

## 初三数学

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列各式中,  $\sqrt{a-4}$  的有理化因式是 ( )

- A.  $\sqrt{a+4}$                       B.  $\sqrt{a-4}$                       C.  $\sqrt{a}+2$                       D.  $\sqrt{a}-2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 只需找到与  $\sqrt{a-4}$  相乘后积不含根号的选项.

【详解】 解:  $\because$  两个含有根式的代数式相乘, 若它们的积不含有根式, 则这两个代数式互为有理化因式.

又  $\because \sqrt{a-4} \cdot \sqrt{a-4} = (\sqrt{a-4})^2 = a-4$ , 结果不含根号, 符合有理化因式的定义.

其余选项与  $\sqrt{a-4}$  相乘后, 结果仍含有根号, 不符合要求.

2. 已知氧原子的直径大约是 0.00000014 毫米, 那么数据 0.00000014 用科学记数法表示是 ( )

- A.  $0.14 \times 10^{-8}$                       B.  $0.14 \times 10^{-7}$                       C.  $1.4 \times 10^{-8}$                       D.  $1.4 \times 10^{-7}$

【答案】 D

【解析】

【详解】 解:  $0.00000014 = 1.4 \times 10^{-7}$ .

3. 下列函数中, 函数值  $y$  随着  $x$  增大而减小的是 ( )

- A.  $y = -x^2$                       B.  $y = -\frac{1}{x}$                       C.  $y = -x$                       D.  $y = -1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查不同函数的增减性, 只需根据各类函数的性质, 逐一判断选项即可得到结果.

【详解】解：对选项 A：  $y = -x^2$  是开口向下的二次函数，对称轴为  $x = 0$ ， $\therefore$  当  $x < 0$  时， $y$  随  $x$  增大而增大， $\therefore$  A 不符合要求；

对选项 B：  $y = -\frac{1}{x}$  是反比例函数， $k = -1 < 0$ ， $\therefore$  在每个象限内  $y$  随  $x$  增大而增大，且在整个定义域不满足  $y$  随  $x$  增大而减小， $\therefore$  B 不符合要求；

对选项 C：  $y = -x$  是一次函数，比例系数为  $-1 < 0$ ， $\therefore$  在全体实数范围内， $y$  随  $x$  增大而减小，C 符合要求；

对选项 D：  $y = -1$  是常函数，函数值不随  $x$  变化而改变， $\therefore$  D 不符合要求。

4. 一只不透明的袋子中，装有 3 个白球和若干个红球，这些球除颜色外都相同，如果搅匀后从中任意摸出一个球，摸到白球的概率为  $\frac{3}{5}$ ，那么红球的个数是（ ）

- A. 2                                      B. 3                                      C. 4                                      D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】设红球个数为  $x$ ，根据摸到白球的概率列方程求解即可。

【详解】解：设红球的个数为  $x$ ，则袋子中总球数为  $(3+x)$  个，

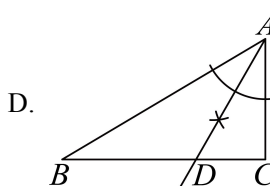
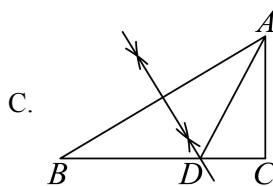
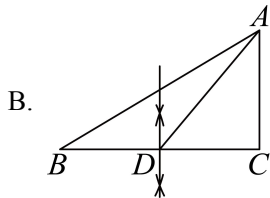
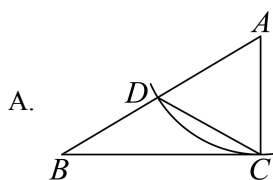
$\therefore$  摸到白球的概率等于白球个数除以总球数，已知摸到白球的概率为  $\frac{3}{5}$ ，

$\therefore$  可得方程  $\frac{3}{3+x} = \frac{3}{5}$ ，

解得  $x = 2$ ，经检验， $x = 2$  是原方程的解，

$\therefore$  红球的个数为 2。

5. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，要求用圆规和直尺作图，把它分成两个三角形，其中一个三角形是等腰三角形，其作法正确的是（ ）



【答案】ACD

【解析】

【分析】本题考查尺规作图和等腰三角形的判定. 对各项的尺规作图分析, 再根据等腰三角形的判定判断即可.

【详解】解: A、由图可知, 以点  $A$  为圆心,  $AC$  为半径画弧, 交  $AB$  于点  $D$ ,

$$\therefore AC = AD,$$

$\therefore \triangle ACD$  是等腰三角形, 符合题意;

B、由图可知, 分别以点  $B$ , 点  $C$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2}BC$  为半径画圆弧, 连接两弧交点, 交  $BC$  于点  $D$ ,

$$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AB.$$

$$\because AB > BC,$$

$$\therefore AC > CD,$$

$\therefore \triangle ACD$  不是等腰三角形.

$$\because AD > CD,$$

$$\therefore AD > BD,$$

$\therefore \triangle ABD$  不是等腰三角形, 不符合题意;

C、由图可知, 分别以点  $B$ , 点  $A$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2}AB$  为半径画圆弧, 连接两弧交点, 交  $BC$  于点  $D$ ,

$$\therefore AD = BD,$$

$\therefore \triangle ABD$  是等腰三角形, 符合题意;

D、由图可知  $AD$  为  $\angle CAB$  的角平分线,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ,$$

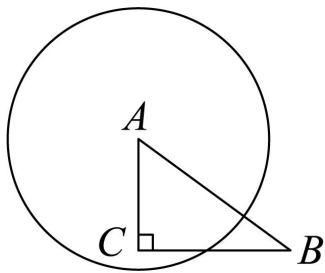
$$\therefore \angle DAB = 30^\circ = \angle B,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$\therefore \triangle ABD$  是等腰三角形, 符合题意;

故选: ACD.

6. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 4$ . 以点  $A$  为圆心,  $r$  为半径作圆, 当点  $C$  在  $\odot A$  内且点  $B$  在  $\odot A$  外时,  $r$  的值可能是 ( )



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】先利用勾股定理可得  $AC = 3$ ，再根据“点  $C$  在  $\odot A$  内且点  $B$  在  $\odot A$  外”可得  $3 < r < 5$ ，由此即可得出答案.

【详解】解：∵ 在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 3,$$

∵ 点  $C$  在  $\odot A$  内且点  $B$  在  $\odot A$  外，

$$\therefore AC < r < AB, \text{ 即 } 3 < r < 5,$$

观察四个选项可知，只有选项 C 符合，

故选：C.

【点睛】本题考查了勾股定理、点与圆的位置关系，熟练掌握点与圆的位置关系是解题关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 2 的相反数是\_\_\_\_\_.

【答案】-2

【解析】

【详解】解：2 的相反数是 -2.

8. 计算： $3^{-2} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【详解】解： $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ .

9. 将二元二次方程  $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$  化为两个一次方程为\_\_\_\_\_.

【答案】 $x - 3y = 0$  和  $x - 2y = 0$

【解析】

【分析】二元二次方程  $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$  的中间项  $-5xy = -2xy - 3xy$ ，根据十字相乘法，分解即可。

【详解】解：∵  $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ ，

$$\therefore (x-2y)(x-3y) = 0,$$

$$\therefore x-3y=0, \quad x-2y=0.$$

故答案为： $x-3y=0$  和  $x-2y=0$ 。

【点睛】本题考查了高次方程解法和分解因式的能力。熟练运用十字相乘法，是解答本题的关键。

10. 请写出一个常数  $c$  的值，使得关于  $x$  的方程  $x^2 + 2x - c = 0$  有两个不相等的实数根，那么  $c$  的值可以是\_\_\_\_\_。

【答案】0(答案不唯一，满足  $c > -1$  即可)

【解析】

【分析】利用一元二次方程根的判别式求出  $c$  的取值范围，即可得到符合要求的  $c$  的值。

【详解】解：∵ 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2x - c = 0$  有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-c) > 0,$$

整理得  $4 + 4c > 0$ ，

解得  $c > -1$ ，

那么  $c$  的值可以是：0(答案不唯一，满足  $c > -1$  即可)。

11. 将二次函数  $y = (x-1)^2 - 4$  的图象向左平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位后经过原点，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_。

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象的平移，掌握平移规律“左加右减”是解题的关键。根据二次函数图象平移规律“左加右减”，得到平移后的函数解析式，再代入原点坐标求解即可。

【详解】解：将二次函数  $y = (x-1)^2 - 4$  的图象向左平移  $m$  个单位后，新函数解析式为  $y = (x+m-1)^2 - 4$ 。

由于图象经过原点，代入点  $(0,0)$  得： $0 = (0+m-1)^2 - 4$ ，

$$\text{即 } (m-1)^2 - 4 = 0,$$

$$\text{整理得 } (m-1)^2 = 4,$$

$$\therefore m-1=2 \text{ 或 } m-1=-2,$$

$$\therefore m=3 \text{ 或 } m=-1,$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore m = 3.$$

故答案为：3.

12. 为助力“校园读书月”活动，某班 20 名同学积极分享自己的课外读物，他们分享的书籍数量（单位：本）如下表. 根据表中的信息，这 20 个数据的中位数是\_\_\_\_\_.

|        |   |   |   |    |    |
|--------|---|---|---|----|----|
| 书籍数量/本 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 人数/人   | 3 | 4 | 5 | 6  | 2  |

【答案】8

【解析】

【分析】根据中位数的定义，先确定 20 个数据从小到大排列后中位数的位置，再找到对应位置的数据计算即可得到结果.

【详解】解：一共有 20 个数据，将数据从小到大排列后，中位数为第 10 个和第 11 个数据的平均数.

分享 4 本的累计人数为 3，

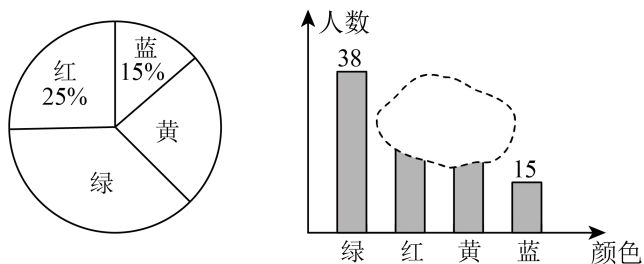
分享 6 本的累计人数为  $3 + 4 = 7$ ，

分享 8 本的累计人数为  $7 + 5 = 12$ ，

因此第 10 个和第 11 个数据都为 8，

则中位数为  $\frac{8+8}{2} = 8$ .

13. 如图，已知小明调查了团队中每位同学最喜欢的颜色（每人只能选择一种颜色），并绘制了不完整的扇形统计图和条形统计图，那么喜欢黄色的同学有\_\_\_\_\_人.



【答案】22

【解析】

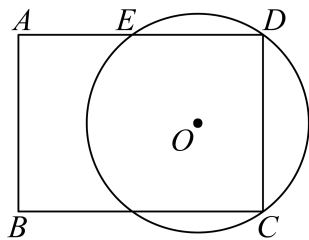
【分析】根据条形统计图和扇形统计图中蓝色部分的数据求出调查的总人数，再计算出红色部分的人数，最后用总人数减去绿、红、蓝三部分的人数即可得出喜欢黄色的人数.

【详解】解：由统计图可知，喜欢蓝色的有 15 人，占总人数的 15%，则调查的总人数为  $15 \div 15\% = 100$  (人).

喜欢红色的人数为  $100 \times 25\% = 25$  (人).

喜欢黄色的人数为  $100 - 38 - 25 - 15 = 22$  (人).

14. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 8$ ,  $AD = 11$ ,  $\odot O$  经过点  $C$ 、 $D$  和  $AD$  边上的点  $E$ , 如果  $\odot O$  的半径是 5, 那么  $AE$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】 5

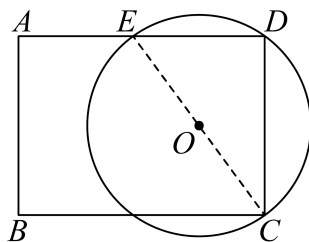
【解析】

【分析】根据矩形的性质得出  $CD = AB = 8$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ , 利用  $90^\circ$  的圆周角所对的弦是直径可得  $CE$  为直径, 在  $\text{Rt}\triangle CDE$  中利用勾股定理求出  $DE$  的长, 最后根据线段的和差求解即可.

【详解】解:  $\because$  在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 8$ ,  $AD = 11$ ,

$\therefore CD = AB = 8$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,

如图: 连接  $CE$ ,



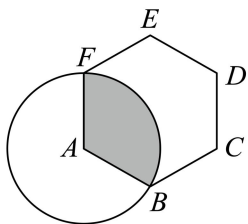
$\because \angle ADC = 90^\circ$ ,

$\therefore CE$  是  $\odot O$  的直径, 即  $CE = 10$ ,

$\therefore ED = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ ,

$\therefore AE = AD - ED = 11 - 6 = 5$ .

15. 如图, 以正六边形  $ABCDEF$  的顶点  $A$  为圆心,  $AB$  的长为半径画圆, 如果图中阴影部分的面积为  $3\pi$ , 那么该正六边形  $ABCDEF$  的边长是\_\_\_\_\_.



【答案】 3

【解析】

【分析】根据正多边形内角和公式求出扇形的圆心角，然后按扇形面积公式计算即可.

【详解】解：∵正六边形的内角是  $\frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ ，阴影部分的面积为  $3\pi$ ，

设正六边形的边长为  $r$ ，

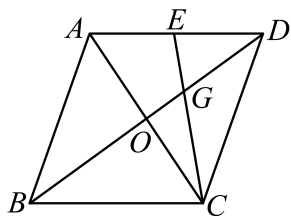
$$\therefore \frac{120\pi \cdot r^2}{360} = 3\pi,$$

解得  $r = 3$ .

则正六边形的边长为 3.

16. 如图，在  $\square ABCD$  中，对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ ， $G$  为  $\triangle ACD$  的重心，连接  $CG$  并延长交  $AD$  于点  $E$ ，

设  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，那么用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示  $\overrightarrow{ED}$  是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质三角形法则求出  $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ，根据重心的性质，相似三角形的判定与性质求出  $ED = \frac{1}{2}BC$ ，即可求解.

【详解】解：∵在  $\square ABCD$  中，对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，

$$\therefore AD \parallel BC, \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

∵  $G$  为  $\triangle ACD$  的重心，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}CG,$$

∵  $AD \parallel BC$ ，

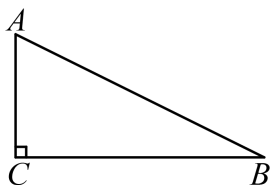
$$\therefore \triangle EDG \sim \triangle CBG,$$

$$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore ED = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

17. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $\tan B = \frac{1}{2}$ . 点  $D$  在边  $AB$  上, 点  $E$  在边  $BC$  上, 联结  $DE$ , 把  $BDE$  沿  $DE$  翻折得到  $FDE$ , 联结  $AF$ 、 $AE$ , 如果四边形  $AFDE$  为平行四边形, 那么  $CE$  的长是\_\_\_\_\_.

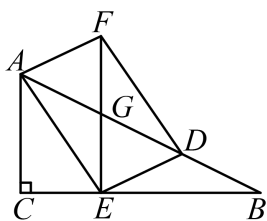


【答案】2

【解析】

【分析】 设  $AD$  与  $EF$  交于点  $G$ , 根据正切的定义得到  $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ , 求出  $BC = 2AC = 8$ , 根据勾股定理得到  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{5}$ , 根据翻折的性质得到  $\angle DFE = \angle B$ ,  $FD = BD$ , 设  $FD = BD = x$ , 根据平行四边形的性质得到  $AE \parallel FD$ ,  $AE = FD = x$ ,  $AG = DG = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{5} - \frac{1}{2}x$ , 通过证明  $\triangle AEG \sim \triangle ABE$ , 得到  $\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AE}$ , 列出关于  $x$  的方程, 求出  $x$  的值, 得到  $AE = 2\sqrt{5}$ , 最后在  $\text{Rt}\triangle ACE$  中利用勾股定理即可求解.

【详解】解: 如图, 设  $AD$  与  $EF$  交于点  $G$ ,



在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ ,

$$\therefore BC = 2AC = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{5},$$

$\therefore BDE$  沿  $DE$  翻折得到  $FDE$ ,

$$\therefore \angle DFE = \angle B, \quad FD = BD,$$

设  $FD = BD = x$ , 则  $AD = AB - BD = 4\sqrt{5} - x$ ,

$\therefore$  四边形  $AFDE$  为平行四边形,

$$\therefore AE \parallel FD, AE = FD = x, AG = DG = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{5} - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle AEG,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle B,$$

$$\text{又} \because \angle EAG = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AE}, \text{ 即 } \frac{x}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - \frac{1}{2}x}{x},$$

$$\text{整理得: } x^2 + 2\sqrt{5}x - 40 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2\sqrt{5}, x_2 = -4\sqrt{5} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACE \text{ 中, } CE = \sqrt{AE^2 - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2,$$

即  $CE$  的长是 2.

18. 已知抛物线  $C_1: y = a(x-m)^2 + p$  和  $C_2: y = a(x-p)^2 + m$ , 它们的顶点分别为  $(m, p)$  和  $(p, m)$ , 我们称  $C_1$  和  $C_2$  互为“反顶点抛物线”. 如果抛物线  $C_1: y = x^2 - 2kx + k^2 + 3$  和  $C_2$  互为“反顶点抛物线”, 且  $C_1$  的顶点在  $C_2$  上, 那么  $k$  的值是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $k = 3$  或  $k = 2$

**【解析】**

**【分析】** 利用二次函数顶点解析式以及待定系数法进行求解.

**【详解】** 解:  $\because C_1: y = x^2 - 2kx + k^2 + 3 = (x-k)^2 + 3$ ,

$\therefore$  顶点坐标为  $(k, 3)$ ,

根据题意得,  $C_2: y = (x-3)^2 + k$ ,

将  $(k, 3)$  代入  $C_2$  解析式得,

$$(k-3)^2 + k = 3$$

解得  $k = 3$  或  $k = 2$ .

**三、解答题:** (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值:  $\frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$ . 其中  $x = \sqrt{2}$ .

【答案】  $\frac{2}{(x+1)^2}$ ;  $6-4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先根据分式混合运算法则进行化简, 然后再代入数据求值即可.

【详解】 解:  $\frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \div \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2}{(x+1)^2},$$

把  $x = \sqrt{2}$  代入得: 原式  $= \frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{2}{2+1+2\sqrt{2}} = 6-4\sqrt{2}$ .

【点睛】 本题主要考查了分式化简求值, 解题的关键是熟练掌握分式混合运算法则, 准确计算.

20. 解不等式组: 
$$\begin{cases} 3(x+1) \geq x+5 & \text{①} \\ 10 - \frac{5+3x}{2} > x & \text{②} \end{cases}$$

【答案】  $1 \leq x < 3$

【解析】

【分析】 分别求出不等式组中两个不等式的解集, 取两个解集的公共部分, 即可得到不等式组的解集.

【详解】 解: 解不等式①得:  $3(x+1) \geq x+5$

$$3x+3 \geq x+5$$

$$2x \geq 2 \quad x \geq 1$$

解不等式②得:  $10 - \frac{5+3x}{2} > x$

不等式两边同乘 2 得  $20 - (5+3x) > 2x$

$$15 - 3x > 2x$$

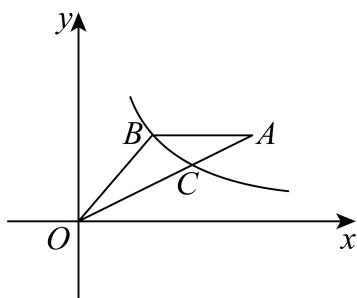
$$15 > 5x$$

$$x < 3$$

∴ 不等式组的解集为  $1 \leq x < 3$ .

21. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知双曲线经过  $\triangle OAB$  顶点  $B$  和边  $OA$  上的一点  $C$ ,  $OC = 2AC$ ,

$OC = \sqrt{5}$ . 设边  $OA$  与  $x$  轴正半轴的夹角为  $\alpha$ , 且  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .



(1) 求双曲线的表达式;

(2) 如果  $AB \parallel x$  轴, 求点  $B$  的坐标.

【答案】(1)  $y = \frac{2}{x}$

(2)  $\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$

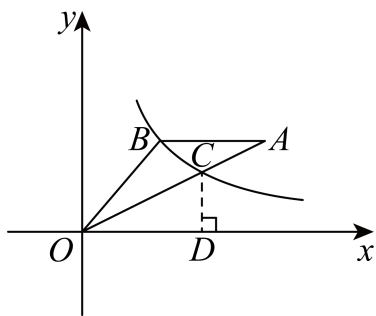
【解析】

【分析】(1) 如图: 过  $C$  作  $CD \perp x$  轴于  $D$ , 解直角三角形可得  $CD = 1$ 、 $OD = 2$ , 即  $C(2, 1)$ ; 再利用待定系数法求解即可;

(2) 先求得  $OA = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ , 如图: 过  $A$  作  $AE \perp x$  轴于  $E$ , 再解直角三角形可得  $AE = \frac{3}{2}$ , 即点  $A$  的纵坐标为  $\frac{3}{2}$ ; 再根据  $AB \parallel x$  轴可得点  $B$  的纵坐标为  $\frac{3}{2}$ , 然后再求点  $B$  的横坐标即可解答.

【小问 1 详解】

解: 如图: 过  $C$  作  $CD \perp x$  轴于  $D$ ,



$$\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad OC = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \text{即} \frac{CD}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \text{解得: } CD = 1,$$

$$\therefore OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = 2,$$

$$\therefore C(2,1),$$

设双曲线的表达式为  $y = \frac{k}{x}$ ,

$\because C$  在双曲线上,

$$\therefore 1 = \frac{k}{2}, \quad \text{解得: } k = 2,$$

$$\therefore \text{双曲线的表达式为 } y = \frac{2}{x}.$$

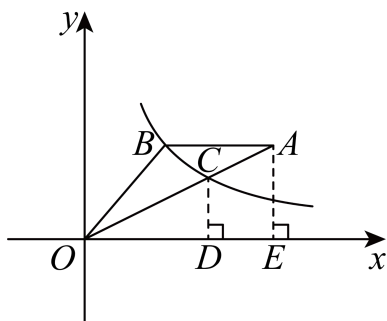
**【小问 2 详解】**

解:  $\because OC = \sqrt{5}, \quad OC = 2AC,$

$$\therefore AC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$\therefore OA = OC + AC = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

如图: 过  $A$  作  $AE \perp x$  轴于  $E$ ,



$$\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad OA = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{AE}{OA} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \frac{AE}{\frac{3}{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得: } AE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的纵坐标为 } \frac{3}{2},$$

$$\therefore AB \parallel x \text{ 轴},$$

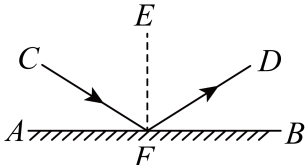
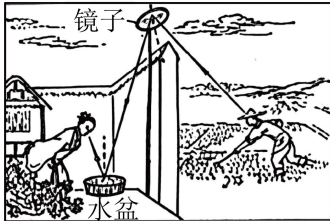
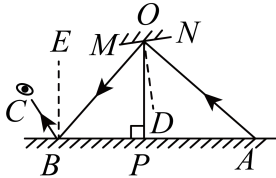
$$\therefore \text{点 } B \text{ 的纵坐标为 } \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 在双曲线上},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的横坐标为 } \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore B\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

22. 根据以下素材，完成任务.

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 素材一 | <p>如图 1，如果 <math>EF \perp</math> 平面镜 <math>AB</math>，入射光线 <math>CF</math> 经平面镜 <math>AB</math> 反射，得到反射光线 <math>FD</math>，那么反射角 <math>\angle DFE</math> 等于入射角 <math>\angle CFE</math>，即 <math>\angle DFE = \angle CFE</math>.</p>                                                                                                                                                   |  <p>图1</p>  |
| 素材二 | <p>汉代初年的《淮南万毕术》中记载：“取大镜高悬，置水盆于其下，则见四邻……”. 意思是拿一面大的镜子，高高地悬挂起来，在它的下方放置一个盛满水的盆子，就能（从水盆里）看见周围邻居（的景象），如图 2 所示.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                      |  <p>图2</p> |
| 素材三 | <p>图 3 是素材二中图 2 的示意图，将水盆记作点 <math>B</math>，墙角记为点 <math>P</math>，邻居记作点 <math>A</math>，镜子（平面镜）记作 <math>MN</math>，<math>OD \perp MN</math> 于点 <math>O</math>，入射光线 <math>AO</math> 经平面镜 <math>MN</math> 反射，得到反射光线 <math>OB</math>，<math>BE \perp AB</math> 于点 <math>B</math>，<math>OB</math> 又作为入射光线通过水盆 <math>B</math> 反射得到反射光线 <math>BC</math>，进入观察者的眼中（抽象为点 <math>C</math>）. 已知</p> |  <p>图3</p> |

|         |                                                                                                         |  |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|         | $OP \perp AB$ 于点 $P$ , $\angle AOD = 45^\circ$ ,<br>$\angle CBE = 37^\circ$ , 水盆到墙角的距离 $BP = 1.8$<br>米. |  |
| 素材<br>四 | 参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$ , $\cos 37^\circ \approx 0.8$ , $\tan 37^\circ \approx 0.75$ .        |  |

问题解决:

- (1) 任务一: 求邻居  $A$  到墙角  $P$  的距离;
- (2) 任务二: 如果入射光线  $OA$  不变, 将镜子  $MN$  绕点  $O$  顺时针旋转  $8^\circ$ , 在  $OP$  左侧的观察者仍能通过水盆  $B$  看到邻居  $A$ , 那么水盆  $B$  应向左还是右平移? 平移多少米?

【答案】(1) 3.2m

(2) 水盆  $B$  应向左平移, 且平移 1.4m

【解析】

【分析】(1) 先求出  $\angle BAO = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$ ,  $\angle BOP = \angle OBE = 37^\circ$ , 再解直角三角形得出  $OP = 2.4\text{m}$ , 再根据  $\tan \angle BAO = \frac{OP}{AP}$ , 求出  $AP = 2.4 \times \tan 37^\circ = 2.4 \times 0.75 = 1.8(\text{m})$  即可;

(2) 先证明此时  $OD$  与  $OP$  重合, 解直角三角形得出  $BP = \frac{OP}{\tan 37^\circ} = \frac{2.4}{0.75} = 3.2(\text{m})$ , 求出结果即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意可得:  $\angle BOD = \angle AOD = 45^\circ$ ,  $\angle OBE = \angle CBE = 37^\circ$ ,

$$\therefore \angle AOB = 2 \times 45^\circ = 90^\circ, \quad \angle AON = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore EB \perp BP,$$

$$\therefore \angle EBP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBP = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ,$$

$$\therefore OP \perp AB,$$

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPA = \angle EBP,$$

$$\therefore OP \parallel BE,$$

$$\therefore \angle BOP = \angle OBE = 37^\circ,$$

$$\therefore \tan 37^\circ = \frac{BP}{OP}, \quad \angle AOP = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ,$$

$$\text{即 } 0.75 = \frac{1.8}{OP},$$

$$\text{解得: } OP = 2.4\text{m},$$

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{OP}{AP},$$

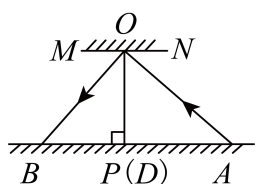
$$\therefore \tan 37^\circ = \frac{2.4}{AP},$$

$$\therefore AP = \frac{OP}{\tan 37^\circ} = \frac{2.4}{0.75} = 3.2(\text{m}),$$

即邻居  $A$  到墙角  $P$  的距离为  $3.2\text{m}$ ;

【小问 2 详解】

解: 当镜子  $MN$  绕点  $O$  顺时针旋转  $8^\circ$  后, 如图所示:



$$\text{此时 } \angle AON = 45^\circ - 8^\circ = 37^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle AOD = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ,$$

根据解析 (1) 可得:  $\angle AOP = 53^\circ$ ,

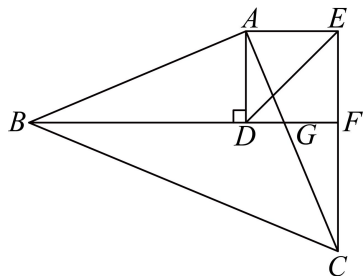
$\therefore$  此时  $OD$  与  $OP$  重合,

$$\therefore \text{此时 } \angle OBP = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ,$$

$$\therefore BP = \frac{OP}{\tan 37^\circ} = \frac{2.4}{0.75} = 3.2(\text{m}),$$

$\therefore$  点  $B$  向左移动, 且移动距离为:  $3.2 - 1.8 = 1.4(\text{m})$ .

23. 如图,  $ABC$  和  $ADE$  都是等腰直角三角形,  $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ,  $AB = AC$ ,  $AD = AE$ , 连接  $BD$ 、 $CE$ ,  $\angle ADB = 90^\circ$ , 延长  $BD$  交  $CE$  于点  $F$ , 交  $AC$  于点  $G$ .



(1) 求证: 四边形  $ADFE$  为正方形;

(2) 如果  $\angle FBC = \angle ACF$ , 求证:  $2AD^2 = FG \cdot FB$ .

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先利用已知的两个直角  $\angle BAC$ 、 $\angle DAE$ ，通过减去公共角  $\angle DAC$ ，推导出  $\angle BAD = \angle CAE$ ；再结合  $AB = AC$ 、 $AD = AE$ ，用  $SAS$  证明  $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，得到  $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$ ；接着结合  $\angle DAE = 90^\circ$ ，判定四边形  $ADFE$  是矩形，最后根据邻边  $AD = AE$ ，得出四边形  $ADFE$  为正方形；

(2) 连接  $AF$ ，先由 (1) 中正方形  $ADFE$  的性质，结合勾股定理得到  $AF^2 = 2AD^2$ ；再利用等腰直角  $\triangle ABC$  的角度关系和外角定理，推导出  $\angle FAG = \angle ABF$ ；随后通过两角对应相等证明  $\triangle AFG \sim \triangle BFA$ ，得到比例式  $\frac{FG}{AF} = \frac{AF}{FB}$ ，交叉相乘后结合  $AF^2 = 2AD^2$ ，证得  $2AD^2 = FG \cdot FB$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$ ，即  $\angle BAD = \angle CAE$ ，

$\because$  在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACE$  中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS)$

$\therefore \angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\because \angle DAE = 90^\circ, \angle ADF = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$ ，

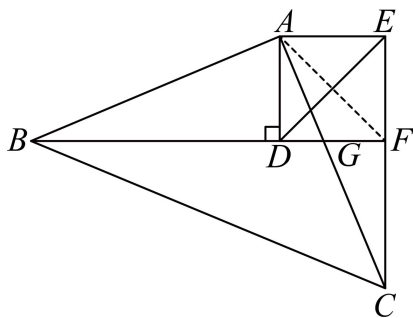
$\therefore$  四边形  $ADFE$  是矩形，

$\because AD = AE$ ，

$\therefore$  四边形  $ADFE$  为正方形。

【小问 2 详解】

证明：连接  $AF$ ，



$\because$  四边形  $ADFE$  是正方形， $AF$  是正方形的对角线，

$\therefore AD = DF$ ， $\angle ADF = 90^\circ$ ， $\angle AFB = 45^\circ$ ，

由勾股定理得:  $AF^2 = AD^2 + DF^2 = AD^2 + AD^2 = 2AD^2$ ,

$\therefore AB = AC, \angle BAC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$ , 即  $\angle ABF + \angle FBC = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle FBC = \angle ACF$ ,

$\therefore \angle ABF + \angle ACF = 45^\circ$ ,

$\therefore$  由 (1) 知  $EC \perp BF$ , 即  $\angle BFC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle CFG = \angle BAG = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AGF$  是  $\triangle CGF$  的外角,

$\therefore \angle AGF = \angle CFG + \angle ACF = 90^\circ + \angle ACF$ ,

在  $\triangle AFG$  中, 由内角和定理:  $\angle AGF = 180^\circ - \angle AFB - \angle FAG = 180^\circ - 45^\circ - \angle FAG = 135^\circ - \angle FAG$ ,

$\therefore 90^\circ + \angle ACF = 135^\circ - \angle FAG$ ,

整理得  $\angle ACF + \angle FAG = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle ABF + \angle ACF = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle FAG = \angle ABF$ ,

$\therefore$  在  $\triangle AFG$  和  $\triangle BFA$  中

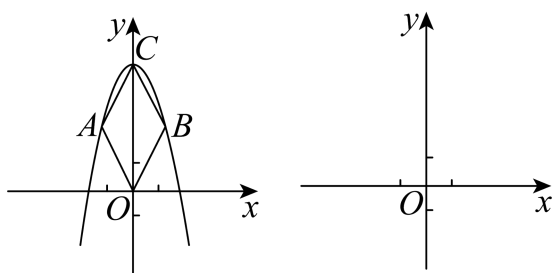
$\angle FAG = \angle FBA, \angle AFG = \angle BFA$ ,

$\therefore \triangle AFG \sim \triangle BFA$ ,

$\therefore \frac{FG}{AF} = \frac{AF}{FB}$ , 即  $AF^2 = FG \cdot FB$ , 代入  $AF^2 = 2AD^2$ ,

得:  $2AD^2 = FG \cdot FB$ .

24. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ .



备用图

(1) 画抛物线时, 如果列出的两组数据如表 (信息不完整) 所示, 请直接写出该抛物线的对称轴, 并求此时  $a$  和  $c$  之间的数量关系;

|     |     |    |     |   |     |
|-----|-----|----|-----|---|-----|
| $x$ | ... | -1 | ... | 1 | ... |
|-----|-----|----|-----|---|-----|

|     |     |   |     |   |     |
|-----|-----|---|-----|---|-----|
| $y$ | ... | 2 | ... | 2 | ... |
|-----|-----|---|-----|---|-----|

(2) 已知点  $C$  为抛物线与  $y$  轴的交点, 点  $A$ 、 $B$  在抛物线上, 连接  $OA$ 、 $AC$ 、 $CB$  和  $OB$ .

①如果四边形  $OACB$  为正方形, 那么  $b$  的值是\_\_\_\_\_,  $a$  和  $c$  之间的数量关系是\_\_\_\_\_;

②如图, 当  $a < 0$  时, 已知四边形  $OACB$  为菱形,  $\cot \angle AOC = 2$ . 点  $P$  在抛物线上且横坐标为 2, 连接  $PA$ 、 $PC$ , 如果  $\triangle PAC$  的面积为 12, 求抛物线的表达式.

**【答案】** (1) 抛物线的对称轴是  $x = 0$ ,  $a + c = 2$

(2) ①  $b = 0$ ,  $ac = -2$

②  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 16$

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据表中两个点的坐标可知, 抛物线经过点  $(-1, 2)$  和  $(1, 2)$ , 并且这两点对称, 所以可知对称轴为  $x = 0$ ;

(2) 根据正方形的性质可知抛物线的对称轴是  $x = 0$ , 所以  $b = 0$ ; 根据正方形的对角线互相平分且相等, 把点  $A$ 、 $B$  的坐标表示出来, 并表示出  $AB$  的长度, 根据  $AB = OC$  找出  $a$  和  $c$  的关系;

(3) 根据菱形的性质, 可知点  $A$  的坐标  $\left(-\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right)$ , 把点  $A$  的坐标代入抛物线的解析式, 可得  $\therefore$  抛物线的解析式为  $y = ax^2 - \frac{8}{a}$ , 点  $A$  的坐标  $\left(\frac{2}{a}, -\frac{4}{a}\right)$ , 点  $P$  的坐标为  $\left(2, 4a - \frac{8}{a}\right)$ , 用待定系数法求出直线  $AP$  的解析式, 根据解析式求出点  $F$  的坐标, 从而可知  $CF = 4$ , 根据  $\triangle PAC$  的面积为 12, 可得

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{4}\right) \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 12$ , 解方程求出  $c$  的值, 再根据  $c = -\frac{8}{a}$  求出  $a$  的值, 从而得到抛物线的解析式.

**【小问 1 详解】**

解: 由表可知, 抛物线经过点  $(-1, 2)$  和  $(1, 2)$ ,

$\therefore$  抛物线的对称轴是  $x = 0$ ,

$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 0$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式是  $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ ,

把点  $(-1, 2)$  的坐标代入可得:  $a + c = 2$

**【小问 2 详解】**

①解：当  $x=0$  时，可得：  $y = ax^2 + bx + c = c$ ，

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, c)$ ，

$\because$  四边形  $OACB$  是正方形，  $OC$  是正方形的对角线，

$\therefore$  点  $A$ 、 $B$  关于  $OC$  对称，

$\therefore$  抛物线的对称轴是  $x=0$ ，

$\therefore b=0$ ；

$\therefore AB=OC$ ，点  $A$ 、 $B$  的纵坐标是  $\frac{c}{2}$ ，

可得：  $ax^2 + c = \frac{c}{2}$ ，

整理得：  $2ax^2 + c = 0$ ，

解得：  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{2a}}$ ，

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $\left(-\sqrt{-\frac{c}{2a}}, \frac{c}{2}\right)$ ，点  $B$  的坐标为  $\left(\sqrt{-\frac{c}{2a}}, \frac{c}{2}\right)$ ，

$\therefore AB = 2\sqrt{-\frac{c}{2a}} = \frac{\sqrt{-2ac}}{-a}$ ，

可得：  $\frac{\sqrt{-2ac}}{-a} = c$ ，

$\therefore a^2c^2 = -2ac$ ，

解得：  $ac = -2$  或  $ac = 0$ （不符合题意，舍去）；

②解：如下图所示，连接  $AB$ ， $PA$ 、 $PC$ ，

$\because$  四边形  $OACB$  为菱形，

$\therefore AB \perp OC$ ， $AE = BE$ ， $CE = OE$ ，

$\because \cot \angle AOC = 2$ ，

$\therefore OE = 2AE$ ，

$\because OC = c$ ，

$\therefore OE = \frac{c}{2}$ ， $AE = \frac{c}{4}$ ，

$\therefore$  点  $A$  的坐标是  $\left(-\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right)$ ，

把点  $A$  的坐标  $\left(-\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right)$  代入  $y = ax^2 + c$ ,

$$\text{可得: } \frac{ac^2}{16} + c = \frac{c}{2},$$

$$\text{解得: } c = -\frac{8}{a},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = ax^2 - \frac{8}{a}, \text{ 点 } A \text{ 的坐标 } \left(\frac{2}{a}, -\frac{4}{a}\right),$$

$\because$  点  $P$  的横坐标为 2,

$$\therefore y_P = ax^2 - \frac{8}{a} = 4a - \frac{8}{a},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(2, 4a - \frac{8}{a}\right),$$

设直线  $AP$  的解析式是  $y = mx + n$  ( $m \neq 0$ ),

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{2}{a}m + n = -\frac{4}{a} \\ 2m + n = 4a - \frac{8}{a} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = 2(a+1) \\ n = -\frac{8}{a} - 4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AP \text{ 的解析式是 } y = 2(a+1)x - \frac{8}{a} - 4,$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 可得: } y = 2(a+1)x - \frac{8}{a} - 4 = -\frac{8}{a} - 4,$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的坐标为 } \left(0, -\frac{8}{a} - 4\right),$$

$$\therefore CF = c - \left(-\frac{8}{a} - 4\right) = -\frac{8}{a} - \left(-\frac{8}{a} - 4\right) = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = S_{\triangle AFC} + S_{\triangle PFC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{4}\right) \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 12,$$

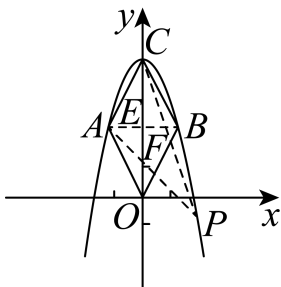
$$\therefore c = -\frac{8}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{a}\right) \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 12,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore c = -\frac{8}{a} = 16,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + 16.$$



25. 如图 1, 在扇形  $AOB$  中,  $\angle AOB = 90^\circ$ , 点  $C$  是弧  $AB$  上一点, 点  $D$  是半径  $OB$  上的点, 联结  $CD$ ,  $\angle OCD$  的平分线和  $\angle COD$  的平分线相交于点  $P$ , 联结  $BP$ .

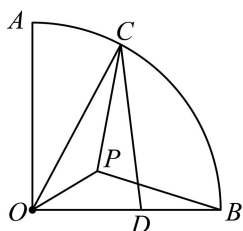


图1

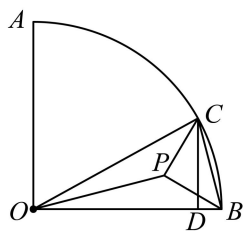
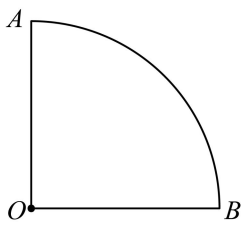


图2



备用图

(1) 求证:  $\angle OPB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ODC$ ;

(2) 联结  $BC$  (如图 2). 如果  $CD \perp OB$ ,  $CP = 10$ ,  $\triangle OPB$  的外接圆  $\odot M$  与扇形  $AOB$  所在的圆  $\odot O$  相交.

①当  $\cos \angle CBD = \frac{1}{4}$  时, 求  $\odot M$  与  $\odot O$  的公共弦的长;

②联结  $AM$  和  $AP$ ,  $AP$  交  $OC$  于点  $E$ , 当  $AM \perp OP$  时, 求  $\tan \angle PAM$  的值和  $OE$  的长.

**【答案】** (1) 见详解 (2)  $40, \frac{1}{3}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 连接  $PB$ , 由  $CP$  平分  $\angle OCD$ ,  $OP$  平分  $\angle COD$ , 得  $\angle POC = \angle POD$ ,  $\angle PCO = \angle PCD$ ; 由  $OC = OB$ ,  $\angle POC = \angle POB$ ,  $OP = OP$ , 证  $\triangle OCP \cong \triangle OBP$ , 得  $\angle OPC = \angle OPB$ ; 在  $\triangle OCD$  中由内角和定理得  $\angle POD + \angle PCO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ODC$ , 在  $\triangle OPC$  中得  $\angle OPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ODC$ , 即  $\angle OPB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ODC$ ;

(2) ①由  $CD \perp OB$  得  $\angle ODC = 90^\circ$ , 由 (1) 知  $\angle OPB = 135^\circ$ ,  $\triangle OCP \cong \triangle OBP$  得  $CP = BP = 10$ ,

$\angle CPB = 90^\circ$ ,  $\triangle CPB$  等腰直角,  $BC = 10\sqrt{2}$ ; 由  $\cos \angle CBD = \frac{1}{4}$  在  $Rt\triangle CDB$  中求  $BD$ 、 $CD$ ,  
 再在  $Rt\triangle ODC$  中求圆  $O$  半径  $R = 20\sqrt{2}$ ; 设两圆另一交点为  $Q$ , 由  $\angle OPB = 135^\circ$  得劣弧  $OB$  圆心  
 角  $\angle OMB = 90^\circ$ , 又  $OM$  垂直平分公共弦  $BQ$ , 故  $B$ 、 $M$ 、 $Q$  共线,  $BQ$  为圆  $M$  直径, 由等  
 腰  $Rt\triangle OMB$  求  $BM = 20$ ,  $BQ = 40$ . ②  $BC$ , 延长  $CD$  交圆  $OO$  于点  $N$ , 由垂径定理得  $\overset{\circ}{BC} = \overset{\circ}{BN}$ ,  
 $\angle BCD = \angle BNC = \frac{1}{2} \angle BOC$ ; 由  $AM \perp OP$  得  $AO = AP$  (垂径定理), 三线合一  
 得  $\angle PAM = \frac{1}{2} \angle OAP$ ; 证  $\triangle AOP \cong \triangle OBC$  得  $\angle OAP = \angle BOC$ ,  $OP = BC = 10\sqrt{2}$ , 从  
 而  $\angle PAM = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BCD$ ; 延长  $OP$  交  $BC$  于  $R$ , 由三线合一得  $R$  为  $BC$  中点,  
 $BR = PR = 5\sqrt{2}$ ,  $OR = 15\sqrt{2}$ , 在  $Rt\triangle BOR$  中  $\tan \angle BOR = \frac{1}{3}$ , 即  $\tan \angle PAM = \frac{1}{3}$ .

### 【小问 1 详解】

解:  $\because CP$  平分  $\angle OCD$ ,  $OP$  平分  $\angle COD$ ,  
 $\therefore \angle POC = \angle POD$ ,  $\angle PCO = \angle PCD$ ,  
 $\because OC = OB$ ,  $\angle POC = \angle POB$ ,  $OP = OP$ ,  
 $\therefore \triangle OCP \cong \triangle OBP (SAS)$ ,

$\therefore \angle OPC = \angle OPB$ ,

在  $\triangle OCD$  中,  $\angle COD + \angle OCD + \angle ODC = 180^\circ$ ,

即  $2\angle POD + 2\angle PCO + \angle ODC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle POD + \angle PCO = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ODC$ ,

在  $\triangle OPC$  中,  $\angle OPC = 180^\circ - \angle POC - \angle PCO = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle ODC) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ODC$ ,

$\therefore \angle OPB = \angle OPC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ODC$ .

### 【小问 2 详解】

①  $\because CD \perp OB$ ,

$\therefore \angle CDO = 90^\circ$ , 即  $\angle ODC = 90^\circ$ ,

由 (1) 问结论,  $\angle OPB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ODC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ,

$\therefore \triangle OCP \cong \triangle OBP (SAS)$ ,

$\therefore CP = BP = 10$ ,

$\therefore \angle CPB = 360^\circ - 135^\circ - 135^\circ = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle CPB$  是等腰直角三角形,

$$\therefore BC = \sqrt{CP^2 + BP^2} = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \quad ,$$

在  $Rt\triangle CDB$  中,  $\cos \angle CBD = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{4} \quad ,$

设  $BD = k$ , 则  $BC = 4k = 10\sqrt{2} \quad ,$

$$\therefore k = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } BD = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad ,$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{200 - \frac{25 \times 2}{4}} = \sqrt{200 - 12.5} = \sqrt{187.5} = \frac{5\sqrt{30}}{2} \quad ,$$

设圆  $O$  半径为  $R$ , 则  $OB = OC = R$ ,  $OD = OB - BD = R - \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad ,$

在  $Rt\triangle ODC$  中,  $OC^2 = OD^2 + CD^2$ ,

$$R^2 = \left( R - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{375}{2} \quad ,$$

$$R^2 = R^2 - 5\sqrt{2}R + \frac{25 \times 2}{4} + \frac{375}{2} \quad ,$$

解得,  $R = 20\sqrt{2} \quad ,$

设圆  $O$  与圆  $M$  的另一个交点为  $Q$ , 连接  $BQ$ 、 $OM$ ,

$\therefore BQ$  是两圆的公共弦,

$\because \angle OPB = 135^\circ$ , 优弧  $OB$  所对的圆心角为  $2 \times 135^\circ = 270^\circ$ ,

$\therefore$  劣弧  $OB$  所对的圆心角  $\angle OMB = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$ ,

$\therefore OM \perp BM$ ,

又  $\because OM$  垂直平分公共弦  $BQ$ ,

$\therefore OM \perp BQ$ ,

$\because BM \perp OM$ ,  $BQ \perp OM$ , 且  $B$  为公共点,

$\therefore B$ 、 $M$ 、 $Q$  三点共线,

$\therefore BQ$  过圆心  $M$ , 即  $BQ$  是圆  $M$  的直径,

$\because O$ 、 $B$  都在圆 上,

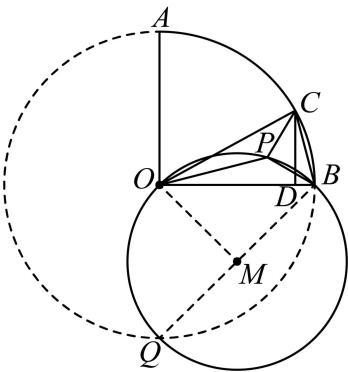
$$\therefore OM = BM = R_M \quad ,$$

$\therefore \triangle OMB$  是等腰直角三角形,

$$\therefore BM = \frac{\sqrt{2}}{2} OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 20\sqrt{2} = 20,$$

$$\therefore BQ = 2BM = 40,$$

$\therefore \odot M$  与  $\odot O$  的公共弦长为 40.



②延长  $CD$  交圆  $O$  于点  $N$ ,

$$\therefore CD \perp OB,$$

$\therefore OB$  垂直平分弦  $CN$ ,

$$\therefore \overset{\diamond}{BC} = \overset{\diamond}{BN}, \quad BC = BN,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BNC,$$

$$\therefore \angle BNC = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$\because AM \perp OP$ ,  $M$  是圆心,  $OP$  是圆  $M$  的弦,

$\therefore OG = PG$ , 即  $AM$  是  $OP$  的垂直平分线,

$$\therefore AO = AP,$$

$$\therefore AM \text{ 平分 } \angle OAP, \text{ 即 } \angle PAM = \frac{1}{2} \angle OAP,$$

$$\because OA \perp OB, CD \perp OB, \quad AM \perp OP, CB \perp OP,$$

$$\therefore \angle AFO = \angle CBO,$$

$$\therefore \angle OAF = \angle BCD, \text{ 即 } \angle PAM = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle CDB = 90^\circ$$

在  $\triangle AOP$  和  $\triangle OBC$  中,

$$\because AO = OB, \quad \angle OAP = \angle BOC, \quad AP = AO = OC,$$

