

初三年级学业质量抽样调研数学学科

注意:

- 1.本场调研时间 100 分钟, 试卷共 4 页, 满分 150 分, 答题纸共 2 页.
- 2.作答前, 在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号, 将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
- 3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域, 不得错位.在试卷上作答一律不得分.
- 4.填涂选择题和作图用 2B 铅笔, 作答其余题型用黑色字迹钢笔、签字笔或圆珠笔.

一、选择题 (共 24 分, 每小题 4 分, 每小题只有一个正确选项)

1. 下列实数中, 比 0 小的是 ()

- A. $(-1)^2$ B. $-(-1)$ C. $|-1|$ D. -1 的倒数

【答案】D

【解析】

【分析】计算每个选项的结果, 将结果与 0 比较大小, 即可得到正确选项.

【详解】解: 逐一计算各选项结果并比较大小:

A 选项 $(-1)^2 = 1$, $1 > 0 \therefore$ A 不符合要求

B 选项 $-(-1) = 1$, $1 > 0 \therefore$ B 不符合要求

C 选项 $|-1| = 1$, $1 > 0 \therefore$ C 不符合要求

D 选项 -1 的倒数是 -1, $-1 < 0 \therefore$ D 符合要求.

2. 下列函数, 图象不是一条直线的是 ().

- A. $y = x^2$ B. $y = x + 1$ C. $y = 1$ D. $y = x$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数图象特征作出判断即可.

【详解】解: 对于选项 A: $y = x^2$ 是二次函数, 图象是一条抛物线, 符合题意;

对于选项 B:

$y = x + 1$ 是一次函数, 图象是一条直线, 不符合题意;

对于选项 C:

$y=1$ 是一条平行于 x 轴的直线，不符合题意；

对于选项 D:

$y=x$ 是正比例函数，图象是一条直线，不符合题意.

3. 下列运算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^3 = a^9$

B. $a^3 + a^3 = a^6$

C. $a^6 \div a^3 = a^2$

D. $(a^3)^3 = a^9$

【答案】D

【解析】

【分析】根据对应法则分别计算各选项即可得到正确结果.

【详解】根据幂的运算法则和合并同类项法则对各选项逐一判断:

选项 A: $\because$ 同底数幂相乘，底数不变，指数相加，

$$\therefore a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6 \neq a^9, \text{ A 错误};$$

选项 B: $\because$ 合并同类项时，同类项的系数相加，字母和指数不变，

$$\therefore a^3 + a^3 = 2a^3 \neq a^6, \text{ B 错误};$$

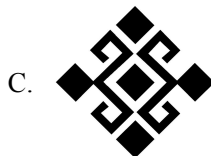
选项 C: $\because$ 同底数幂相除，底数不变，指数相减，

$$\therefore a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3 \neq a^2, \text{ C 错误};$$

选项 D: $\because$ 幂的乘方，底数不变，指数相乘，

$$\therefore (a^3)^3 = a^{3 \times 3} = a^9, \text{ D 正确}.$$

4. 博物馆已逐渐成为公共文化服务和城市旅游的重要阵地与有效载体. 下列四幅图是我国部分博物馆的标志，其中是中心对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形的知识，把一个图形绕某一点旋转 180° 度后，能够与原图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

【详解】解：A、该图形不属于中心对称图形，故该选项不符合题意；

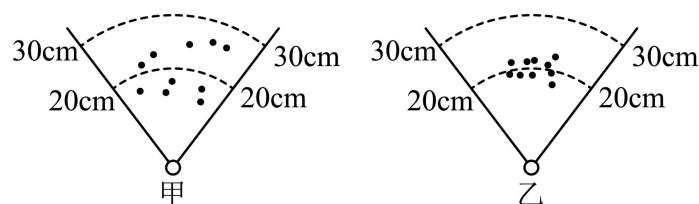
B、该图形不属于中心对称图形，故该选项不符合题意；

C、该图形属于中心对称图形，故该选项符合题意；

D、该图形不属于中心对称图形，故该选项不符合题意；

故选：C.

5. 在投掷实心球的比赛中，甲、乙两人各投掷了10次，球的落地位置如图所示. 已知两人10次投掷所得的平均成绩相同，对于甲、乙两人这10次成绩的方差的描述正确的是（ ）



- A. $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$ B. $S_{\text{甲}}^2 = S_{\text{乙}}^2$ C. $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$ D. 无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】根据方差来衡量数据波动大小、离散程度，进行判断即可.

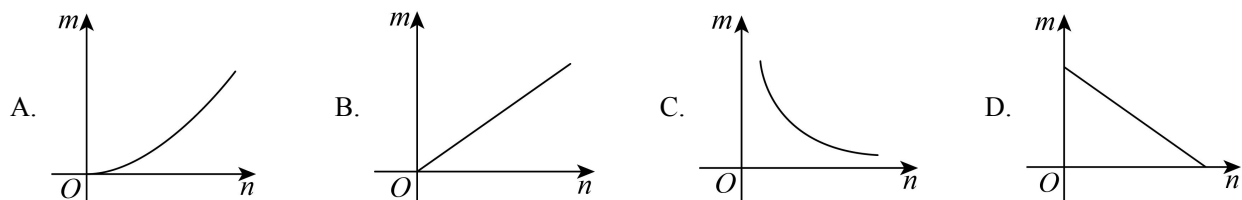
【详解】解：∵一组数据中，方差越小，数据越稳定、波动越小，方差越大，数据越分散、波动越大，

∴观察图片可知，甲的成绩比乙的成绩更加分散，

∴ $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$.

6. 如图是一把完全打开的折扇，此时扇面面积为 S . 当扇面张开的角度为 n° 时，扇面面积为 S_n ，如果 $m = \frac{S_n}{S}$ ，

那么 m 与 n 关系的大致图像是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】设扇形的半径为 r ，完全打开时的角度为 t ，表示出 $S = \frac{t\pi r^2}{360}$ ，然后得到 $m = \frac{S_n}{S} = \frac{1}{t} \cdot n$ ，进而求解即可.

【详解】解：设扇形的半径为 r ，完全打开时的角度为 t ，

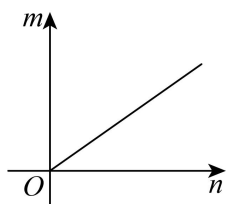
$$\therefore S = \frac{t\pi r}{360}$$

当扇面张开的角度为 n° 时，扇面面积 $S_n = \frac{n\pi r}{360}$

$$\therefore m = \frac{S_n}{S} = \frac{\frac{n\pi r}{360}}{\frac{t\pi r}{360}} = \frac{n}{t} = \frac{1}{t} \cdot n$$

$\therefore m$ 与 n 成正比例关系，

$\therefore m$ 与 n 关系的大致图像是：



二、填空题（共 48 分，每小题 4 分）

7. 因式分解： $x^2 - 2x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(x-2)$

【解析】

【详解】解： $x^2 - 2x = x(x-2)$.

8. 如果分式 $\frac{1}{x-4}$ 有意义，那么实数 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \neq 4$

【解析】

【详解】解： $\because$ 分式 $\frac{1}{x-4}$ 有意义，

$$\therefore x-4 \neq 0,$$

解得： $x \neq 4$

9. 方程 $\sqrt{3-4x} = 1$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】

$$x = \frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】将方程两边平方转化为一元一次方程求解，求解后需检验根的有效性.

【详解】解： $\sqrt{3-4x}=1$ ，

两边平方，得 $3-4x=1$ ，

移项，得 $-4x=1-3$ ，

合并同类项，得 $-4x=-2$ ，

系数化为1，得 $x=\frac{1}{2}$ ，

检验：当 $x=\frac{1}{2}$ 时，左边 $\sqrt{3-4\times\frac{1}{2}}=1$ = 右边，

因此 $x=\frac{1}{2}$ 是原方程的解.

10. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，那么 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m<1$

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根. 根据根的判别式的意义得到 $\Delta=2^2-4m>0$ ，然后解不等式即可.

【详解】解： $\because$ 一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta=2^2-4m>0,$$

$$\therefore m<1,$$

故答案为： $m<1$.

11. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(1,1)$ 和 $(3,1)$ 两点，将该抛物线向右平移 2 个单位，那么平移后的抛物线的对称轴为_____.

【答案】 直线 $x=4$

【解析】

【分析】 先根据抛物线上纵坐标相等的两点坐标求出原抛物线的对称轴，再根据抛物线平移规律得到平移后抛物线的对称轴.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(1,1)$ 和 $(3,1)$ 两点，两点纵坐标相等，

$\therefore$ 两点关于抛物线的对称轴对称，

$$\therefore \text{原抛物线的对称轴为：直线 } x=\frac{1+3}{2}=2,$$

∴将抛物线向右平移2个单位时，对称轴同步向右平移2个单位，

∴平移后抛物线的对称轴为直线 $x = 2 + 2 = 4$.

12. 从 $-1, 2, 4$ 这三个数中随机抽取其中的两个数，分别记作 a 和 b . 如果点 P 的坐标为 (a, b) , 那么点 P 在第二象限内的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查概率的计算，先列举出所有等可能的结果，再根据第二象限内点的坐标特征找出符合条件的结果，最后利用概率公式求解即可.

【详解】 解： 根据题意，列举所有等可能的点 $P(a, b)$ ，共有6种等可能的结果，

分别为： $(-1, 2)$ ， $(-1, 4)$ ， $(2, -1)$ ， $(2, 4)$ ， $(4, -1)$ ， $(4, 2)$ ，

第二象限内点的坐标特征为横坐标小于0，纵坐标大于0，

符合该特征的点有2个，分别为 $(-1, 2)$ ， $(-1, 4)$ ，

根据概率公式可得点 P 在第二象限内的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

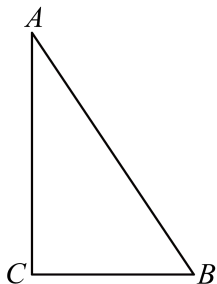
13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 3$ ， $|\overrightarrow{CB}| = 2$ ， 那么 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 利用勾股定理计算 $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$ ， 然后根据向量加法的三角形法则求解.

【详解】 解： 如图，



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = |\overrightarrow{AC}| = 3$ ， $CB = |\overrightarrow{CB}| = 2$ ，

由勾股定理得 $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ，

∴ $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$.

14. DeepSeek 可提供高效、精准的信息检索和智能对话服务. 其用户总数在上线 21 天后达到了 3.36×10^7 , 那么平均每天上线人数用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.6×10^6

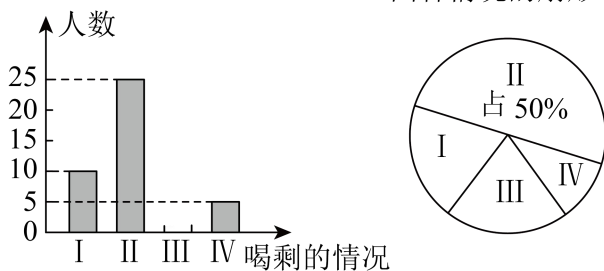
【解析】

【分析】 先求出平均每天上线人数, 再根据科学记数法的要求表示结果, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.

【详解】 解: 由题意得, 平均每天上线人数为 $(3.36 \times 10^7) \div 21 = (3.36 \div 21) \times 10^7 = 0.16 \times 10^7 = 1.6 \times 10^6$.

15. 生活中很多瓶装矿泉水没有喝完便被扔掉, 造成极大的浪费. 为此数学兴趣小组对某次会议所发瓶装矿泉水的使用情况进行统计, 大致可分为四种: I. 全部喝完; II. 约 $\frac{1}{4}$; III. 约一半; IV. 整瓶但基本未喝. 同学们根据统计结果绘制如图所示的两个不完整的统计图, 那么参加这次会议的人中矿泉水剩约一半的人数为_____人.

四种情况人数的条形统计图 四种情况的扇形统计图



【答案】

10

【解析】

【分析】 根据样本推算总体后即可求解.

【详解】 解: 参加这次会议的有: $25 \div 50\% = 50$ (人),

则参加这次会议的人中矿泉水剩约一半的人数为: $50 - 10 - 25 - 5 = 10$ (人).

16. 已知半径为 2 的正多边形的内角和是外角和的 3 倍, 那么这个正多边形的面积为_____.

【答案】 $8\sqrt{2}$

【解析】

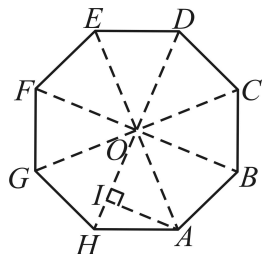
【分析】 先根据正多边形内角和与外角和的关系求出边数, 再将正多边形分解为若干个全等的等腰三角形, 通过计算单个等腰三角形面积, 求和得到正多边形的面积.

【详解】 解: 设正多边形的边数为 n ,

根据题意得, $(n-2) \cdot 180^\circ = 3 \times 360^\circ$

解得 $n=8$,

$\therefore$ 该正多边形为正八边形, 如图正八边形 $ABCDEFGH$, 连接 AE , BF , CG , DH 交于点 O , 过点 A 作 $AI \perp OH$ 于 I ,



$\therefore$ 半径为 2

$\therefore OA = OH = 2$, $\angle AOH = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$,

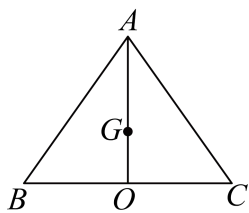
$\therefore AI \perp OH$

$\therefore AI = OA \cdot \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle AOH} = \frac{1}{2} OH \cdot AI = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 正八边形 $ABCDEFGH$ 的面积 $= 8S_{\triangle AOH} = 8\sqrt{2}$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AO \perp BC$, 垂足为点 O , 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $BC = 18$, $AO = 12$, 点 D 为边 AB 上一动点, 如果以点 O 为圆心 OG 为半径的 $\odot O$ 与以点 D 为圆心的 $\odot D$ 相切, 那么 $\odot D$ 的半径 r 的取值范围是_____.

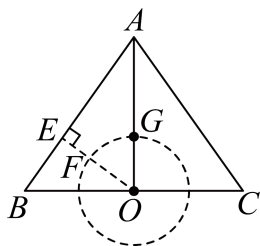


【答案】 $\frac{16}{5} \leq r \leq 8$ 或 $\frac{56}{5} \leq r \leq 16$

【解析】

【分析】 如图, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , 交 $\odot O$ 于点 F , 首先利用三线合一求出 $BO = OC = \frac{1}{2} BC = 9$, 利用勾股定理求出 $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = 15$, 利用等面积法求出 $OE = \frac{36}{5}$, 然后由重心的性质求出 $OG = \frac{1}{3} AO = 4$, 然后根据题意分 $\odot O$ 与 $\odot D$ 外切和 $\odot O$ 与 $\odot D$ 内切两种情况讨论, 分别求解即可.

【详解】 解: 如图, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , 交 $\odot O$ 于点 F ,



$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AO \perp BC$,

$$\therefore BO = OC = \frac{1}{2}BC = 9$$

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = 15$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OE = \frac{1}{2}OB \cdot AO$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 15OE = \frac{1}{2} \times 9 \times 12$$

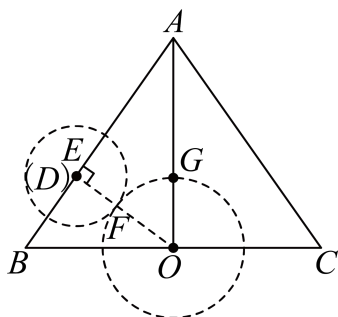
$$\therefore OE = \frac{36}{5}$$

$\because AO = 12$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore OG = \frac{1}{3}AO = 4$$

$\because$ 以点 O 为圆心 OG 为半径的 $\odot O$ 与以点 D 为圆心的 $\odot D$ 相切

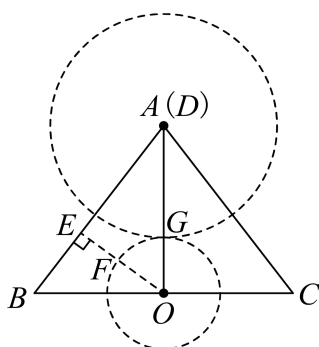
当 $\odot O$ 与 $\odot D$ 外切时, 如图, 当点 D 在点 E 处时,



$$\therefore EF = OE - OF = \frac{36}{5} - 4 = \frac{16}{5},$$

$\therefore \odot D$ 的半径 r 取得最小值, 即 EF 的长度 $\frac{16}{5}$;

如图, 当点 D 在点 A 处时,

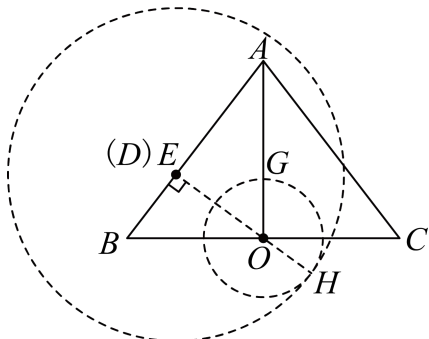


$$\therefore AG = AO - GO = 12 - 4 = 8,$$

$\therefore \odot D$ 的半径 r 取得最大值, 即 AG 的长度 8;

$$\therefore \frac{16}{5} \leq r \leq 8;$$

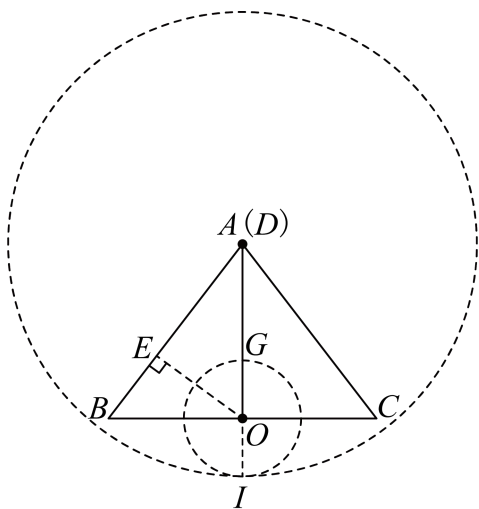
当 $\odot O$ 与 $\odot D$ 内切时, 如图, 当点 D 在点 E 处时, $\odot O$ 与 EO 的延长线交于点 H ,



$$\therefore EH = OE + OH = \frac{36}{5} + 4 = \frac{56}{5},$$

$\therefore \odot D$ 的半径 r 取得最小值, 即 EH 的长度 $\frac{56}{5}$;

如图, 当点 D 在点 A 处时, $\odot O$ 与 GO 的延长线交于点 I ,



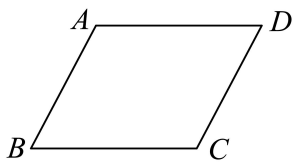
$$\therefore AI = AO + OI = 12 + 4 = 16,$$

$\therefore \odot D$ 的半径 r 取得最大值, 即 AI 的长度 16;

$$\therefore \frac{56}{5} \leq r \leq 16.$$

综上所述, $\odot D$ 的半径 r 的取值范围是 $\frac{16}{5} \leq r \leq 8$ 或 $\frac{56}{5} \leq r \leq 16$.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 将 CD 绕点 D 顺时针旋转 90° , 点 C 恰好落在 BA 延长线上的点 E 处, 作 $\angle BCD$ 的平分线交 DE 的延长线于点 F , 连接 BF , 如果 $\frac{AE}{AB} = \frac{8}{15}$, 那么 $\angle FBE$ 的正切值是_____.

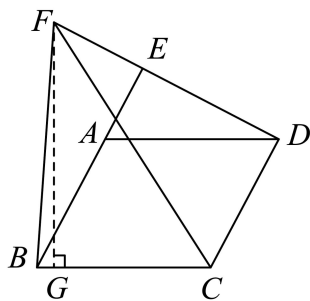


【答案】 $\frac{10}{23}$

【解析】

【分析】如图，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，设 $AE = 8x$ ， $AB = 15x$ ，得到 $BE = BA + AE = 23x$ ，利用勾股定理表示出 $BC = AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = 17x$ ，设 $FE = y$ ，证明出 $\text{Rt}\triangle FGC \cong \text{Rt}\triangle FDC$ (HL)，得到 $GC = CD = 15x$ ，利用勾股定理得到 $FE = 10x$ ，进而求解即可。

【详解】解：如图，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G



$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore \text{设 } AE = 8x, \quad AB = 15x$$

$$\therefore BE = BA + AE = 23x$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore CD = AB = 15x, \quad AB \parallel CD, \quad BC = AD$$

根据题意得， $DE = CD = 15x$ ， $\angle CDE = 90^\circ$

$$\therefore \angle AFE = \angle AED = 90^\circ$$

$$\therefore BC = AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = 17x$$

设 $FE = y$

$\therefore FG \perp BC$ ， FC 平分 $\angle BCD$

$$\therefore FG = FD = FE + DE = y + 15x$$

又 $\therefore \angle FGC = \angle FDC = 90^\circ$ ， $FC = FC$

$$\therefore \text{Rt}\triangle FGC \cong \text{Rt}\triangle FDC \text{ (HL)}$$

$$\therefore GC = CD = 15x$$

$$\therefore BG = BC - GC = 2x$$

$$\because BG^2 + FG^2 = BF^2 = BE^2 + FE^2$$

$$\therefore (2x)^2 + (y + 15x)^2 = (23x)^2 + y^2$$

$$\therefore y = 10x$$

$$\therefore FE = 10x$$

$$\because \angle AFE = 90^\circ$$

$$\therefore \tan \angle FBE = \frac{FE}{BE} = \frac{10x}{23x} = \frac{10}{23}$$

$$\therefore \angle FBE \text{ 的正切值是 } \frac{10}{23}.$$

三、解答题（本大题共 7 题，共 78 分）如无特别说明，本大题作答须写出证明或计算的主要步骤.

19. 计算: $\sqrt[3]{8} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - |\cot 30^\circ - 1| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$

【答案】3

【解析】

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt[3]{8} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - |\cot 30^\circ - 1| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ &= 2 + \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} - |\sqrt{3} - 1| - 2 \\ &= 2 + 2 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) - 2 \\ &= 2 + 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 - 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} 9x < 7x + 6 \\ \frac{1-x}{3} > \frac{x-2}{6} \end{cases}.$$

【答案】

$$x < \frac{4}{3}$$

【解析】

【分析】先分别求出两个不等式的解集，再确定解集的公共部分得出答案.

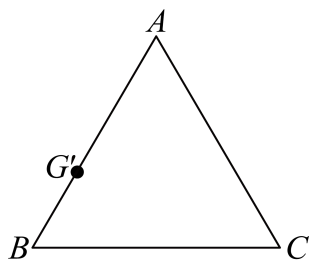
【详解】解：
$$\begin{cases} 9x < 7x + 6 \text{ ①} \\ \frac{1-x}{3} > \frac{x-2}{6} \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①，得 $x < 3$ ；

解不等式②，得 $x < \frac{4}{3}$ ，

所以原不等式组的解集是 $x < \frac{4}{3}$ 。

21. 探究：在铁片上裁剪正方形。



(1) 如图 ABC 是一块等边三角形的废铁片，利用其剪裁出顶点在边上的一个正方形铁片。

I. 根据以下步骤画图：

①在边 AB 上取点 G' (如图)，过 G' 作 $G'D' \perp BC$ ，垂足为 D' ；

②以 $G'D'$ 为边在 ABC 内部作正方形 $G'D'E'F'$ ；

③连接 BF' 并延长交 AC 于点 F ；

④过 F 作 $FE \parallel F'E$ 交 BC 于点 E 、 $FG \parallel F'G'$ 交 AB 于点 G ；过 G 作 $GD \parallel G'D'$ 交 BC 于点 D 。

II. 以上画图步骤作为条件，求证：四边形 $DEFG$ 是正方形。

(2) 如果 ABC 是一块边长为 3、4、5 的直角三角形废铁片，利用其剪裁一个顶点在边上的正方形铁片，那么这个正方形铁片的最大面积为_____。

【答案】(1) 画图见解析；证明见解析

(2) $\frac{144}{49}$

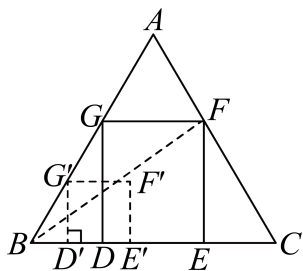
【解析】

【分析】(1) 根据题意画出图形，根据作图得出四边形 $GDEF$ 为矩形，进而根据相似三角形的性质与判定证明 $FE = FG$ ，即可得出四边形 $DEFG$ 是正方形；

(2) 勾股定理求得 ABC 的面积，分两种情况讨论，分别求得正方形的面积，比较大小，即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图所示，



证明: $\because$ 四边形 $G'D'E'F'$ 是正方形, $FE \parallel F'E$, $FG \parallel F'G'$, $GD \parallel G'D'$

$$\therefore \angle GDE = \angle FGD = \angle FED = \angle F'E'D' = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GDEF$ 为矩形,

$$\therefore F'E' = F'G'$$

$$\therefore FE \parallel F'E,$$

$$\therefore \triangle BE'F' \sim \triangle BEF,$$

$$\therefore \frac{FE}{F'E'} = \frac{FB}{F'B},$$

$$\text{同理 } \frac{FG}{F'G'} = \frac{FB}{F'B},$$

$$\therefore \frac{FE}{F'E'} = \frac{FG}{F'G'},$$

$$\text{又 } \therefore F'E' = F'G',$$

$$\therefore FE = FG,$$

$\therefore$ 矩形 $GDEF$ 为正方形.

【小问2详解】

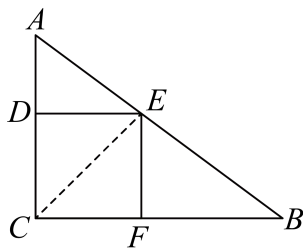
解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$,

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

①当正方形的边在 ABC 的直角边上时,

如图, 连接 CE , 设正方形 $DEFC$ 的边长为 x , 则 $DE = EF = x$,

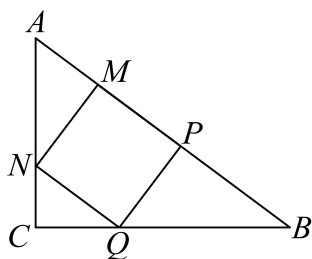


$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot DE + \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{1}{2} \times 3x + \frac{1}{2} \times 4x = \frac{7}{2}x = 6$$

$$\therefore x = \frac{12}{7}$$

$$\therefore \text{正方形的面积为} \left(\frac{12}{7} \right)^2 = \frac{144}{49}$$

②当正方形的边在 ABC 的斜边上时, 如图



设正方形的边长为 x ,

$$\therefore NQ \parallel AB$$

$$\therefore \triangle NCQ \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{CN}{CA} = \frac{NQ}{AB} = \frac{CQ}{CB}, \text{ 即 } \frac{CN}{3} = \frac{x}{5} = \frac{CQ}{4},$$

$$\therefore CN = \frac{3}{5}x, CQ = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore BQ = BC - CQ = 4 - \frac{4}{5}x,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle QPB = 90^\circ, \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle PBQ \sim \triangle CBA$$

$$\therefore \frac{PB}{BC} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{AB}, \text{ 即 } \frac{PB}{4} = \frac{x}{3} = \frac{BQ}{5}$$

$$\therefore BQ = \frac{5}{3}x$$

$$\therefore 4 - \frac{4}{5}x = \frac{5}{3}x$$

$$\text{解得: } x = \frac{60}{37}$$

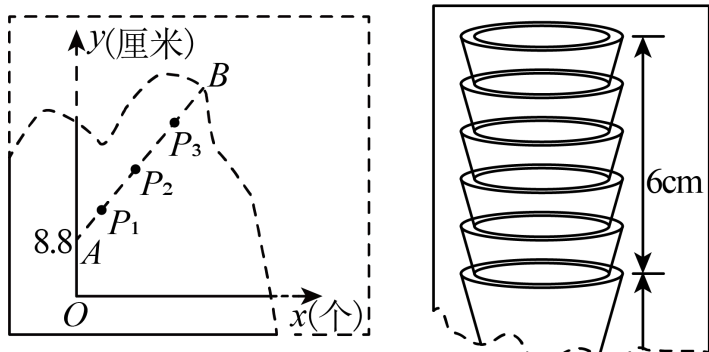
$$\therefore \text{正方形的面积为} \left(\frac{60}{37} \right)^2 = \frac{3600}{1369}$$

$$\therefore \frac{144}{49} > \frac{3600}{1369}$$

$$\therefore \text{这个正方形铁片的最大面积为} \frac{144}{49}$$

22. 小闵在探究纸杯叠放的高度规律时, 得到了一套遗失了部分实验数据的图纸. 图①是一张缺失了部分信

息的函数图纸，实验数据表示的点 P_1 , P_2 , P_3 都落在了线段 AB 上；图②是同一次实验的另一张缺失了部分图像的示意图，图中显示了 6 个相同规格的纸杯叠放后增加的高度.



图①

图②

- (1) 求叠放在一起的纸杯总高度 y (厘米) 关于纸杯数量 x (个) 的函数解析式 (不写定义域);
- (2) 为了保持纸杯清洁, 在最上端的纸杯加装一个盖子以后, 高度增加了 2 厘米, 此时总高度为 46.8 厘米, 求纸杯的数量.

【答案】 (1) $y = 1.2x + 8.8$;

(2) 纸杯的数量为 30 个.

【解析】

【小问 1 详解】

解: 我们可以先分析图②: 6 个纸杯叠放增加的高度是 6cm, 所以每增加 1 个纸杯, 高度增加

$$6 \div (6 - 1) = 1.2 \text{ cm},$$

由图①知, 当 $x = 0$ 时, $y = 8.8$,

$\therefore$ 函数解析式为 $y = 1.2x + 8.8$;

【小问 2 详解】

解: 由题意得 $46.8 - 2 = 1.2x + 8.8$,

解得 $x = 30$,

答: 纸杯的数量为 30 个.

23. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$. 点 D 在边 BC 上, 点 E 在 CB 的延长线上, 连结 AD 、 AE , 过点 E 作 AD 的垂线, 分别交 AB 、 AD 、 AC 于点 M 、 H 和 F , 且 $AE = EF$.

$$\because \angle ABE = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = BE;$$

【小问2详解】

证明：由（1）知， $\angle EAB = \angle FEC$ ， $BD = BE$ ， $\triangle AED$ 是等腰三角形，

$$\therefore \angle EAB = \angle DAB = \angle FEC,$$

$$\text{又} \because \angle AHE = \angle ABE = 90^\circ, \quad \angle ABE = \angle EBM = 90^\circ, \quad \angle EMB = \angle AMH,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle EMB, \quad \triangle AMH \sim \triangle EMB,$$

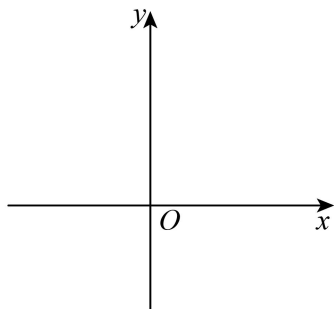
$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{EM}{BM}, \quad \frac{EM}{BM} = \frac{AM}{MH},$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AM}{MH}, \quad \text{即} \quad \frac{AM}{AE} = \frac{MH}{BE},$$

$$\text{又} \because BE = BD = \frac{1}{2}DE,$$

$$\therefore \text{代入上式得} \frac{AM}{AE} = \frac{2MH}{DE}.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，过 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, -3)$ 两点的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ （其中 b 、 c 是常数）与 x 轴的另一个交点为 C ，顶点为 D 。



（1）求这条抛物线的表达式；

（2）如果点 $E(m, n)$ 在抛物线上，且在第四象限，过点 E 作 $EF \parallel x$ 轴，与抛物线的另一个交点为 F ，连接 BC ，作 $EH \parallel y$ 轴，交 BC 于点 H ，连接 FH 。

①当 $\tan \angle FHE = \frac{1}{2}$ 时，求 m 的值；

②抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 关于直线 EF 对称所得新抛物线的顶点为 G ，如果点 G 刚好落在线段 FH 上，求点 E 的坐标。

【答案】（1） $y = x^2 - 2x - 3$

（2）① $m = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}$ 或 $m = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$ ② 点 $E(2, -3)$ 或 $E\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{9}\right)$ 。

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法即可求解；

(2) ①分类在对称轴的左右侧进行讨论，分别把 E, F, H 的坐标用 m 来表示，根据 $\tan \angle FHE = \frac{1}{2}$ 构造方程求解即可；②根据对称得到点 G 的坐标，设出直线 FH 的解析式，将坐标代入求解即可.

【小问 1 详解】

解：将 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, -3)$ 两点代入 $y = x^2 + bx + c$,

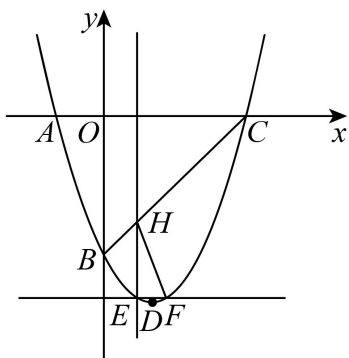
$$\text{得: } \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

则抛物线的表达式为: $y = x^2 - 2x - 3$,

【小问 2 详解】

①当 E 在对称轴 $x = 1$ 的左侧,



由题可知, 点 $B(0, -3)$, $C(3, 0)$,

设直线 BC 的解析式为: $y = kx + b$,

将点 $B(0, -3)$, $C(3, 0)$ 、代入解析式得: $\begin{cases} b = -3 \\ 3k + b = 0 \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases},$$

则直线 BC 的解析式为: $y = x - 3$,

$\therefore$ 点 $E(m, n)$ 在抛物线上,

则点 $E(m, m^2 - 2m - 3)$,

点 $F(2-m, m^2-2m-3)$, $H(m, m-3)$,

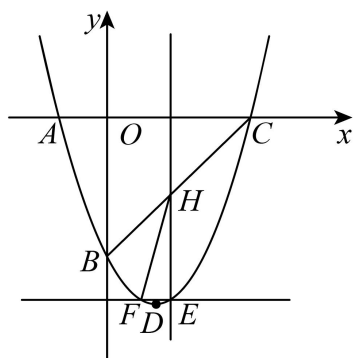
$$\therefore EF = 2-2m, \quad EH = m-3-(m^2-2m-3) = -m^2+3m$$

$$\therefore \tan \angle FHE = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{EF}{EH} = \frac{2-2m}{-m^2+3m} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{解得: } m = \frac{7-\sqrt{33}}{2},$$

当 E 在对称轴 $x=1$ 的右侧,



点 $E(m, m^2-2m-3)$,

点 $F(2-m, m^2-2m-3)$, $H(m, m-3)$,

$$\therefore EF = 2m-2, \quad EH = m-3-(m^2-2m-3) = -m^2+3m$$

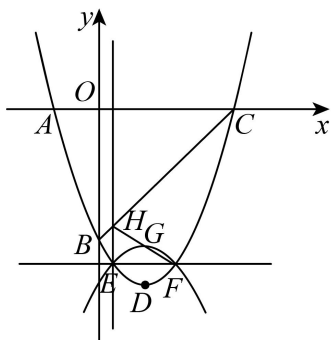
$$\therefore \tan \angle FHE = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{EF}{EH} = \frac{2m-2}{-m^2+3m} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{解得: } m = \frac{\sqrt{17}-1}{2},$$

综上所述: $m = \frac{7-\sqrt{33}}{2}$ 或 $m = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

②根据题意可知



$\therefore$ 点 $E(m, m^2 - 2m - 3)$, 点 $D(1, -4)$

$\therefore$ 点 $G(1, 2m^2 - 4m - 2)$

$F(2 - m, m^2 - 2m - 3)$, $H(m, m - 3)$,

设直线 FH 的解析式为: $y = kx + b$,

则将 $F(2 - m, m^2 - 2m - 3)$, $H(m, m - 3)$ 代入解析式得
$$\begin{cases} (2 - m)k + b = m^2 - 2m - 3 \\ km + b = m - 3 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k = \frac{m^2 - 3m}{2 - 2m} \\ b = m - 3 - \frac{m^3 - 3m^2}{2 - m} \end{cases}$$

则直线 FH 的解析式为: $y = \frac{m^2 - 3m}{2 - 2m}x + m - 3 - \frac{m^3 - 3m^2}{2 - 2m}$,

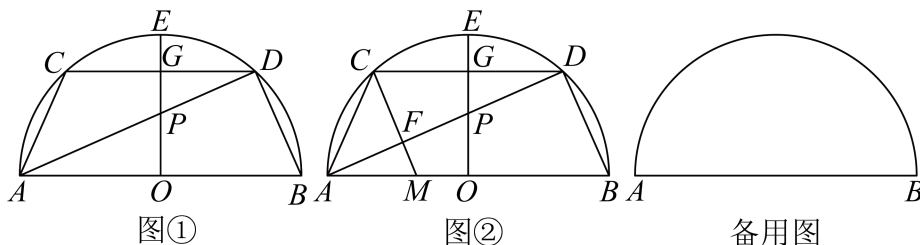
将点 $G(1, 2m^2 - 4m - 2)$ 代入直线 FH 解析式

得: $2m^2 - 4m - 2 = \frac{m^2 - 3m}{2 - 2m} + m - 3 - \frac{m^3 - 3m^2}{2 - 2m}$

解得 $m = 2$ 或 $m = \frac{1}{3}$

点 $E(2, -3)$ 或 $E(\frac{1}{3}, -\frac{32}{9})$.

25. 已知: 如图, AB 为半圆 O 的直径, 点 E 为 $\widehat{CD}$ 的中点, 连接 OE 交弦 CD 于点 G 、交弦 AD 于点 P , 且 $\angle APO = \angle ABD$, 连接 AC 、 BD .



(1) 如图①, 求证: 四边形 $ABDC$ 是等腰梯形;

(2) 点 M 在直径 AB 上 (M 不与 A 、 B 重合), 连接 CM 交 AD 于点 F .

I. 如图②, 当 $CM \perp AD$, 且 M 为 AO 的中点时, 求 $\frac{FM}{CM}$ 的值;

II. 连接 BF , 半圆 O 的半径为 1, $\angle BFM = \angle ACM$. 当 $\triangle AFM$ 为直角三角形时, 求 AM 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) I. $\frac{1}{4}$; II. $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $\angle APO = \angle ABD$, 证明 $\angle AOE = \angle EOB = 90^\circ$, 则点 E 为 $\widehat{AB}$ 的中点, 再根据点 E 为 $\widehat{CD}$ 的中点, 可得 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, 则 $AC = BD$, $AB \parallel CD$, $\angle CAB = \angle DBA$, 即可得证;

(2) I. 设 $AM = a$, 则 $OM = a$, $OA = OB = 2a$. $BM = 3a$, 先证明四边形 $CMBD$ 是平行四边形, 再证明 $\triangle AFM \sim \triangle DFC$, 即可求解; II. 分三种情况讨论: 当 $\angle AFM = 90^\circ$ 时, 当 $\angle AMF = 90^\circ$ 时, 当 $\angle MAF = 90^\circ$ 时, 分别求出 AM 的长.

【小问 1 详解】

解: $\because AB$ 为半圆 O 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABD = 90^\circ.$$

$$\because \angle APO = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle APO = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AOE = \angle EOB = 90^\circ.$$

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BE}.$$

$\because$ 点 E 为 $\widehat{CD}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{CE} = \widehat{DE}.$$

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BD}.$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BC}, \angle CDA = \angle DAB, AC = BD.$$

$$\therefore \angle CAB = \angle DBA, AB \parallel CD.$$

四边形 $ABDC$ 是等腰梯形.

【小问 2 详解】

解: I. 设 $AM = a$,

$\because M$ 为 AO 的中点,

$$\therefore AM = OM = a.$$

$$\therefore OA = OB = 2a.$$

$$\therefore BM = 3a.$$

$\because CM \perp AD$, $\angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore CM \parallel BD.$$

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $CMBD$ 是平行四边形.

$$\therefore CD = BM = 3a.$$

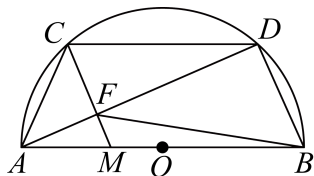
$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle AFM \sim \triangle DFC.$$

$$\therefore \frac{FM}{CF} = \frac{AM}{CD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{FM}{CM} = \frac{1}{4}.$$

II. 如图, 当 $\angle AFM = 90^\circ$ 时,



设 $AM = x$, 则 $BM = 2 - x$,

由 (1) 可得四边形 $CMBD$ 是平行四边形,

$$\therefore CD = BM = 2 - x, \quad CM = BD.$$

$\because \angle BFM = \angle ACM$, $\angle BFM + \angle DFB = \angle ACM + \angle CAF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DFB = \angle CAF.$$

$\because \angle CFA = \angle FDB = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle CAF \sim \triangle BFD.$$

$$\therefore \frac{CF}{BD} = \frac{AF}{FD}.$$

$\because CM \parallel BD$,

$$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{AF}{FD}, \quad \frac{FM}{BD} = \frac{AM}{AB}.$$

$$\therefore \frac{CF}{BD} = \frac{AM}{MB}.$$

$$\therefore \frac{CM - FM}{CM} = \frac{AM}{MB}.$$

$$\therefore 1 - \frac{FM}{CM} = \frac{AM}{MB}.$$

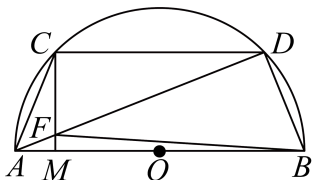
$$\therefore 1 - \frac{FM}{BD} = \frac{AM}{MB}.$$

$$\therefore 1 - \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{MB}.$$

$$\therefore 1 - \frac{x}{2} = \frac{x}{2-x}, \quad \text{解得 } x_1 = 3 + \sqrt{5} \text{ (舍)}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{5}.$$

$$\therefore AM = 3 - \sqrt{5}.$$

如图, 当 $\angle AMF = 90^\circ$ 时,



$$\because \angle BFM = \angle ACM, \quad \angle BFM + \angle FBM = \angle ACM + \angle CAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBM = \angle CAM.$$

$$\because \angle CAM = \angle DBA,$$

$$\therefore \angle FBM = \angle DBA.$$

此时点 F 与点 D 重合, 此种情况不存在.

当 $\angle MAF = 90^\circ$ 时,

$$\because \angle MAF = \angle DAB < 90^\circ,$$

$\therefore$ 此种情况不存在.

$$\text{综上所述, } AM = 3 - \sqrt{5}.$$