

2025 学年青浦九年级数学学科练习卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列实数中，无理数是 ()

A. 0

B. $\sqrt{4}$

C. π

D. $\frac{22}{7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据无理数是无限不循环小数，有理数是整数和分数的统称，逐一判断选项即可.

【详解】解：∵有理数是整数与分数的统称，无理数是无限不循环小数，

∴A 选项：0 是整数，属于有理数；

B 选项： $\sqrt{4} = 2$ ，2 是整数，属于有理数；

C 选项： π 是无限不循环小数，属于无理数；

D 选项： $\frac{22}{7}$ 是分数，属于有理数，

∴无理数是 π .

2. 计算 $8^{\frac{1}{2}}$ ，下列结果中正确的是 ()

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据分数指数幂的定义将原式转化为二次根式，再利用二次根式的化简性质计算即可得到结果.

【详解】解：∵ $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

3. 将分式方程 $\frac{1}{x} = \frac{2x}{x+1}$ 化为整式方程，下列答案正确的是 ()

A. $2x^2 - x - 1 = 0$

B. $2x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^2 - 2x + 1 = 0$

D. $x^2 - 2x - 1 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】将分式方程两边同乘最简公分母去掉分母，再整理得到标准整式方程即可.

【详解】∵原方程为 $\frac{1}{x} = \frac{2x}{x+1}$ ， $x \neq 0$ 且 $x+1 \neq 0$ ，

方程两边同乘最简公分母 $x(x+1)$ ，得： $x+1=2x^2$ ，

移项整理得： $2x^2-x-1=0$ 。

4. 直角坐标平面内，已知函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图像经过点 $P(a,b)$ 。如果 $b<0$ ，那么点 P 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】

【分析】 将点坐标代入即可分析求解。

【详解】 解： $\because$ 函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图像经过点 $P(a,b)$ ，

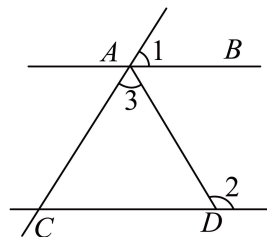
$$\text{则 } b = -\frac{3}{a}$$

$$\because b < 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

则点 P 在第四象限。

5. 如图， $AB \parallel CD$ ，如果 $\angle 1 = 63^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ，那么 $\angle 3$ 的度数为 ()



- A. 47° B. 57° C. 60° D. 63°

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据对顶角相等和平行线的性质求出 $\angle ACD$ 的度数，再利用三角形外角的性质求出 $\angle 3$ 的度数。

【详解】 解： $\because \angle 1 = 63^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle ACD = 63^\circ \text{ (两直线平行，同位角相等).}$$

$\because \angle 2$ 是 $\triangle ACD$ 的外角，

$$\therefore \angle 2 = \angle ACD + \angle 3.$$

$$\because \angle 2 = 120^\circ,$$

$$\therefore 120^\circ = 63^\circ + \angle 3.$$

$$\therefore \angle 3 = 57^\circ.$$

6. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $BC=4$ ，动点 O 在对角线 AC 上。如果以点 O 为圆心，以 1 为半径长的 $\odot O$

与边 AB 有两个公共点，那么线段 OA 的取值范围是 ()

- A. $1 \leq OA \leq \frac{5}{4}$ B. $1 < OA < \frac{5}{4}$ C. $1 < OA \leq \frac{5}{4}$ D. $1 \leq OA < \frac{5}{4}$

【答案】 D

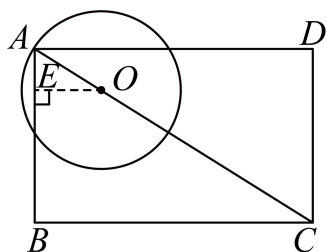
【解析】

【分析】 先利用矩形性质和勾股定理求出对角线 AC 的长度，再通过相似三角形得到圆心 O 到 AB 的距离与 OA 的关系，结合圆与线段 AB 有两个公共点的条件，推导得到 OA 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB=3$ ， $BC=4$ ， $\angle ABC=90^\circ$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

过点 O 作 $OE \perp AB$ 于 E



$$\because OE \perp AB, \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore OE \parallel BC$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ACB$$

$$\therefore \frac{OE}{BC} = \frac{OA}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{OE}{4} = \frac{OA}{5},$$

$$\text{整理得 } OE = \frac{4}{5}OA$$

$\because \odot O$ 半径为 1，且 $\odot O$ 与边 AB (线段 AB) 有两个公共点

$\therefore$ 需满足两个条件：①直线 AB 与 $\odot O$ 相交，②端点 A 在 $\odot O$ 外 (或圆上).

①直线 AB 与 $\odot O$ 相交，即圆心到 AB 的距离小于半径则 $OE < 1$,

$$\therefore \frac{4}{5}OA < 1,$$

$$\text{解得 } OA < \frac{5}{4}$$

②端点 A 在 $\odot O$ 外 (或圆上)，则 $OA \geq 1$

综上， $1 \leq OA < \frac{5}{4}$.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【在答题纸相应题号的空格内直接填写答案】

7. 计算： $|2 - \sqrt{3}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先判断绝对值内 $2 - \sqrt{3}$ 的正负性，再根据绝对值的性质化简计算即可.

【详解】 解： $\because 1 < 3 < 4$,

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$$\therefore -2 < -\sqrt{3} < -1,$$

$$\therefore 2 - 2 < 2 - \sqrt{3} < 2 - 1, \text{ 即 } 0 < 2 - \sqrt{3} < 1,$$

根据正数的绝对值等于它本身，可得 $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.

8. 分解因式： $ab - a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(b - 1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解，原式直接运用提公因式法解答即可.

【详解】 解： $ab - a = a(b - 1)$,

故答案为： $a(b - 1)$.

9. 单项式 $-x^2y$ 的次数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题主要考查了单项式的次数，直接利用单项式次数的定义，各字母的指数和，即可求解.

【详解】 解： 单项式 $-x^2y$ 的次数为： $2 + 1 = 3$,

故答案为： 3.

10. 方程 $\sqrt{x - 6} = 2$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = 10$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的求解，解题思路为通过两边平方将无理方程转化为一元一次方程，求解后进行检验即可得到原方程的解.

【详解】 解: $\sqrt{x-6}=2$

两边同时平方, 得

$$x-6=4$$

$$x=10$$

检验: 当 $x=10$ 时, 原方程左边 $\sqrt{10-6}=2=$ 右边,

因此 $x=10$ 是原方程的解.

11. 上海青浦百联奥特莱斯是 2023 年国内首家且唯一一家年销售额突破 60 亿元大关的奥特莱斯, 其销售额高达 63 亿元. 其中 63 亿元用科学记数法表示为_____元.

【答案】 6.3×10^9

【解析】

【详解】 解: 首先进行单位换算:

$$63 \text{ 亿元} = 6300000000 \text{ 元},$$

将 6300000000 表示为科学记数法, 原数变为 a 时小数点向左移动 9 位,

$$\text{可得 } 6300000000 = 6.3 \times 10^9.$$

12. 一组数据由 a 个 x_1 , b 个 x_2 , c 个 x_3 组成, 那么这组数据的平均数是_____.

【答案】 $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}$

【解析】

【分析】 根据平均数的公式, 用所有数据的和除以 $(a+b+c)$ 求解即可.

【详解】 解: 由题意知, a 个 x_1 的和为 ax_1 , b 个 x_2 的和为 bx_2 , c 个 x_3 的和为 cx_3 , 数据总共有 $a+b+c$ 个,

$$\therefore \text{全部数据的平均数} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}.$$

【点睛】 此题主要考查平均数的求解, 解题的关键是熟知平均数的定义及求解方法.

13. 在一个不透明的布袋中有 2 个红球和 1 个白球, 它们除颜色外其他都相同, 如果从布袋里随机摸出两个球, 那么所摸到两个球恰好是一红一白球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可.

【详解】解：列表如下：

	红	红	白
红		红，红	红，白
红	红，红		红，白
白	白，红	白，红	

由表知，共有 6 种等可能结果，其中所摸到两个球恰好是一红一白球的有 4 种结果，

$\therefore$ 所摸到两个球恰好是一红一白球的概率为 $4 \div 6 = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验. 用到的知识点为： 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

14. 将直线 $y = kx + b$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位后得到的直线是 $y = kx - 3$ ，则 $b =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】利用一次函数沿 y 轴平移“上加下减”的规律，得到平移后的直线解析式，对比已知条件即可求出 b 的值.

【详解】解：将直线 $y = kx + b$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位后，得到的直线解析式为 $y = kx + b - 2$ ，

已知平移后得到的直线是 $y = kx - 3$ ，

因此可得 $b - 2 = -3$ ，

解得 $b = -1$.

15. 过 n 边形的一个顶点有 5 条对角线，则这个多边形的内角和为_____.

【答案】 1080° ## 1080 度

【解析】

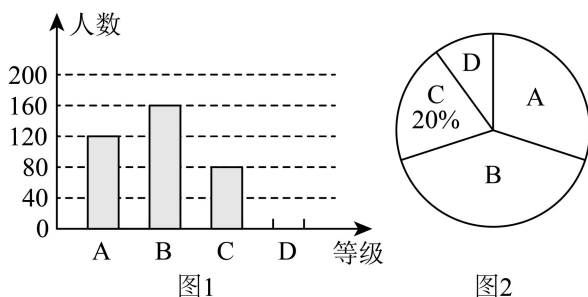
【分析】本题考查了多边形的对角线和多边形的内角和公式，根据 n 边形从一个顶点出发可引出 $(n-3)$ 条对角线，可得 $n-3=5$ ，求出 n 的值，最后根据多边形内角和公式可得结论.

【详解】解：由题意得： $n-3=5$ ，解得 $n=8$ ，

则该 n 边形的内角和是: $(8-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$,

故答案为: 1080° .

16. 某区“书香校园”项目组为了解初三学生每天的课外阅读情况,对全区初三学生进行了一次随机抽样调查,将学生按照每天课外阅读时长分为 A (约 1 小时), B (约 30 分钟), C (约 10 分钟), D (几乎没有)四个等级,并绘制成如图 1、图 2 所示的两幅不完整的统计图. 如果该区共有 5300 名初三学生,根据抽样调查结果,估计该区几乎没有课外阅读的学生人数大约为_____人.



【答案】

530

【解析】

【分析】根据条形统计图得到 C 等级的人数,根据扇形统计图得到 C 等级所占的百分比,两者相除即可求出抽样调查的总人数,用总人数减去 A、B、C 等级的人数得到 D 等级的人数,求出 D 等级所占的百分比,利用样本估计总体即可求出该区几乎没有课外阅读的学生人数.

【详解】解:由条形统计图可知 C 等级的人数为 80 人,由扇形统计图可知 C 等级所占的百分比为 20%

$\therefore$ 本次抽样调查的总人数为: $80 \div 20\% = 400$ (人)

$\therefore$ D 等级的人数为: $400 - 120 - 160 - 80 = 40$ (人)

$\therefore$ D 等级人数占抽样总人数的百分比为: $\frac{40}{400} \times 100\% = 10\%$

$\therefore$ 该区几乎没有课外阅读的学生人数大约为: $5300 \times 10\% = 530$ (人).

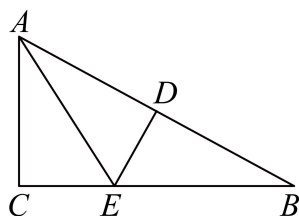
17. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 6$. 将 $\triangle ABC$ 沿过点 A 的直线翻折,使点 C 落在斜边 AB 上,折痕与边 BC 的交点记为 E. 如果 $\triangle CAE \sim \triangle CBA$, 那么折痕 AE 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先利用翻折的性质得到 AE 平分 $\angle CAB$, 再结合相似三角形的对应角相等推出三角形各内角度数,利用直角三角形的性质求出 AC 的长度,最后在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中计算 AE 的长.

【详解】解:设翻折后点 C 落在斜边 AB 上的点 D 处,



由折叠的性质可知, AE 平分 $\angle CAB$, 即 $\angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAB$,

$\therefore \triangle CAE \sim \triangle CBA$,

$\therefore \angle CAE = \angle B$,

$\therefore \angle B = \frac{1}{2} \angle CAB$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB + \angle B = 90^\circ$,

代入得 $2\angle B + \angle B = 90^\circ$,

解得 $\angle B = 30^\circ$, $\angle CAE = 30^\circ$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 6$,

$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 3$,

在 $Rt\triangle ACE$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $\angle CAE = 30^\circ$,

$\therefore CE = \frac{1}{2} AE$, $AC^2 + CE^2 = AE^2$,

$\therefore 3^2 + \left(\frac{1}{2} AE\right)^2 = AE^2$,

解得 $AE = 2\sqrt{3}$ (负值舍去).

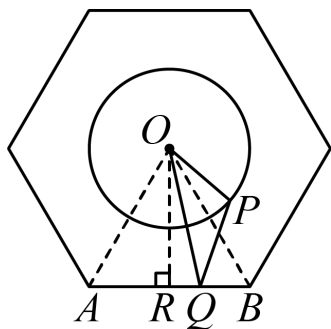
18. 定义: 如果一个圆的圆心与一个正多边形的中心重合, 那么称该正多边形为这个圆的同心正多边形. 已知一个圆的半径为 1, 该圆的同心正六边形的边长为 $\sqrt{3}$. 设点 P 在圆上, 点 Q 在正六边形的边上, 那么 P 、 Q 两点之间的最小距离为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 连接 OA, OB , 过点 O 作 $OR \perp AB$ 于点 R , 先解 $Rt\triangle OBR$ 求出 OR , 再由 $PQ \geq OQ - OP \geq OR - OP$ 求解即可.

【详解】 解: 如图, 连接 OA, OB , 过点 O 作 $OR \perp AB$ 于点 R



由题意得，正六边形的中心角为 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

$\therefore OA = OB$

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle OBA = 60^\circ, OB = AB = \sqrt{3}$

$\therefore OR = OB \times \sin \angle OBA = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$

$\therefore PQ \geq OQ - OP \geq OR - OP = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$

$\therefore PQ$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ，当点 P 在线段 OQ 上，且点 Q 与点 R 重合时， PQ 取得最小值，

$\therefore P、Q$ 两点之间的最小距离为 $\frac{1}{2}$ 。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19. 计算：先化简，再求值： $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 3a} \div \left(1 - \frac{4}{a + 3}\right)$ ，其中 $a = \sqrt{2}$ 。

【答案】 化简结果为 $\frac{a-1}{a}$ ， $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 先对原式中的分子分母进行因式分解，再根据分式的运算法则进行化简，最后将 a 的值代入化简后的式子求值。

【详解】 解：原式 $= \frac{(a-1)^2}{a(a+3)} \div \frac{a-1}{a+3}$

$$= \frac{(a-1)^2}{a(a+3)} \times \frac{a+3}{a-1}$$

$$= \frac{a-1}{a},$$

$$\text{当 } a = \sqrt{2} \text{ 时, } \frac{a-1}{a} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$20. \text{ 计算: 解不等式组 } \begin{cases} 2(x-4) \geq 6 & \text{①} \\ 8+x > 5x-24 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】

$$7 \leq x < 8$$

【解析】

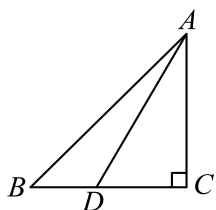
【分析】求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分确定出不等式组的解集即可.

【详解】解：解不等式①得： $x \geq 7$ ，

解不等式②得： $x < 8$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为： $7 \leq x < 8$.

21. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，点 D 在 BC 边上， $\angle CAD = 30^\circ$ ，且 $AC = \sqrt{3}$.



(1) 求线段 BD 的长；

(2) 求 $\sin \angle BAD$ 的值.

【答案】(1) $\sqrt{3}-1$

$$(2) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 先得到 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，再解 $\text{Rt}\triangle ACD$ 即可；

(2) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M ，分别解 $\text{Rt}\triangle BMD$, $\text{Rt}\triangle ACD$ ，求出 DM, AD ，再由正弦的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $AC = BC = \sqrt{3}$ ，

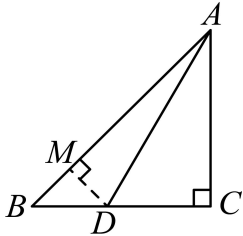
$$\therefore \angle CAD = 30^\circ$$

$$\therefore CD = AC \times \tan \angle CAD = \sqrt{3} \times \tan 30^\circ = 1$$

$$\therefore BD = BC - CD = \sqrt{3} - 1;$$

【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M ，



$$\therefore \angle B = 45^\circ,$$

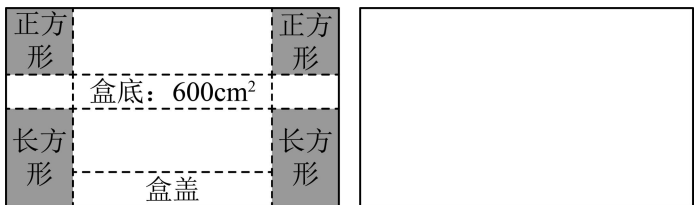
$$\therefore DM = BD \times \sin B = (\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ, \angle CAD = 30^\circ, AC = \sqrt{3}$$

$$\therefore AD = \frac{AC}{\cos \angle CAD} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle ADM \text{ 中, } \sin \angle BAD = \frac{DM}{AD} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

22. 被誉为“金果子”的草莓,是青浦区乡村产业振兴的一个亮点.某草莓采摘园计划通过互联网销售草莓,需设计一款底面积为 600cm^2 的有盖子的长方体快递包装盒,所用的材料为长 100cm , 宽 60cm 的长方形硬纸板.制作方法如下:在每一张纸板的四个角上分别剪去两个相同的正方形和两个相同的长方形(如方案 1 图所示).然后折叠成一个有盖纸盒(盒盖与盒底大小形状相同)



方案1

备用图: 方案2

为了优化设计,草莓采摘园的老板借助 AI 提出了一种改进方案(称为方案 2),方案 2 也需要在四个角上分别剪去两个相同的正方形和两个相同的长方形. AI 对方案 2 的优点给出了如下评价:

1. 节省材料,成本更低:两种方案体积相同,底面积相同,但方案 2 表面积更小,用料

2. 结构更稳固：方案2底面更接近正方形，重心更稳，抗压性更好，运输时不易变形、挤压，能更好保护物品。

(1) 设方案 1 中剪去的正方形的边长为 $x\text{cm}$ ，求包装盒的表面积；

(2) 尝试在备用图中画出方案 2，并通过计算说明 AI 对方案 2 “表面积最小”的评价是否准确？

(2) 见详解

【分析】(1) 根据图形可知剪去的长方形的长为 $LP=30$ ，则包装盒的表面积=长方形硬纸板的面积-正方形面积-长方形面积；

(2) 根据底面积相同, 可解方程得底边长宽分别为 30cm, 20cm, 则包装盒的表面积=长方形硬纸板的面积-正方形面积-长方形面积, 即可验证方案.

$$\therefore FL = \frac{60-2x}{2} = 30-x$$

$$= 100 \times 60 - 2x^2 - 2 \times x \times 30 = -2x^2 - 60x + 6000;$$

解: $\because DH = CF = 100 - 2x$, 底面积等于 600cm^2 ,

$$\therefore (100-2x)(30-x)=600,$$

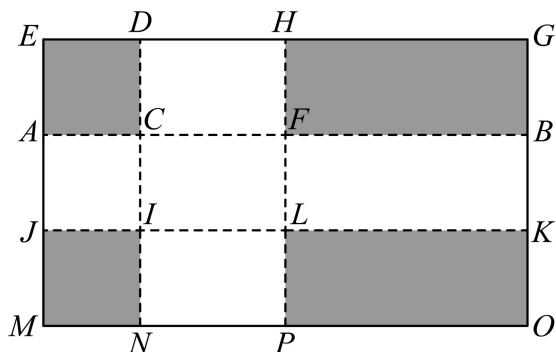
解得: $x=20$ 或 $x=60$ (舍去),

当 $x=20$ 时, 方案 1 包装盒的表面积为: $-2 \times 20^2 - 60 \times 20 + 6000 = 4000\text{cm}^2$,

$\therefore$ 两种方案体积相同, 底面积相同, 底面更接近正方形,

$\therefore$ 得图

当 $FL=20\text{cm}$, $CF=30\text{cm}$ 时, 满足条件,



$$\therefore AC=20\text{cm}, FB=50\text{cm}$$

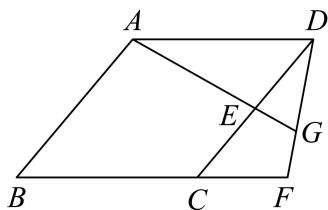
则包装盒的表面积 = 长方形硬纸板的面积 - 正方形面积 - 长方形面积

$$= 100 \times 60 - 2 \times 20^2 - 2 \times 20 \times 50 = 3200\text{cm}^2$$

方案 2 包装盒的表面积为: $3200\text{cm}^2 < 4000\text{cm}^2$,

则 AI 对方案 2 “表面积最小” 的评价准确.

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 在边 CD 上, 点 F 在 BC 的延长线上, $CF=DE$, AE 的延长线与 DF 相交于点 G , 且 $DG^2 = GE \cdot GA$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 如果 $AE=3EG$, 求证: 点 E 是边 CD 的中点.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

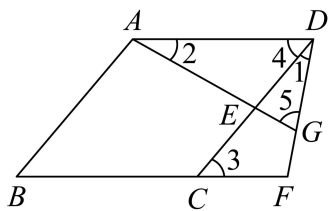
【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle GED \sim \triangle GDA$, 再证明 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$ (AAS), 最后根据一组邻边相等的平行四边形是菱形证明即可;

(2) 设 $EG = m, AE = 3m$, 由 $DG^2 = GE \cdot GA$ 求出 DG , 再由 $\triangle GED \sim \triangle GDA$ 证明即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle 4 = \angle 3$,

$\because DG^2 = GE \cdot GA$

$\therefore \frac{DG}{GE} = \frac{GA}{DG}$

$\therefore \angle 5 = \angle 5$

$\therefore \triangle GED \sim \triangle GDA$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore CF = DE$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF$ (AAS),

$\therefore AD = DC$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: $\because AE = 3EG$

$\therefore$ 设 $EG = m, AE = 3m$

$\therefore AG = EG + AE = 4m$

$\because DG^2 = GE \cdot GA = m \times 4m$

$\therefore DG = 2m$ (舍负),

$\because \triangle GED \sim \triangle GDA$

$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DG}{AG} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$,

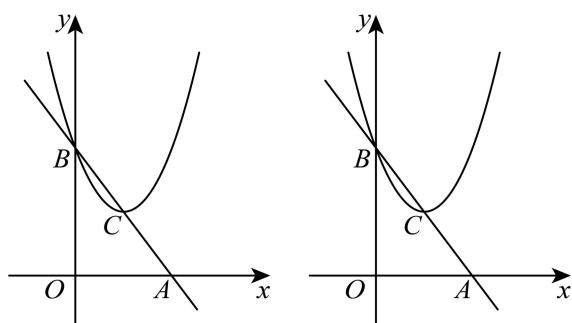
$\therefore AD = CD$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore DE = CE,$$

$\therefore$ 点 E 是边 CD 的中点.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 的图像分别与 x 轴, y 轴交于点 A 、 B , 点 C 是线段 AB 上一点, C 与 B 不重合. 以点 C 为顶点的二次函数 $f(x)$ 的图像经过点 B . 将该二次函数的图像平移后得到新抛物线 $g(x)$, 点 B 、 C 的对应点分别是 B' 、 C' , 且点 B' 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 点 C' 的纵坐标为 -2 .



备用图

- (1) 求点 C 的坐标及二次函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若点 P 是新抛物线对称轴上一点, 且以 P 、 A 、 C 为顶点的三角形与 $AB'C$ 相似, 且相似比不等于 1, 求点 P 的坐标;
- (3) 点 $D(4, y_1)$ 和 $E(x_2, y_2)$ 在新抛物线上, 且对于任意实数 x_2 , 当 $m < x_2 \leq m+1$ 时, $y_1 > y_2$, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $C\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $f(x) = \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$

(2) 点 P 的坐标为 $\left(3, \frac{25}{8}\right)$

(3) $2 \leq m < 3$

【解析】

【分析】 (1) 先求出点 B 的坐标进而得出 OB 的长度; 过点 C 作 $CH \perp y$ 轴于点 H , 由平移的性质可得, 原抛物线中 B 、 C 两点的纵坐标的差与新抛物线中 B' 、 C' 两点的纵坐标的差相等, 据此可得点 C 的坐标, 最后利用抛物线顶点式将点 B 、 C 代入即可求得抛物线表达式;

(2) 由原抛物线对称轴得到新抛物线的对称轴，在 $AB'C$ 中得到三边的长度，根据 $\triangle PAC$ 与 $AB'C$ 的相似比不为 1，可得出当 $PC \perp AC$ 符合题意，利用余弦的定义求得 PA 的长度，进而得出点 P 的坐标；

(3) 先求出平移后的新抛物线解析式，将点 D 代入求出其坐标，由 $m < x_2 \leq m+1$ 时， $y_1 > y_2$ 恒成立，可设 $y_F = y_D = -\frac{10}{9}$ ，求得点 F 的横坐标，进而得出 m 的取值范围。

【小问 1 详解】

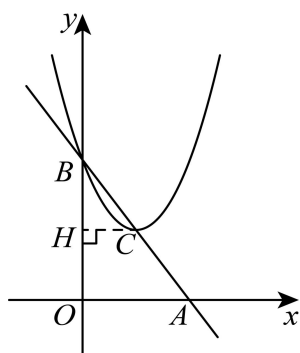
解：对于一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ ，

令 $x = 0$ ，得： $y = -\frac{4}{3} \times 0 + 4 = 4$ ，

$\therefore B(0, 4)$ ，

$\therefore OB = 4$ ，

如图，过点 C 作 $CH \perp y$ 轴于点 H ，



$\therefore B'\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，点 C' 的纵坐标为 -2 ，

$\therefore y_{B'} - y_{C'} = 2$ ，

$\therefore$ 将原二次函数的图象平移后得到新抛物线，点 B' ， C' 分别是 B ， C 的对应点，

$\therefore y_B - y_C = y_{B'} - y_{C'} = 2$ ，

即 $BH = 2$ ，

$\therefore y_B = 4$ ，

$\therefore y_C = 2$ ，

将 $y_C = 2$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ ，得 $x_C = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore C\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ ，

∴ 点 C 为二次函数 $f(x)$ 的顶点,

∴ 设二次函数的解析式为 $f(x) = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$,

将 $B(0, 4)$ 代入得: $a\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 4$,

解得: $a = \frac{8}{9}$,

∴ 二次函数 $f(x) = \frac{8}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$.

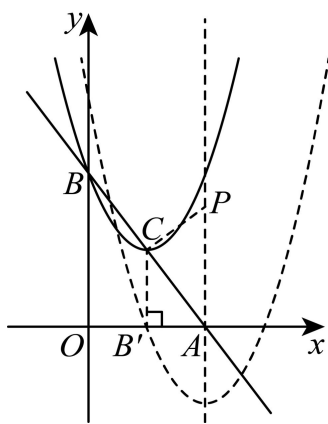
【小问 2 详解】

解: 二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2}$,

∴ $x = \frac{3}{2}$ 向右移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度得到二次函数 $g(x)$ 的对称轴,

∴ 二次函数 $g(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$,

如图, 在 $AB'C$ 中, $x_{B'} = x_C = \frac{3}{2}$,



∴ $B'C \parallel y$ 轴,

在 $\text{Rt}\triangle CB'A$ 中, $AB' = OA - OB' = \frac{3}{2}$, $B'C = 2$,

∴ $AC = \sqrt{CB'^2 + B'A^2} = \frac{5}{2}$,

∴ $\cos \angle B'CA = \frac{B'C}{AC} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$,

∴ $B'C \parallel AP$,

$$\therefore \angle B'CA = \angle CAP, \text{ 即 } \cos \angle B'CA = \cos \angle CAP = \frac{4}{5},$$

$\therefore \triangle PAC$ 与 $\triangle B'CA$ 的相似比不为 1,

当 $PC \perp PA$ 时, 易证得 $\triangle PAC \cong \triangle B'CA$ (AAS), 不符合题意,

$$\text{当 } PC \perp AC \text{ 时, } \cos \angle CAP = \frac{AC}{AP} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AP = \frac{5}{4} AC = \frac{5}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{8},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(3, \frac{25}{8}\right).$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 由 (2) 知, } g(x) = \frac{8}{9}(x-3)^2 - 2 = \frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 6,$$

$$\text{将点 } D(4, y_1) \text{ 代入得: } \frac{8}{9} \times 4^2 - \frac{16}{3} \times 4 + 6 = -\frac{10}{9},$$

$$\therefore D\left(4, -\frac{10}{9}\right),$$

$$\text{设 } y_F = y_D = -\frac{10}{9}, \text{ 则 } F\left(2, -\frac{10}{9}\right),$$

$\therefore m < x_2 \leq m+1$ 时, $y_1 > y_2$ 恒成立,

$$\therefore 2 \leq m < m+1 < 4,$$

$$\therefore 2 \leq m < 3.$$

25. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 5$, $AB = 2\sqrt{5}$, 点 D 是射线 CB 上一点, 连接 AD , 圆 O 经过 A 、 B 、 D 三点.

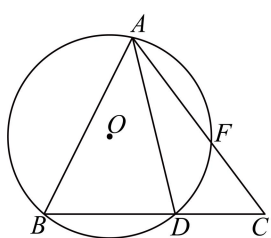


图1

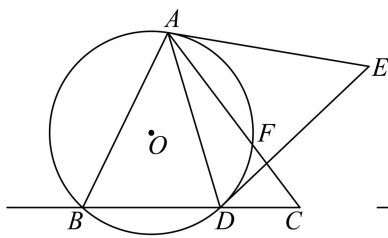
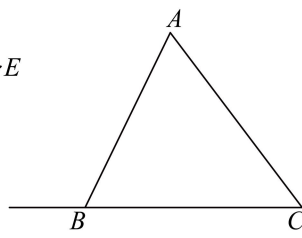


图2



备用图

(1) 如图 1, 当点 D 在线段 BC 上时,

①记圆 O 交 AC 于点 F , 求证: $AF = BD$;

②设 $CD = m$, 用 m 表示圆 O 的半径;

(2) 如图 2, 在线段 AD 的右侧, 以 AD 为底边作等腰 $\triangle EAD$, 且始终满足 $\angle EAD = \angle BAC$. 若以 C 为

圆心， CE 为半径的圆 C 与圆 O 有公共点，请直接写出线段 CD 的取值范围.

【答案】(1) ①见详解；② $\frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4}$

(2) $0 \leq m \leq 3$

【解析】

【分析】(1) ①根据同弧所对的圆周角相等即可求解；

②由外接圆的圆心是中垂线的交点可知 O 在中垂线上，进而可知 $\tan \angle BCH = \frac{1}{2}$ ，根据正切值可得

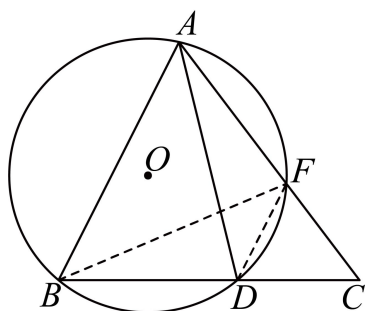
$OG = \frac{5+m}{4}$ ，进而根据勾股定理即可求解；

(2) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ，可得点 E 的运动轨迹为直线 CE ，根据相似三角形的性质可知 $OC = \frac{\sqrt{5}(5+m)}{4}$ ，

$CE = \frac{\sqrt{5}(5-m)}{2}$ ，当 $OC \leq CE + OD$ ， CE 为半径的圆 C 与圆 O 有公共点，列不等式即可求解.

【小问1详解】

①证明：连接 BF ， DF



ABC 中， $AC = BC = 5$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle ABC$ ，

$\therefore$ 在圆 O 中， $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{DF}$ ，

根据圆周角定理可知， $\angle DBF = \angle DAF$ ，

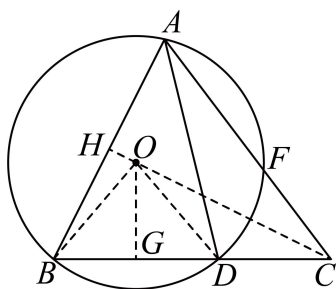
$\therefore \angle BAD = \angle ABF$ ，

$\therefore AF = BD$ ；

②解： $\because$ 圆 O 是 $\triangle ABD$ 的外接圆，

所以 O 是三边中垂线的交点，

如图，取 AB 的中点 H ，连接 CH ，取 BD 的中点 G ，连接 OG ，



$$\therefore CH \perp AB, \quad OG \perp BC,$$

$$\because AC = BC = 5, \quad AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5},$$

$$\therefore CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \tan \angle BCH = \frac{BH}{CH} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2},$$

$$\because CD = m,$$

$$\therefore BD = 5 - m,$$

$$\therefore GD = BG = \frac{5 - m}{2},$$

$$\therefore CG = CD + GD = \frac{5 + m}{2},$$

$$\therefore \tan \angle BCH = \frac{OG}{CG} = \frac{1}{2},$$

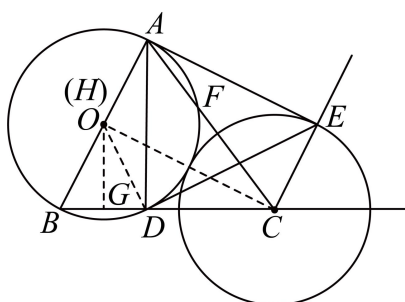
$$\therefore OG = \frac{5 + m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 + m}{4},$$

$$OB = \sqrt{BG^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{5 - m}{2}\right)^2 + \left(\frac{5 + m}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4},$$

$$\text{则圆 } O \text{ 的半径为: } \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4};$$

【小问 2 详解】

解：由题意可得，



当点 D 在 BC 线段上时,

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } AC = BC = 5,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC,$$

$\because \triangle EAD$ 是以 AD 为底边的等腰三角形,

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EDA,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$\therefore$ 点 E 的运动轨迹为直线 CE ,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

设 $CD = m$,

$$\therefore \text{由 (1) 可知 } OG = \frac{5+m}{4}, \quad BD = 5-m,$$

$$\sin \angle BCH = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{OG}{OC},$$

$$\therefore OC = \frac{\sqrt{5}(5+m)}{4}, \quad CE = \frac{\sqrt{5}(5-m)}{2},$$

$$\text{由 (1) 可知 } OB = OD = \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4} = R,$$

当 $OC \leq CE + OD$, 以 CE 为半径的圆 C 与圆 O 有公共点,

$$\frac{\sqrt{5}(5+m)}{4} \leq \frac{\sqrt{5}(5-m)}{2} + \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4},$$

解得: $0 \leq m \leq 3$.