

数学

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 23 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤;
3. 填空题答案填入答题纸相应位置, 超出长方形框不得分.

一、选择题 (本大题共 5 题, 每题 4 分, 满分 20 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列实数中, 有理数是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查实数的分类及算术平方根, 熟练掌握实数的分类及算术平方根是解题的关键; 根据实数的分类可进行排除选项.

【详解】 解: $\because \sqrt{4} = 2$,

$\therefore \sqrt{4}$ 是有理数, 而 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 是无理数;

故选 B.

2. 在分式方程 $\frac{x-1}{x^2} + \frac{x^2}{x-1} = 6$ 中, 设 $\frac{x-1}{x^2} = y$, 可得到关于 y 的整式方程为 ()

- A. $y^2 + 6y + 6 = 0$ B. $y^2 - 6y + 6 = 0$ C. $y^2 + 6y + 1 = 0$ D. $y^2 - 6y + 1 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题使用换元法, 将换元后的式子代入原分式方程, 去分母化简即可得到关于 y 的整式方程.

【详解】 解: $\because \frac{x-1}{x^2} = y$,

$$\therefore \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{y},$$

将其代入原分式方程可得 $y + \frac{1}{y} = 6$,

方程两边同乘 y ($y \neq 0$), 得 $y^2 + 1 = 6y$,

整理得: $y^2 - 6y + 1 = 0$.

3. 用纸板剪成的两个全等的直角三角形, 一定能够拼成的四边形是 ()

- A. 直角梯形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查全等直角三角形拼接四边形的性质, 需要根据“一定能够拼成”的要求, 结合不同直角三角形的拼接情况, 判断必然能拼成的图形.

【详解】解: 任意两个全等直角三角形, 将斜边重合拼接, 两个直角分别位于斜边两侧时, 可以拼成一个平行四边形, 且该平行四边形有一个内角为直角, 则一定能拼成矩形, 故 B 选项正确;

对于 A 选项, 两个全等直角三角形无法拼成直角梯形, 故 A 选项错误;

对于 C 选项, 只有当原直角三角形边长满足邻边相等时才能拼成菱形, 不是任意全等直角三角形都可拼成, 故 C 错误;

对于 D 选项, 只有两个全等等腰直角三角形才能拼成正方形, 不是任意全等直角三角形都可拼成, 故 D 错误.

4. 已知两圆的半径长之比为 $5:2$, 且当两圆内切时的圆心距为 9 厘米, 那么当两圆的圆心距增大到 18 厘米时, 这两圆的位置关系是 ()

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 不确定

【答案】C

【解析】

【分析】本题先根据半径比设参数, 利用两圆内切的性质求出两圆半径, 再比较圆心距与两圆半径和、差的大小, 判断两圆位置关系, 用到两圆位置关系与圆心距、半径的关系知识点.

【详解】解: 由于两圆的半径长之比为 $5:2$,

设两圆半径分别为 $R = 5k$ 厘米, $r = 2k$ 厘米, 其中 $k > 0$,

当两圆内切时, 圆心距等于两圆半径的差, 且内切时圆心距为 9 厘米,

$$\therefore R - r = 5k - 2k = 3k = 9,$$

解得 $k = 3$,

$\therefore R = 5 \times 3 = 15$ 厘米、 $r = 2 \times 3 = 6$ 厘米，

$\therefore R + r = 15 + 6 = 21$ 厘米、 $R - r = 15 - 6 = 9$ 厘米，

$\therefore$ 圆心距为 18 厘米，满足 $R - r < 18 < R + r$ ，

此时两圆位置关系为相交.

5. 在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 E 为 AB 上一点，连接 DE 、 CE 。连接 AC 与 DE 交于点 F ， $\triangle ADE$ 为等腰直角三角形， $\triangle CDE$ 为等边三角形。以下结论：① $\angle BCE = 15^\circ$ ；

② $\triangle ADC \cong \triangle AEC$ ；③ $EF = 2BE$ ；④ $S_{\triangle DEC} = \sqrt{3}S_{\triangle AED}$ 。其中结论正确的是（ ）

A. ①②

B. ①③④

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查等腰直角三角形、等边三角形的性质，全等三角形的判定以及勾股定理，根据已知条件推出各角和边的关系，再依次验证四个结论即可。

【详解】解： $\because AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ 。

$\because \triangle ADE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AE = AD$ ， $\angle AED = \angle ADE = 45^\circ$ 。

$\because \triangle CDE$ 为等边三角形，

$\therefore DE = CE = CD$ ， $\angle DEC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - \angle AED - \angle DEC = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ ，

在 $Rt\triangle BCE$ 中， $\angle BCE = 90^\circ - \angle BEC = 15^\circ$ ，

故 ① 正确；

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEC$ 中，

$$AD = AE$$

$$\begin{cases} DC = EC, \\ AC = AC \end{cases}$$

$$AC = AC$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEC$ (SSS)，

故 ② 正确；

设 $AE = AD = a$ ，

则 $DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{2}a$ ，

$$\because AD = AE, \angle DAC = \angle EAC, AF = AF,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle AEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AFD = 90^\circ, EF = DF,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{2}a}{2} \approx 0.707a.$$

$$\because CE = DE = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore BE = CE \cdot \sin 15^\circ = \sqrt{2}a \cdot \sin 15^\circ,$$

$$\therefore 2BE = 2\sqrt{2}a \cdot \sin 15^\circ \approx 0.732a,$$

$$\therefore EF \neq 2BE,$$

故③错误;

$$\because \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFC = 90^\circ,$$

$$\because EC = DE = \sqrt{2}a, EF = \frac{\sqrt{2}a}{2},$$

$$\therefore CF = \sqrt{CE^2 - EF^2} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}DE \times CF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

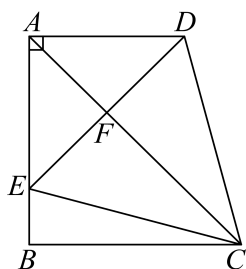
$$\because S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}AE \times AD = \frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle AED}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{1}{2}a^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } S_{\triangle DEC} = \sqrt{3}S_{\triangle AED}.$$

故④正确.

综上, 正确结论为①②④.



二、填空题 (本大题共 10 题, 每题 4 分, 满分 40 分)

6. 计算 $(-2a)^3 =$ _____.

【答案】 $-8a^3$

【解析】

【分析】 根据积的乘方运算法则计算即可得到结果.

【详解】 解: $(-2a)^3 = (-2)^3 \cdot a^3 = -8a^3$.

7. 分解因式: $m^2 - 4n^2 =$ _____.

【答案】 $(m+2n)(m-2n)$

【解析】

【分析】 本题考查了公式法分解因式, 利用平方差公式进行分解即可求解.

【详解】 解: $m^2 - 4n^2 = (m+2n)(m-2n)$,

故答案为: $(m+2n)(m-2n)$.

8. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x-6} = 2$, 那么 $x =$ _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 解题思路为通过平方去掉根号, 将原方程转化为一元一次方程求解, 求解后检验得到最终结果.

【详解】 解: 对 $\sqrt{x-6} = 2$ 两边同时平方得: $x-6=4$,

解得: $x=10$,

检验: 将 $x=10$ 代入原方程得: $\sqrt{10-6} = \sqrt{4} = 2$,

因此, $x=10$ 是原方程的根.

9. 如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第一、三象限, 那么 y 的值随着 x 的值增大而_____. (填“增大”

或“减小”)

【答案】增大

【解析】

【分析】根据题目信息，正比例函数 $y = kx$ 的图像经过第一、三象限，可得 k 的值大于 0，即可得出结论.

【详解】根据正比例函数的性质可知，

如果正比例函数 $y = kx$ 的图像经过第一、三象限，那么 $k > 0$,

那么 y 的值随自变量 x 的值增大而增大.

故答案为：增大.

【点睛】本题考查正比例函数的性质，属于基础题，熟练掌握正比例函数的性质即可解题.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，那么 k 的值是_____.

【答案】

2

【解析】

【分析】方程有两个相等的实数根时， $\Delta = 0$ ，根据该关系列出关于 k 的方程，求解即可得到 k 的值.

【详解】解：∵ $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1) = 8 - 4k = 0,$$

解得： $k = 2$.

11. 在如图所示的月历表中任取 1 天，恰好这一天是星期日的概率是_____.

日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

【答案】 $\frac{2}{15}$

【解析】

【分析】首先根据月历表确定该月的总天数，然后统计出其中是星期日的天数，最后根据概率公式求解即可.

【详解】解：由图可知，该月历表中显示的日期从 1 号到 30 号，共有 30 天，

观察月历表可知，星期日的日期分别为 7 号，14 号，21 号，28 号，共有 4 天，

则恰好这一天是星期日的概率为 $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，点 D 在边 BC 上且 $BD = 2CD$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示 $\overrightarrow{AD} =$ _____.

【答案】

$$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

【解析】

【分析】先求出 $\overrightarrow{BC}$ ，再根据 $BD = 2CD$ 得到 $\overrightarrow{BD}$ ，最后利用向量加法运算求出 $\overrightarrow{AD}$.

【详解】解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}，$$

$\because$ 点 D 在边 BC 上，且 $BD = 2CD$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})，$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} .$$

13. 通常水分子的质量和体积都很小，已知 1 个水分子的质量约是 $3 \times 10^{-26} \text{ kg}$ ，1 滴水（含有水分子数量约 1.7×10^{21} 个）的质量约为_____ kg（用科学记数法表示）

【答案】 5.1×10^{-5}

【解析】

【分析】本题可根据总质量等于单个水分子质量乘以水分子总个数，结合同底数幂的乘法运算法则和科学记数法的要求求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & (3 \times 10^{-26}) \times (1.7 \times 10^{21}) \\ &= (3 \times 1.7) \times (10^{-26} \times 10^{21}) \\ &= 5.1 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

则 1 滴水的质量约为 $5.1 \times 10^{-5} \text{ kg}$.

14. 某商场销售一批衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元. 为了扩大销售，增加盈利，商场采取了

降价措施. 假设在一定范围内, 衬衫的单价每降 1 元, _____. 如果降价后商场销售这批衬衫每天盈利 1250 元, 那么衬衫的单价降了多少元? 如果设衬衫的单价降了 x 元, 根据题意, 得 $(20+2x)(40-x)=1250$. (补填上合适的条件)

【答案】商场平均每天可多售出 2 件

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的应用, 根据所给方程和已知条件分析方程各项的含义, 补全条件即可.

【详解】解: $(20+2x)(40-x)=1250$ 中, $40-x$ 表示降价 x 元后每件衬衫的盈利, $20+2x$ 表示降价 x 元后每天的销售量, 而 $2x$ 是因降价 x 元增加的销售量, 意味着衬衫的单价每降价 1 元, 商场平均每天可多售出 2 件.

15. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, 直线 l 经过边 AB 的中点 O , 将 $\triangle ABC$ 沿直线 l 翻折得到 $\triangle DEF$ (点 A 、 B 、 C 分别与点 D 、 E 、 F 对应), 若 $\triangle DEF$ 的重心 G 在射线 CO 上, 那么 D 到直线 l 的距离为_____.

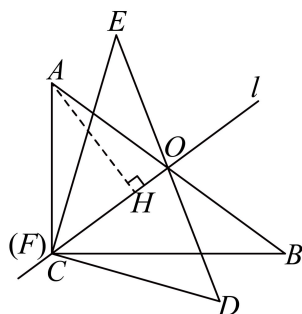
【答案】 $\frac{24}{5}$ 或 $\frac{7}{5}$

【解析】

【分析】本题考查翻折和三角形重心性质, 三角形高的计算; 要分类讨论, G 在线段 CO 上或在 CO 延长线上, 且由对称性知 D 到直线 l 的距离就是 A 到直线 l 的距离, 已知 $\triangle ABC$ 重心在 CO 上, 且 $\triangle DEF$ 的重心 G 在射线 CO 上, 故第一种可能的情况就是 l 与射线 CO 重合, 此时 G 在线段 CO 上, 通过勾股定理和三角形 AOC 面积求出 A 到直线 l 的距离; 第二种可能的情况是 l 与射线 CO 垂直, 此时在, G 在 CO 延长线上, 再次通过勾股定理求解即可.

【详解】解: 有两种情况:

①: l 与射线 CO 重合, 如图所示:



此时 C 和 F 重合, 两三角形重心也重合且在线段 CO 上, 过 A 作 $AH \perp OC$ 于 H ,

由对称性知 D 到直线 l 的距离就是 A 到直线 l 的距离 AH ,

由勾股定理知 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$,

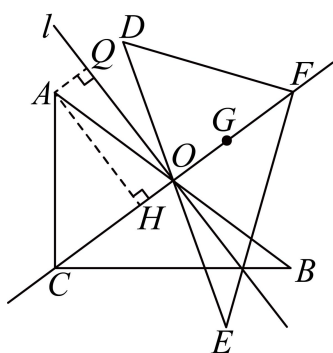
$\because O$ 是 AB 的中点,

$$\therefore OC = \frac{1}{2} AB = 5, S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

$$\because S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AH = \frac{5}{2} AH = 12,$$

$$\therefore AH = \frac{24}{5}, \text{ 即 } D \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } \frac{24}{5};$$

② l 与射线 CO 垂直, 如图所示, 过 A 作 $AQ \perp l$ 于 Q ,



此时 $\triangle DEF$ 的重心 G 在射线 CO 延长线上,

易证得四边形 $AQOH$ 为矩形,

$$\therefore AQ = OH, AH = OQ = \frac{24}{5},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AOQ \text{ 中, 由勾股定理得 } AQ = \sqrt{OA^2 - OQ^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5},$$

由对称性知 D 到直线 l 的距离就是 A 到直线 l 的距离 $AQ = \frac{7}{5}$,

综上所述, D 到直线 l 的距离为 $\frac{24}{5}$ 或 $\frac{7}{5}$.

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 90 分)

16. 计算: $12^{\frac{1}{2}} + |4 - 2\sqrt{3}| - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \frac{2}{2 + \sqrt{3}}.$

【答案】 $-1 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【详解】解： $12^{\frac{1}{2}} + |4 - 2\sqrt{3}| - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

$= 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 9 + 4 - 2\sqrt{3}$

$= -1 - 2\sqrt{3}.$

17. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x + 3 \geq x + 11 \\ \frac{2x + 5}{3} - 1 < 2 - x \end{cases}$$

【答案】无解

【解析】

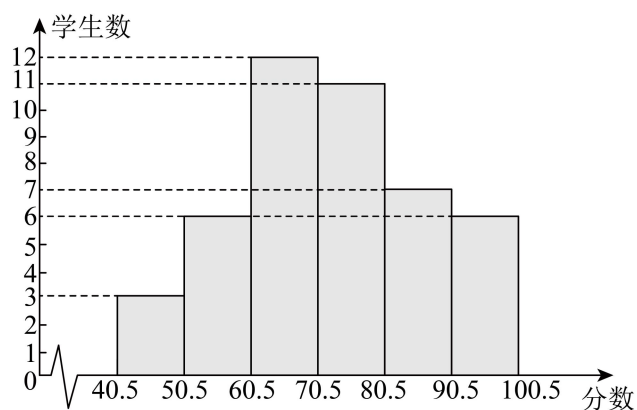
【详解】解：
$$\begin{cases} 2x + 3 \geq x + 11 \text{ ①} \\ \frac{2x + 5}{3} - 1 < 2 - x \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x \geq 8$

解不等式②得： $x < \frac{4}{5}$

则原不等式组无解.

18. A 班学生参加环保知识竞赛，已知竞赛得分都是整数，把参赛学生的成绩整理后分成 6 个小组，画出竞赛成绩的频数分布直方图，如图所示. 回答下列问题：



- (1) A 班共有多少名学生参加知识竞赛？
- (2) 分布在 90.5 ~ 100.5 分这一组的频率是多少？
- (3) 成绩的中位数落在哪个小组数据范围内？
- (4) 求成绩不低于 60.5 分的学生占全部学生人数的百分率.

【答案】(1) 45 名

(2) $\frac{2}{15}$

(3) $70.5 \sim 80.5$

(4) 80%

【解析】

【分析】(1) 把各组人数相加即可求解；

(2) 用分布在 $90.5 \sim 100.5$ 分这一组的频数除以总人数即可求解；

(3) 根据中位数的定义解答即可求解；

(4) 用成绩高于 60 分的学生人数除以总人数即可求解；

本题考查了频数分布直方图，频率和中位数，熟练掌握知识点是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because 3+6+12+11+7+6=45$,

$\therefore A$ 班共有 45 名学生参加知识竞赛；

【小问 2 详解】

解: 由频数分布直方图可得, 分布在 $90.5 \sim 100.5$ 分这一组的频数为 6,

$\therefore$ 分布在 $90.5 \sim 100.5$ 分这一组的频率是 $\frac{6}{45} = \frac{2}{15}$;

【小问 3 详解】

将 45 个学生的成绩由低到高排列, 第 23 个的成绩是中位数, 由各小组的人数可知, 第 23 个成绩落在 $70.5 \sim 80.5$ 小组里,

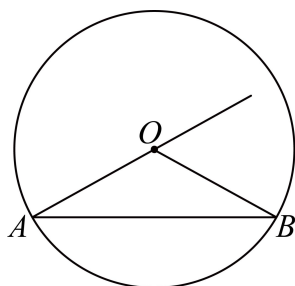
$\therefore$ 成绩的中位数落在 $70.5 \sim 80.5$ 范围内;

【小问 4 详解】

解: $\frac{12+11+7+6}{45} \times 100\% = 80\%$,

答: 成绩不低于 60.5 分的学生人数占全班参赛学生人数的 80%.

19. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 的长为 d , $\angle OAB = \alpha$ ($\alpha > 0$), 令 $m = \cos \alpha$.



(1) 用含 d 和 m 的代数式表示 $\odot O$ 的半径;

(2) 过点 B 作 $BC \perp AO$ ，交 AO 的延长线于点 C ，当 $m = \frac{3}{4}$ 时，求 $\angle OBC$ 的正切值.

【答案】(1) $\frac{d}{2m}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{21}$

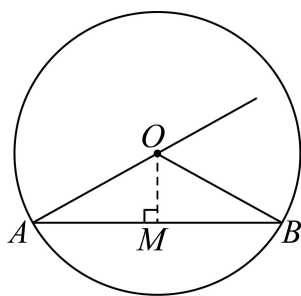
【解析】

【分析】(1) 过圆心作弦的垂线，平分弦且构造直角三角形，结合三角函数把半径用弦长 d 和 α 的三角函数表示；

(2) 先由 $m = \frac{3}{4}$ 得出 AC, AB 的比，再利用直角三角形边角关系设边长、求线段比，最终得到 $\tan \angle OBC$ 值.

【小问 1 详解】

解：如图，作 $OM \perp AB$ 于 M ，



则 $AM = BM = \frac{1}{2}d$ ，

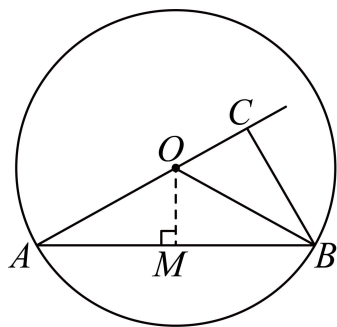
$$\therefore \cos \alpha = \frac{AM}{AO},$$

$$\therefore AO = \frac{AM}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}d}{m} = \frac{d}{2m},$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{d}{2m}$ ；

【小问 2 详解】

解：如图：



$$\because BC \perp AO,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{设 } AC = 3t, \text{ 则 } AB = 4t,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{16t^2 - 9t^2} = \sqrt{7}t,$$

$$\because AO = AC - OC = 3t - OC,$$

$$\therefore BO = AO = 3t - OC,$$

$$\because OC^2 + BC^2 = BO^2,$$

$$\therefore OC^2 + 7t^2 = (3t - OC)^2,$$

$$\therefore OC^2 + 7t^2 = 9t^2 - 6t \cdot OC + OC^2,$$

$$\therefore 2t^2 = 6t \cdot OC,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{3}t,$$

$$\therefore \tan \angle OBC = \frac{OC}{BC} = \frac{\frac{1}{3}t}{\sqrt{7}t} = \frac{\sqrt{7}}{21}.$$

20. 如图 1 是一种测量油箱内油量的装置“油位传感器”示意图. 其中滑动变阻器的滑片跟滑杆连接, 滑杆可以绕固定轴 O 转动, 滑杆的一端固定着一个浮子. 油箱中的油量减少时, 油面下降, 浮子随油面落下, 带动滑杆使滑动变阻器的滑片向上移动, 从而改变电路中电流表的示数. 因此电流表上一定的示数对应着油面一定的高度. 如果把电流表刻度盘上的数值改为相应的油量体积, 就可以直接读出油箱中的油量. 电流 I (单位: A) 与总电阻 R (单位: Ω) 成反比例, 其中 $R = R_0 + R_1$, 已知 $R_0 = 20\Omega$. 可变电阻 R_1 (单位: Ω) 与油量体积 V (单位: L) 之间的关系如图 2 所示, $R_1 \geq 0$. 当油箱内油量体积为 35L 时, 电流表显示为 0.1A.

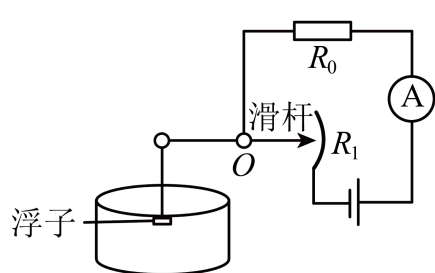


图1

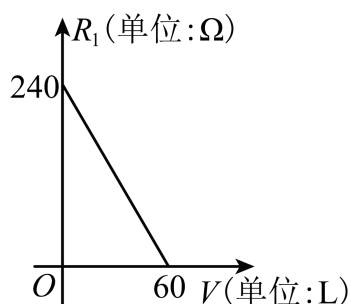


图2

- (1) 当油箱内油量体积为35L时，求总电阻 R 的值；
- (2) 求 I 关于总电阻 R 的函数解析式；
- (3) 当油箱中油量体积满足 $5 \leq V \leq 55$ 时，求电流表显示电流的取值范围。

【答案】 (1) 120Ω

(2) $I = \frac{12}{R}$

(3) $0.05A \leq I \leq 0.3A$

【解析】

【分析】 结合图像求出 R 与 V 的函数关系式，以及利用反比例函数的性质求解电流的取值范围。

【小问1 详解】

解： 设 R_1 与 V 的函数关系式为 $R_1 = kV + b$ ，

由图2可知，图像经过点 $(0, 240)$ 和 $(60, 0)$ ，

代入得：
$$\begin{cases} b = 240 \\ 60k + b = 0 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k = -4 \\ b = 240 \end{cases}$$

$\therefore R_1 = -4V + 240$.

当 $V = 35L$ 时， $R_1 = -4 \times 35 + 240 = 100$ (Ω) ,

$\because R = R_0 + R_1$, 且 $R_0 = 20\Omega$,

$\therefore R = 20 + 100 = 120$ (Ω) .

【小问2 详解】

解： $\because$ 电流 I 与总电阻 R 成反比例，

$$\therefore \text{设 } I = \frac{k'}{R},$$

由 (1) 可知, 当 $V = 35\text{L}$ 时, $R = 120\Omega$, 此时 $I = 0.1\text{A}$,

$$\text{代入得: } 0.1 = \frac{k'}{120},$$

解得: $k' = 12$,

$$\therefore I \text{ 关于电阻 } R \text{ 的函数解析式为 } I = \frac{12}{R}.$$

【小问 3 详解】

解: 由 (1) 可知, $R = 20 + R_1 = 20 + (-4V + 240) = 260 - 4V$,

当 $V = 5$ 时, $R = 260 - 4 \times 5 = 240 (\Omega)$,

当 $V = 55$ 时, $R = 260 - 4 \times 55 = 40 (\Omega)$,

$\therefore$ 当 $5 \leq V \leq 55$ 时, $40 \leq R \leq 240$,

$$\therefore I = \frac{12}{R}, \text{ 且 } 12 > 0,$$

$\therefore I$ 随 R 的增大而减小,

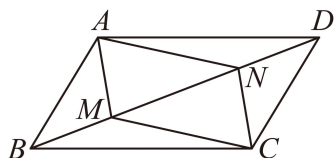
$$\text{当 } R = 40 \text{ 时, } I \text{ 取最大值, } I_{\max} = \frac{12}{40} = 0.3 (\text{A}),$$

$$\text{当 } R = 240 \text{ 时, } I \text{ 取最小值, } I_{\min} = \frac{12}{240} = 0.05 (\text{A}),$$

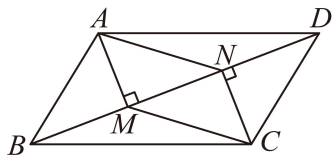
$\therefore$ 电流表显示电流的取值范围 $0.05\text{A} \leq I \leq 0.3\text{A}$.

21. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB < AD$, $\angle ABC$ 为锐角. 要在对角线 BD 上找点 M 、 N ($BM < BN$ 且点 M 、 N 分别与点 B 、 D 不重合), 使 $AN \parallel CM$, 甲、乙、丙分别提出方案 (如图).

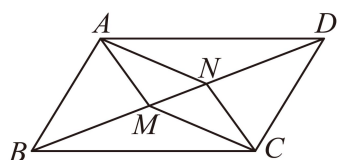
甲: 使 $BM = DN$.



乙: 作 $AM \perp BD$, $CN \perp BD$, 垂足分别为 M 、 N .



丙: 在 BD 上任取一点 M , 连接 AM , 再以 C 为圆心、以 AM 长为半径作弧, 交 BD 于点 N .



(1) 选择其中一种正确的方案进行证明: $AN \parallel CM$;

(2) 根据你在(1)中选择的方案, 延长 AN 交边 CD 于点 P , 若 $\angle DPN = \angle DNC$, 求证: $AB^2 = BM \cdot DM$.

【答案】(1) 选择方案甲或方案乙, 证明见解析

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 选择甲方案, 证明 $\triangle BCM \cong \triangle DAN$, 得到 $\angle AND = \angle CMB$, 则可证明 $\angle ANM = \angle CMN$, 得到 $AN \parallel CM$; 乙方案, 证明如下: 先证明 $AM \parallel CN$, $\angle AMB = \angle CND = 90^\circ$, 再证明 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 得到 $AM = CN$, 则可证明四边形 $AMCN$ 是平行四边形, 得到 $AN \parallel CM$;

(2) 在方案甲中, 证明 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 得到 $\angle AMB = \angle CND$, 证明 $\triangle ABM \sim \triangle NBA$, 得到 $AB^2 = BM \cdot BN$, 再证明 $BN = DM$, 证明 $AB^2 = BM \cdot DM$; 在方案乙中, 由(1)可得 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 则 $BM = DN$, 同理可证明 $AB^2 = BM \cdot DM$.

【小问1详解】

解: 选择甲方案, 证明如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BC = AD, AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADN = \angle CBM$,

又 $\because BM = DN$,

$\therefore \triangle BCM \cong \triangle DAN$ (SAS),

$\therefore \angle AND = \angle CMB$,

$\therefore 180^\circ - \angle AND = 180^\circ - \angle CMB$,

$\therefore \angle ANM = \angle CMN$,

$\therefore AN \parallel CM$;

选择乙方案, 证明如下:

$\because AM \perp BD, CN \perp BD$,

$\therefore AM \parallel CN, \angle AMB = \angle CND = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle CDN,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CDN (\text{AAS}),$$

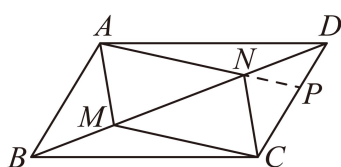
$$\therefore AM = CN,$$

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形,

$$\therefore AN \parallel CM;$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，在方案甲中，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle ABM = \angle CDN, \angle BAN = \angle DPN,$$

$$\text{又} \because BM = DN,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CDN (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AMB = \angle CND,$$

$$\because \angle DPN = \angle DNC,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle NAB,$$

$$\text{又} \because \angle ABM = \angle NBA,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle NBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BN} = \frac{BM}{AB},$$

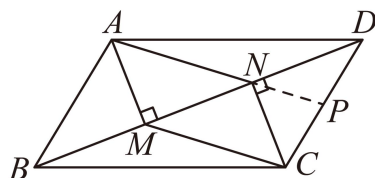
$$\therefore AB^2 = BM \cdot BN,$$

$$\text{又} \because BM + MN = DN + MN,$$

$$\therefore BN = DM,$$

$$\therefore AB^2 = BM \cdot DM;$$

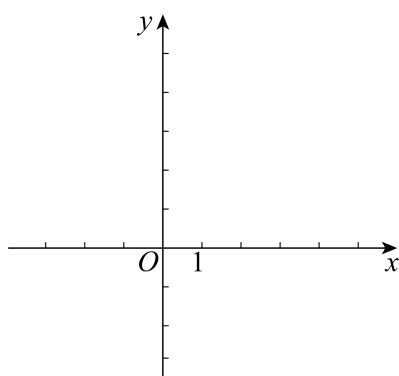
如图所示，在方案乙中，由 (1) 可得 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$,



$\therefore BM = DN$,

$\therefore$ 同理可证明 $AB^2 = BM \cdot DM$.

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $l_1: y = ax^2 + bx$ ($a < 0, b \geq 0$) 经过点 $A(-1, -3)$.



(1) 若点 A 到抛物线 l_1 的对称轴的距离为 2, 求 a 的值;

(2) 若 $a = -\frac{1}{2}$, 点 B 为抛物线上一点, 线段 AB 与 x 轴交于点 C , 且 $\frac{BC}{AC} = \frac{25}{24}$, 求点 B 的坐标;

(3) 将抛物线 l_1 先向右平移 m 个单位, 再向上平移 n 个单位 ($m > 0, n > 0$), 使所得的新抛物线 l_2 经过原点且顶点在直线 $y = -x + 3$ 上. 如果 $m + n = 3$, 求抛物线 l_2 的解析式.

【答案】(1) $a = -1$

(2) $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{8}\right)$

(3) $y = -3\left(x - \frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^2 + \frac{19-\sqrt{37}}{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据对称轴公式可得抛物线 l_1 的对称轴为 y 轴或在 y 轴右侧, 则可求出抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 进而得到 $b = -2a$, 再利用待定系数法求解即可;

(2) 可求出 $l_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$; 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E , 过点 B 作 $BF \perp x$ 轴于点 F , 则 $AE \parallel BF$,

证明 $\triangle ACE \sim \triangle BCF$ ，求出 $BF = \frac{25}{8}$ ，据此可得答案；

(3) 由待定系数法可得 $b = a + 3$ ，则抛物线 l_1 的解析式为 $y = ax^2 + (a + 3)x$ ，可得新抛物线 l_2 的解析式

为 $y = a(x - m)^2 + (a + 3)(x - m) + n$ ，抛物线 l_2 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a} + m, \frac{-b^2}{4a} + n\right)$ ，即可得到

$\frac{-b^2}{4a} + n = \frac{b}{2a} - m + 3$ ，解方程得到 $b = 0$ ， $a = -3$ ；根据新抛物线 l_2 经过原点，得到

$0 = a(0 - m)^2 + (a + 3)(0 - m) + n$ ，解方程求出 m 的值即可得到答案.

【小问 1 详解】

解： $\because l_1: y = ax^2 + bx$ ，

$\therefore$ 抛物线 l_1 的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，

$\because a < 0, b \geq 0$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} \geq 0$ ，即抛物线 l_1 的对称轴为 y 轴或在 y 轴右侧，

$\because$ 点 A 到抛物线 l_1 的对称轴的距离为 2，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1 + 2 = 1$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} = 1$ ，

$\therefore b = -2a$ ，

把点 A 的坐标代入 $y = ax^2 + bx$ 得 $a - b = -3$ ，

$\therefore a + 2a = -3$ ，

$\therefore a = -1$ ；

【小问 2 详解】

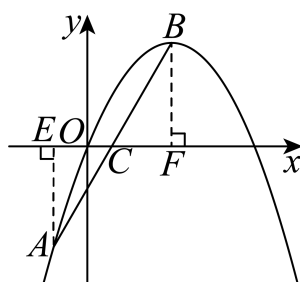
解：当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，则 $l_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + bx$ ，

把点 A 的坐标代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx$ 得 $-\frac{1}{2} - b = -3$ ，

$\therefore b = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore l_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$ ；

如图所示，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ，过点 B 作 $BF \perp x$ 轴于点 F ，则 $AE \parallel BF$ ，



$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{BF}{AE} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{25}{24}, \quad A(-1, -3), \quad \text{即 } AE = 3,$$

$$\therefore \frac{BF}{3} = \frac{25}{24},$$

$$\therefore BF = \frac{25}{8},$$

$$\text{在 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x \text{ 中, 当 } y = \frac{25}{8} \text{ 时, } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{25}{8},$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{8}\right);$$

【小问 3 详解】

解： $\because$ 抛物线 $l_1: y = ax^2 + bx (a < 0, b \geq 0)$ 经过点 $A(-1, -3)$ 。

$$\therefore a - b = -3,$$

$$\therefore b = a + 3,$$

$$\therefore \text{抛物线 } l_1 \text{ 的解析式为 } y = ax^2 + (a + 3)x,$$

$\therefore$ 将抛物线 l_1 先向右平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位 ($m > 0, n > 0$) 后得到新抛物线 l_2 ，

$$\therefore \text{新抛物线 } l_2 \text{ 的解析式为 } y = a(x - m)^2 + (a + 3)(x - m) + n,$$

$$\therefore \text{抛物线 } l_1 \text{ 的顶点坐标为 } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2}{4a}\right),$$

$$\therefore \text{抛物线 } l_2 \text{ 的顶点坐标为 } \left(-\frac{b}{2a} + m, \frac{-b^2}{4a} + n\right),$$

$\therefore$ 抛物线 l_2 的顶点在直线 $y = -x + 3$ 上,

$$\therefore \frac{-b^2}{4a} + n = \frac{b}{2a} - m + 3,$$

$$\therefore m + n = \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a} + 3,$$

$$\therefore m + n = 3,$$

$$\therefore \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a} = 0,$$

$$\therefore b^2 + 2b = 0,$$

$$\therefore b = -2 \text{ (舍去) 或 } b = 0,$$

$$\therefore a = -3;$$

$\therefore$ 新抛物线 l_2 经过原点,

$$\therefore 0 = a(0-m)^2 + (a+3)(0-m) + n,$$

$$\therefore am^2 - am - 3m + n = 0,$$

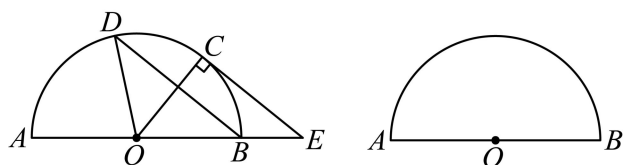
$$\therefore -3m^2 + 3m - 3m + 3 - m = 0,$$

$$\therefore 3m^2 + m - 3 = 0$$

$$\text{解得 } m = \frac{\sqrt{37}-1}{6} \text{ 或 } m = \frac{-\sqrt{37}-1}{6} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \text{新抛物线 } l_2 \text{ 的解析式为 } y = -3\left(x - \frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^2 + 3 - \frac{\sqrt{37}-1}{6} = -3\left(x - \frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^2 + \frac{19-\sqrt{37}}{6}.$$

23. 如图, 点 C 在以 AB 为直径的半圆 O 上, $AB = 4$, 联结 OC , 过点 C 作 $OC \perp CE$, 交 AB 的延长线于点 E , 在 $\widehat{AC}$ 上取点 D , 使 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$, 联结 OD 、 BD .



备用图

(1) 求证: $BD \parallel CE$;

(2) 联结 BC 、 CD , 若四边形 $OECD$ 为梯形, 求四边形 $OBCD$ 的面积;

(3) 直线 CD 与直线 AB 交于点 F ，若 $\triangle CEF$ 为等腰三角形，求 BE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $2\sqrt{3}$

(3) $2\sqrt{2}-2$ 或 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 由垂径定理的推论得到 $OC \perp BD$ ，再由 $OC \perp CE$ ，即可证明 $BD \parallel CE$ ；

(2) 可证明当四边形 $OECD$ 为梯形时，只能是 $CD \parallel OE$ ，可证明 $\triangle COD$ 是等边三角形， $\triangle COB$ 是等边三角形；根据 $S_{\text{四边形}OBCD} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD}$ ，只需要求出 $\triangle COD$ 和 $\triangle COB$ 的面积即可；

(3) 分两种情况：点 F 在点 E 右侧和点 F 在点 E 左侧，画出对应的示意图，讨论求解即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，

$\therefore OC \perp BD$ ，

又 $\because OC \perp CE$ ，

$\therefore BD \parallel CE$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because BD \parallel CE$ ，且 BD 与 OD ， OE 都有交点，

$\therefore CE$ 与 OD ， OE 都有交点，

又 $\because CE$ 与 CD 有交点，

$\therefore$ 当四边形 $OECD$ 为梯形时，只能是 $CD \parallel OE$ ，

$\therefore \angle OCD = \angle COB$ ；

$\because \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，

$\therefore \angle COD = \angle COB$ ，

$\therefore \angle COD = \angle OCD$ ，

$\because OD = OC$ ，

$\therefore \angle ODC = \angle OCD$ ，

$\therefore \angle ODC = \angle OCD = \angle COD$ ，

$\because \angle ODC + \angle OCD + \angle COD = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ODC = \angle OCD = \angle COD = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle BDF = \angle ECF = x,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle BDF + \angle F = 2x,$$

$$\therefore OD = OB,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle OBD = 2x,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle ODB + \angle BDF = 3x;$$

$$\therefore OD = OC,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC = 3x,$$

$$\therefore \angle COF = \angle OCD - \angle F = 2x,$$

$$\therefore \angle COE = \angle CEO,$$

$$\therefore OC = CE = 2,$$

$$\therefore OE = \sqrt{OC^2 + CE^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = OE - OB = 2\sqrt{2} - 2;$$

当点 F 在点 E 左侧时, $\because OC \perp CE$,

$$\therefore \angle OCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle OCF + \angle OCE > 90^\circ,$$

$\therefore$ 此时只存在 $CF = CE$ 这种情况,

$$\therefore \angle E = \angle F,$$

设 $\angle E = \angle F = y$,

$$\therefore BD \parallel CE,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle E = y,$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle OBD = y,$$

$$\therefore \angle DOF = \angle ODB + \angle OBD = 2y,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle F + \angle DOF = 3y,$$

$$\therefore OD = OC,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC = 3y,$$

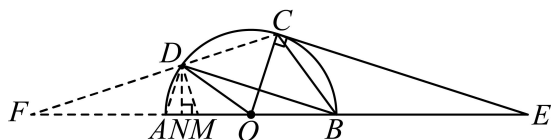
$$\therefore \angle COE = \angle F + \angle OCD = 4y,$$

在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中, $\angle COE + \angle E = 90^\circ$,

$$\therefore y + 4y = 90^\circ,$$

$$\therefore y = 18^\circ;$$

如图所示, 在 OA 上取一点 M , 连接 DA, DM 使得 $DA = DM$, 过点 D 作 $DN \perp OA$ 于点 N ,



$$\therefore OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = 72^\circ,$$

$$\therefore DA = DM,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle DMA = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ, \quad \angle MDO = \angle DMA - \angle MOD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle AOD = \angle MDO,$$

$$\therefore DM = OM = AD;$$

$$\text{又} \because \angle DAM = \angle OAD,$$

$$\therefore \triangle DAM \sim \triangle OAD,$$

$$\therefore \frac{AD}{OA} = \frac{AM}{AD},$$

$$\therefore \frac{AD}{2} = \frac{2-AD}{AD},$$

$$\therefore AD = \sqrt{5} - 1 \text{ 或 } AD = -\sqrt{5} - 1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore AM = OA - OM = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5},$$

$$\therefore DN \perp AM,$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AM = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \angle NDM = \frac{1}{2}\angle ADM = 18^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle NDM = \sin 18^\circ = \frac{MN}{DM} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\therefore OE = \frac{OC}{\sin E} = \frac{2}{\sin 18^\circ} = 2\sqrt{5} + 2,$$

$$\therefore BE = OE - OB = 2\sqrt{5}$$

综上所述， BE 的长为 $2\sqrt{2} - 2$ 或 $2\sqrt{5}$.