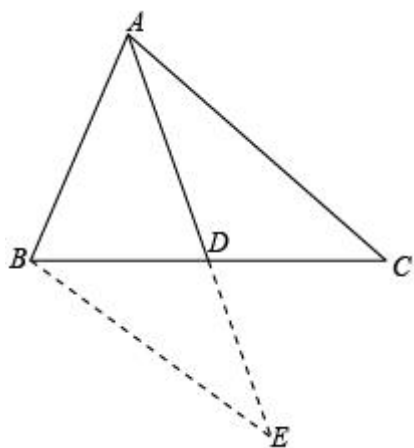
13. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 BC 的中点， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AD} =$ _____。（用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）

【答案】 $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

【解析】

【分析】延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE 。首先证明 $AC = BE$ ， $AC \parallel BE$ ，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AE}$ 即可解决问题；

【详解】解：延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE 。



$\because AD = DE, \angle ADC = \angle BDE, CD = DB,$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB,$

$\therefore AC = BE, \angle C = \angle EBD,$

$\therefore BE \parallel AC,$

$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} = \vec{b},$

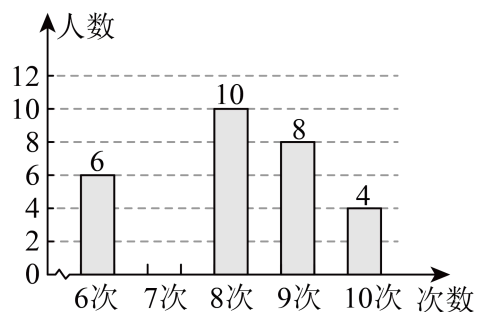
$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \vec{b},$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$

故答案为: $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$

【点睛】本题考查平面向量、全等三角形的判定和性质、平行线的判定、三角形法则等知识，解题的关键是学会倍长中线，构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型。

14. 为提高学生身体素质，体育课开设了“引体向上”项目. 现从某年级随机抽取了部分男生进行测试，绘制出不完整的统计图（如图所示），在本次调查获取的样本数据中，“引体向上”完成次数最少为6次，最多为10次，且次数在10次的学生数占总人数的10%，那么本次调查样本的中位数为_____次.



【答案】8

【解析】

【分析】先得出本次调查的总人数，然后根据中位数的定义进行求解即可.

【详解】解：由条形统计图可知：本次调查抽取的总人数为 $4 \div 10\% = 40$ （人），

$\therefore$ 完成“引体向上”的次数为 7 的有 $40 - 6 - 10 - 8 - 4 = 12$ （人），

根据中位数的定义可知：本次调查样本中中位数为第 20 和第 21 个数据之和的平均数，由 $6 + 12 = 18$ 可知中位数落在 8 次。

15. 某十人小队进行一项抽奖活动，共准备了 10 张奖券，奖券上标的数字分别为：10，20，30，40，50，60，70，80，90，100，规定每人抽一张奖券，如果抽到的数字正好等于某一个正多边形中心角的度数，那么这位同学有奖。请写出第一个上去抽奖的同学中奖的概率是_____。

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】本题先根据正多边形中心角的性质找出所有中奖的奖券数量，再利用概率公式计算中奖概率。

【详解】解：设正多边形的边数为 n ，由正多边形的性质可知，任意正多边形的中心角和为 360° ，因此每个中心角的度数为 $\frac{360^\circ}{n}$ ，其中 n 为不小于 3 的正整数。

若奖券上的数字 x 是某正多边形的中心角度数，则 $n = \frac{360}{x}$ 为不小于 3 的正整数，依次判断 10 个数字：

当 $x = 10$ 时， $n = 36$ ，符合条件；

当 $x = 20$ 时， $n = 18$ ，符合条件；

当 $x = 30$ 时， $n = 12$ ，符合条件；

当 $x = 40$ 时， $n = 9$ ，符合条件；

当 $x = 50$ 时， $n = 7.2$ ，不符合条件；

当 $x = 60$ 时， $n = 6$ ，符合条件；

当 $x = 70$ 时， $n \approx 5.14$ ，不符合条件；

当 $x = 80$ 时， $n = 4.5$ ，不符合条件；

当 $x = 90$ 时， $n = 4$ ，符合条件；

当 $x = 100$ 时， $n = 3.6$ ，不符合条件。

因此符合条件的结果共有 6 种，所有可能的抽取结果共 10 种，根据概率公式可得：

$$P(\text{中奖}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

16. 如果抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ （其中 a 、 m 、 k 是常数，且 $a \neq 0$ ）经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，那么抛物线 $y = a(x+m-1)^2 + k$ 与 x 轴的交点坐标是_____。

【答案】 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$

【解析】

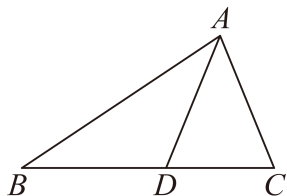
【分析】由题意可得抛物线 $y = a(x+m-1)^2 + k$ 是由抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ 向右平移1个单位得到的，结合平移的性质计算即可得出结果.

【详解】解：由题意可得：抛物线 $y = a(x+m-1)^2 + k$ 是由抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ 向右平移1个单位得到的，

$\therefore$ 抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ (其中 a, m, k 是常数，且 $a \neq 0$) 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = a(x+m-1)^2 + k$ 与 x 轴的交点坐标为 $(-1+1, 0)$ 和 $(3+1, 0)$ ，即 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$.

17. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $\angle DAC = \angle B$ ， $AC = BD = 1$ ， $DC = x$ ，那么 $\frac{1}{x} - x$ 的值等于_____.



【答案】 1

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的性质和判定和分式方程. 先证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，利用 $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$ 得方程 $\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1}$ ，去分母得 $x^2 + x - 1 = 0$ ，再将方程两边同除以 x 再移项即可.

【详解】解： $\because \angle DAC = \angle B$ ， $\angle C = \angle C$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC},$$

$$\therefore \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1},$$

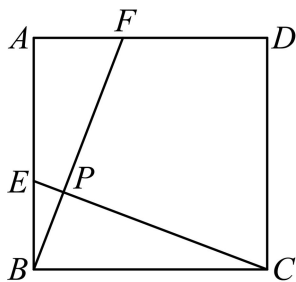
$$\therefore x(1+x) = 1,$$

整理得 $x^2 + x - 1 = 0$ ，

方程两边同除以 x ， $x + 1 - \frac{1}{x} = 0$ ，

$$\therefore \frac{1}{x} - x = 1.$$

18. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 AB 、 AD 上， $BF \perp CE$ ，垂足为点 P ，已知 $CP = 9$ ， $PF = 7$ ，那么 BF 的长为_____.



【答案】 10 或 13

【解析】

【分析】设 $BF = x$ ，则 $PB = x - 7$ ，根据正方形的性质，容易证明 $\triangle ABF \cong \triangle BCE$ (ASA)，则 $CE = BF = x$ ， $PE = x - 9$ ，由两角相等可判定 $\triangle PBE \sim \triangle PCB$ ，则 $PB^2 = PC \cdot PE$ ，代入解方程求出 x 的值即可.

【详解】解：设 $BF = x$ ，则 $PB = BF - PF = x - 7$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle A = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，

$\therefore \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore BF \perp CE$ ，

$\therefore \angle BPE = \angle BPC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BEC + \angle ABF = 180^\circ - \angle BPE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABF = \angle BCE$ ，

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABF = \angle BCE \\ AB = BC \\ \angle A = \angle EBC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle BCE$ (ASA)，

$\therefore CE = BF = x$ ，

$\therefore PE = CE - CP = x - 9$ ，

$\therefore \angle ABF = \angle BCE$ ， $\angle BPE = \angle BPC$ ，

$\therefore \triangle PBE \sim \triangle PCB$ ，

$$\therefore \frac{PB}{PC} = \frac{PE}{PB}, \text{ 即 } PB^2 = PC \cdot PE,$$

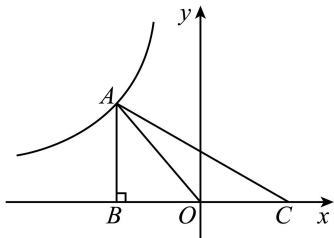
$$\therefore (x-7)^2 = 9 \cdot (x-9),$$

解得 $x = 10$ 或 $x = 13$ ，

∴ BF 的长为 10 或 13.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 如图, 点 A 在反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图像上, $AB \perp x$ 轴, 垂足点 B 在 x 轴负半轴上, 已知点 B, C 关于原点对称.



(1) 当点 A 的横坐标是 $-\frac{3}{2}$ 时, 求 ABC 的面积;

(2) 当 $\tan \angle ACB = \frac{1}{2}$, 求直线 AC 的表达式.

【答案】 (1) 3 (2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由题意易得 $A\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, 则有 $B\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 然后可得 $AB = 2$, $BC = 3$, 进而问题可求解;

(2) 由题意易得 $AB = \frac{1}{2}BC$, 则有 $AB = OB$, 设 $AB = OB = t$, 由题意知 $A(-t, t)$, $B(-t, 0)$, $C(t, 0)$, 然后得出点 A, C 的坐标, 进而利用待定系数法进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $x = -\frac{3}{2}$ 代入反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 得: $y = -\frac{3}{-\frac{3}{2}} = 2$,

$$\therefore A\left(-\frac{3}{2}, 2\right),$$

∵ $AB \perp x$ 轴,

$$\therefore B\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \quad AB = 2,$$

∵ 点 B, C 关于原点对称,

$$\therefore C\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\therefore BC = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} BC,$$

$\because$ 点 B, C 关于原点对称,

$$\therefore OC = OB = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore AB = OB,$$

设 $AB = OB = t$, 由题意知 $A(-t, t), B(-t, 0), C(t, 0)$,

把 $A(-t, t)$ 代入反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 得: $t = -\frac{3}{-t}$,

解得: $t = \sqrt{3}$, (负根舍去)

$$\therefore A(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), C(\sqrt{3}, 0),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$, 则有,

$$\begin{cases} -\sqrt{3}k + b = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20. 如果关于 x 的分式方程 $\frac{x+2}{2x-4} + \frac{5-a}{x-2} = \frac{a}{2}$ 的解为正数, 求常数 a 的取值范围.

【答案】 $a > 1$ 且 $a \neq 7$

【解析】

【分析】先解分式方程得出 $x = \frac{12}{a-1}$, 结合题意得出 $\frac{12}{a-1} > 0$, 即可得到 $a > 1$, 再结合分式方程分母不能为零, 计算得出 $a \neq 7$, 即可得出结果.

【详解】解: 方程两边同时乘以 $2(x-2)$ 得: $(x+2) + 2(5-a) = a(x-2)$,

去括号得: $x + 2 + 10 - 2a = ax - 2a$,

移项并合并同类项得: $(1-a)x = -12$,

$$\text{解得 } x = \frac{12}{a-1},$$

$\therefore$ 关于 x 的分式方程 $\frac{x+2}{2x-4} + \frac{5-a}{x-2} = \frac{a}{2}$ 的解为正数,

$$\therefore \frac{12}{a-1} > 0,$$

解得 $a > 1$,

$\therefore$ 分式方程分母不能为零, 即 $x-2 \neq 0$,

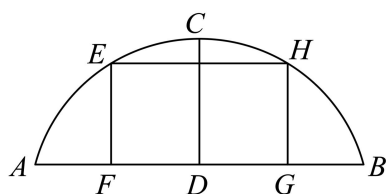
$$\therefore x \neq 2,$$

$$\therefore \frac{12}{a-1} \neq 2,$$

$$\therefore a \neq 7,$$

综上所述, 常数 a 的取值范围 $a > 1$ 且 $a \neq 7$.

21. 如图, 弓形弦长 $AB = 48$ 米, 高 $CD = 18$ 米, 有一内接矩形 $EFGH$, 边 FG 在 AB 上, 顶点 E, H 在弓形弧上, 边 EH 的长比 EF 的 2 倍多 4 米.



(1) 求该弓形所在圆的半径;

(2) 求 EF 的长.

【答案】 (1) 25m (2) 13m

【解析】

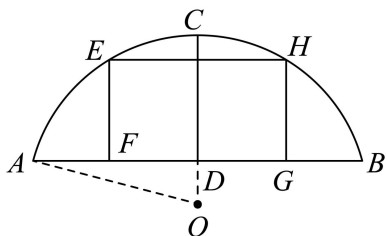
【分析】 本题主要考查垂径定理, 勾股定理, 找出圆心正确作出辅助线是解题关键.

(1) 取圆心 O , 连接 OA , OD , 由垂径定理得 $AD = \frac{1}{2}AB = 24$, 设半径为 r , 在 $Rt\triangle AOD$ 中利用勾股定理列方程即可;

(2) 连接 OE , 设 $EF = x$, 则 $EH = 2EF + 4 = 2x + 4$, 由垂径定理得 $EM = \frac{1}{2}EH = x + 2$, 再由矩形性质 $EFGH$ 得 $DM = EF = x$, $OM = DM + OD = x + 7$, $OE = 25$, 最后在 $Rt\triangle OEM$ 中利用勾股定理列方程即可.

【小问 1 详解】

解: 取圆心 O , 连接 OA , OD ,



$\therefore CD$ 是弓形的高,

$\therefore D$ 是 AB 的中点, 且 $CD \perp AB$, 圆心 O 在直线 CD 上.

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 48 = 24 \text{ (米)},$$

设 $OA = OC = r$,

$$\text{则 } OD = OC - CD = r - 18,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中,

$$AD^2 + OD^2 = OA^2,$$

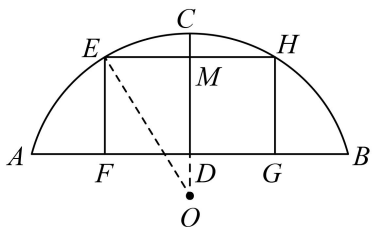
$$\therefore 24^2 + (r - 18)^2 = r^2,$$

$$\therefore r = 25,$$

$\therefore$ 该弓形所在圆的半径为 25m.

【小问 2 详解】

解: 连接 OE ,



由 (1) 得, $OD = 25 - 18 = 7$,

设 $EF = x$,

$$\text{则 } EH = 2EF + 4 = 2x + 4,$$

$\therefore CD$ 是弓形的高,

$$\therefore OC \perp EH,$$

$$\therefore EM = \frac{1}{2} EH = x + 2,$$

$$\therefore \angle FEM = \angle EMD = \angle MDF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFDM$ 是矩形,

$$DM = EF = x$$

$$\therefore \angle FEM = \angle EMD = \angle MDF = 90^\circ,$$

$$\therefore OM = DM + OD = x + 7,$$

在 $Rt\triangle OEM$ 中, $OE = 25$, $EM^2 + OM^2 = OE^2$,

$$\therefore (x+2)^2 + (x+7)^2 = 25^2,$$

$$x^2 + 9x - 286 = 0,$$

$$x_1 = -22 \text{ (舍去)}, x_2 = 13,$$

$$\therefore EF = 13\text{m}.$$

22. 本市某街道办了一所老年食堂, 该街道老人花 1000 元可买到一张面值 1080 元的就餐卡, 其中 80 元为政府出资补贴, 凭卡就餐时, 再按标价的九折在卡中扣款. 张爷爷现持有一张面值 1080 元的就餐卡, 如果从 4 月 1 日开始, 在该月 30 天中, 他每天午餐、晚餐都到老年食堂就餐. 假设他的每顿餐费标价相同, 均为 x 元, 按九折付款后, 到四月 30 日结束时, 卡内余额为 y 元.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域.

(2) 如果张爷爷到月底结束时, 卡内还有 108 元结余, 那么他该月每餐标价是多少元?

(3) 如果张爷爷将卡内 1080 元全部用完, 此时算上政府补贴及餐费打折, 他实际共获得多少元优惠?

【答案】 (1) $y = 1080 - 54x$, 定义域为 $0 < x \leq 20$

(2) 18 元 (3) 200 元

【解析】

【分析】 (1) 先求出张爷爷 4 月份共就餐的顿数, 再求出总扣款的钱数, 即可得出 y 关于 x 的函数解析式, 根据 $x > 0$, 且 $y = 1080 - 54x \geq 0$, 即可求出定义域;

(2) 求出当 $y = 108$ 时 x 的值即可得出结果;

(3) 先消费的总餐费标价, 再结合总优惠包括政府补贴和餐费九折优惠, 计算即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得, 张爷爷 4 月份共就餐 $2 \times 30 = 60$ (顿),

每顿实际扣款为 $0.9x$ 元, 则总扣款为 $60 \times 0.9x = 54x$ (元),

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = 1080 - 54x,$$

$$\because x > 0, \text{ 且 } y = 1080 - 54x \geq 0,$$

$$\therefore 0 < x \leq 20;$$

【小问 2 详解】

解：当 $y = 108$ 时， $1080 - 54x = 108$ ，

解得： $x = 18$ ，

故他该月每餐标价是 18 元；

【小问 3 详解】

解：设消费的总餐费标价为 A 元，

由题意可得： $0.9A = 1080$ ，

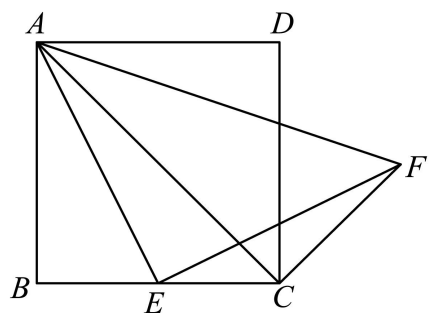
$\therefore A = 1200$ ，

故餐费九折优惠的金额为： $1200 - 1080 = 120$ （元），

$\therefore$ 政府补贴 80 元，

故实际共获得优惠金额为 $120 + 80 = 200$ （元）。

23. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，点 F 是正方形外一点，连结 AE 、 EF 、 AF ，对角线 AC 与线段 EF 相交于点 M ，如果 $AB \cdot AF = AE \cdot AC$ ，且 $\angle EAC = \angle DAF$ 。



(1) 求证： $\angle ACF = 90^\circ$ ， $AF = \sqrt{2}EF$ ；

(2) 当点 E 是边 BC 的中点时，请直接写出 $\triangle AMF$ 与 $\triangle EMC$ 面积的比值：_____。

【答案】 (1) 见解析 (2) 10

【解析】

【分析】 本题考查正方形的性质，相似三角形的性质和判定，等腰直角三角形

(1) 先证明 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ ，得 $\angle ACF = 90^\circ$ ，再证明 $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ ，得 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，利用等腰直角三角形斜边是直角边的 $\sqrt{2}$ 倍，即可证明 $AF = \sqrt{2}EF$ 。

(2) 先证明 $\triangle AEM \sim \triangle FCM$ ，再证明 $\triangle AMF \sim \triangle EMC$ ，设 $BE = EC = x$ ，得 $AE = \sqrt{5}x$ ， $AF = \sqrt{10}x$ ，

最后利用 $\frac{S_{\triangle AMF}}{S_{\triangle EMC}} = \left(\frac{AF}{EC}\right)^2$ 求解即可。

【小问 1 详解】

证明: $\because AC$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线,

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\because \angle EAC = \angle DAF,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle CAD - \angle DAF,$$

$$\text{即 } \angle BAE = \angle CAF,$$

$$\because AB \cdot AF = AE \cdot AC,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle B = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAE = \angle CAF,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle CAF + \angle EAC,$$

$$\text{即 } \angle BAC = \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF},$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore AF = \sqrt{2}EF.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle AEF = \angle ACF = 90^\circ, \angle AME = \angle FMC$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle FCM,$$

$$\therefore \frac{AM}{FM} = \frac{EM}{CM},$$

$$\therefore \frac{AM}{EM} = \frac{FM}{CM},$$

$$\because \angle AMF = \angle EMC,$$

$$\therefore \triangle AMF \sim \triangle EMC,$$

$$\because \text{点 } E \text{ 是边 } BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore \text{设 } BE = EC = x, \text{ 则 } BC = AB = 2x,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{5}x,$$

$$AF = \sqrt{2}AE = \sqrt{10}x,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AMF}}{S_{\triangle EMC}} = \left(\frac{AF}{EC}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}x}{x}\right)^2 = 10.$$

24. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 中, $CD \parallel BA$, $BC = CD$, $BD = DA$, $BA = 3BC$.

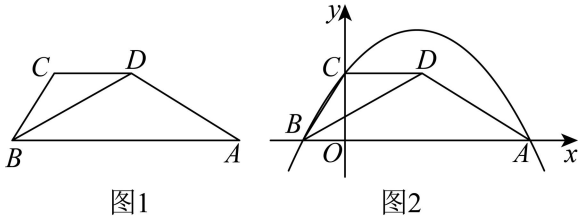


图1

图2

(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle DBC$, 并求 $\triangle ABD$ 与 $\triangle DBC$ 的相似比 k ;

(2) 如图 2, 我们以直线 BA 为 x 轴, 以过点 C 且垂直于线段 BA 的直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy , 已知 $BC = 2$.

①求图像经过点 A 、 B 、 C 三点的二次函数解析式;

②如果我们将 (1) 中 $\triangle BCD$ 与 $\triangle BDA$ 的关系看作是一种图形变换, 这种变换是将 $\triangle BCD$ 先绕点 B 按顺时针方向旋转, 使点 C 落在 BD 上, 点 D 落在 AB 上, 再将旋转得到的三角形的边长都扩大到原来的 k 倍, 从而得到 $\triangle BDA$, 我们将 $\triangle BDA$ 称为 $\triangle BCD$ 的像, 将 $\triangle BCD$ 称为 $\triangle BDA$ 的原像. 如果 $\triangle BAE$ 是 $\triangle BDA$ 的像, 而 $\triangle BFC$ 是 $\triangle BCD$ 的原像, 试直接写出点 E 和点 F 的坐标: 点 E 的坐标是, 点 F 的坐标是.

【答案】(1) 证明见解析, $k = \sqrt{3}$

$$(2) \text{ ① } y = -\frac{\sqrt{3}}{5}x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{5}x + \sqrt{3}; \text{ ② } (8, -3\sqrt{3}), \left(-1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

【解析】

【分析】(1) 由等边对等角和平行线的性质得到 $\angle CBD = \angle CDB = \angle DBA = \angle A$, 即可证明

$\triangle ABD \sim \triangle DBC$; 设 $BC = x$, 则 $BA = 3BC = 3x$, 根据相似三角形的性质列出比例式求解即可;

(2) ①首先解直角三角形求出 $B(-1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$, 然后得到 $A(5, 0)$, 利用待定系数法求解即可;

②如图, 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于点 G , 根据题意得到 $BE = \sqrt{3}BA = 6\sqrt{3}$, $\angle ABE = \angle DBA = 30^\circ$, 解直角三角形求出 GE , GB , 进而求出点 E 的坐标; 同理求出点 F 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because BC = CD$, $BD = DA$,

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB, \angle DBA = \angle A$$

$$\because CD \parallel BA$$

$$\therefore \angle CDB = \angle DBA$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB = \angle DBA = \angle A$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DBC;$$

设 $BC = x$, 则 $BA = 3BC = 3x$

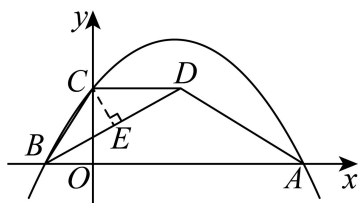
$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BA}, \text{ 即 } \frac{x}{BD} = \frac{BD}{3x}$$

$$\therefore BD = \sqrt{3}x$$

$$\therefore k = \frac{BD}{BC} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

解: ①如图, 过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E



$$\text{由 (1) 得, } \frac{BC}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore BD = \sqrt{3}BC$$

$$\because BC = CD$$

$$\therefore BE = DE = \frac{1}{2}BD$$

$$\therefore \cos \angle CBE = \frac{BE}{BC} = \frac{\frac{1}{2}BD}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \angle CBE = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DBA = \angle CBE = 30^\circ$$

$$\therefore \angle CBO = 60^\circ$$

$$\therefore OB = BC \cdot \cos \angle CBO = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \quad OC = BC \cdot \sin \angle CBO = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore B(-1, 0), \quad C(0, \sqrt{3})$$

$$\because BA = 3BC = 6$$

$$\therefore OA = BA - BO = 6 - 1 = 5$$

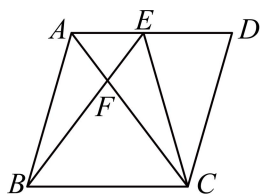


图1

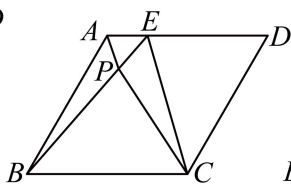
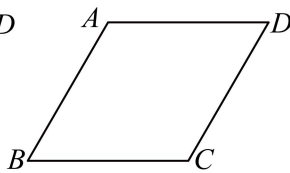


图2



备用图

(1) 如图 1, 连接 AC 交 BE 于点 F , 若 $EC = DC$, 求证: $\angle EBC = \angle BAC$;

(2) 如图 2, $AB = 6$, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 P 在线段 BE 上, 且满足 $\angle BCP = \angle BEC$, 设 $AE = x$, $BP = y$,

①求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

②当 $AE = 3$ 时, 以 AE 为半径的 $\odot A$ 和以 BP 为半径的 $\odot B$ 是否相交? 如果相交, 求出它们的公共弦长; 如果不相交, 请说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) ① $y = \frac{36}{\sqrt{x^2 + 6x + 36}} (0 \leq x \leq 6)$; ② 相交, $\frac{9\sqrt{47}}{14}$

【解析】

【分析】 (1) 由等边对等角可得 $\angle D = \angle CED$, 由菱形的性质可得 $\angle ABC = \angle D$, $\angle BAC = \angle CAE$, 再证明点 A 、 B 、 C 、 E 四点共圆, 得出 $\angle EBC = \angle CAE$, 即可得证;

(2) ①作 $BH \perp DA$, 交 DA 的延长线于点 H , 由菱形的性质可得 $AB = BC = 6$, $AD \parallel BC$, 求出

$AH = \frac{1}{2}AB = 3$, $BH = 3\sqrt{3}$, 可得 $HE = x + 3$, 由勾股定理可得 $BE = \sqrt{x^2 + 6x + 36}$, 再证明

$\triangle BCP \sim \triangle BEC$, 由相似三角形的性质计算即可得出结果; ②当 $AE = 3$ 时, $y = \frac{12\sqrt{7}}{7}$, 则 $r_A = AE = 3$,

$r_B = BP = \frac{12\sqrt{7}}{7}$, 结合 $\frac{12\sqrt{7}}{7} - 3 < 6 < \frac{12\sqrt{7}}{7} + 3$, 得出以 AE 为半径的 $\odot A$ 和以 BP 为半径的 $\odot B$ 相交,

设两圆相交于 MN , 连接 AM 、 AN 、 BM 、 BN , 连接 MN 交 AB 于点 G , 则 $AM = AN = AE = 3$,

$BM = BN = BP = \frac{12\sqrt{7}}{7}$, 由垂径定理可得 $GM = GN = \frac{1}{2}MN$, $AB \perp MN$, 设 $AG = a$, 则 $BG = 6 - a$,

再结合勾股定理计算即可得出结果.

【小问 1 详解】

证明: $\because EC = DC$,

$\therefore \angle D = \angle CED$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore \angle ABC = \angle D$, $\angle BAC = \angle CAE$,

$$\therefore \angle ABC = \angle CED,$$

$$\because \angle AEC + \angle CED = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC + \angle ABC = 180^\circ,$$

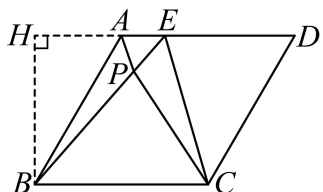
$\therefore$ 点 A 、 B 、 C 、 E 四点共圆,

$$\therefore \angle EBC = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle BAC;$$

【小问 2 详解】

解: ①如图, 作 $BH \perp DA$, 交 DA 的延长线于点 H ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB = BC = 6, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = 90^\circ - \angle BAH = 30^\circ,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore HE = AH + AE = x + 3,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BH^2 + HE^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 36},$$

$$\because \angle BCP = \angle BEC, \quad \angle CBE = \angle PBC,$$

$$\therefore \triangle BCP \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{BP}{BC},$$

$$\therefore \frac{6}{\sqrt{x^2 + 6x + 36}} = \frac{y}{6},$$

$$\therefore y = \frac{36}{\sqrt{x^2 + 6x + 36}} (0 \leq x \leq 6);$$

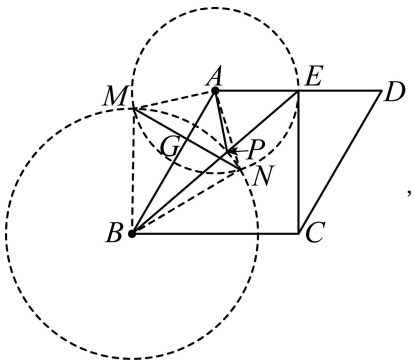
$$\text{②当 } AE = 3 \text{ 时, } y = \frac{36}{\sqrt{3^2 + 6 \times 3 + 36}} = \frac{12\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore r_A = AE = 3, \quad r_B = BP = \frac{12\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore AB = 6, \text{ 且 } \frac{12\sqrt{7}}{7} - 3 < 6 < \frac{12\sqrt{7}}{7} + 3,$$

$\therefore$ 以 AE 为半径的 $\odot A$ 和以 BP 为半径的 $\odot B$ 相交,

如图, 设两圆相交于 MN , 连接 AM 、 AN 、 BM 、 BN , 连接 MN 交 AB 于点 G ,



$$\text{则 } AM = AN = AE = 3, \quad BM = BN = BP = \frac{12\sqrt{7}}{7},$$

由垂径定理可得: $GM = GN = \frac{1}{2}MN$, $AB \perp MN$,

设 $AG = a$, 则 $BG = AB - AG = 6 - a$,

$$\therefore GN^2 = AN^2 - AG^2 = 3^2 - a^2, \quad GN^2 = BN^2 - BG^2 = \left(\frac{12\sqrt{7}}{7}\right)^2 - (6-a)^2,$$

$$\therefore 3^2 - a^2 = \left(\frac{12\sqrt{7}}{7}\right)^2 - (6-a)^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{57}{28},$$

$$\therefore AG = \frac{57}{28},$$

$$\therefore GN = \sqrt{AN^2 - AG^2} = \frac{9\sqrt{47}}{28},$$

$$\therefore MN = 2GN = \frac{9\sqrt{47}}{14}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定与性质、菱形的性质、圆内接四边形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识点, 熟练掌握以上知识点并灵活运用, 添加适当的辅助线是解此题的关键.