

初三年级数学练习卷

1. 本练习卷共 25 题，答题时，务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题（共 24 分，每小题 4 分）

1. 在多项式 $\frac{1}{2}x^2 - 3y - 4$ 中，一次项是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $3y$ D. $-3y$

【答案】D

【解析】

【详解】解：多项式 $\frac{1}{2}x^2 - 3y - 4$ 的一次项是 $-3y$.

2. 下列运算中，计算正确的是（ ）

- A. $x^3y \cdot xy^3 = 4xy$ B. $x^3 \div (xy) = x^2y$ C. $(xy^2)^2 = x^2y^4$ D. $x^2y + xy^2 = x^3y^3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据整式的基本运算法则逐一判断即可.

【详解】解：A、 $\because x^3y \cdot xy^3 = x^{3+1}y^{1+3} = x^4y^4 \neq 4xy$ ， $\therefore$ 选项 A 不符合题意；

B、 $\because x^3 \div (xy) = x^{3-1}y^{0-1} = x^2y^{-1} \neq x^2y$ ， $\therefore$ 选项 B 不符合题意；

C、 $\because (xy^2)^2 = x^2(y^2)^2 = x^2y^4$ ， $\therefore$ 选项 C 符合题意；

D、 $\because x^2y$ 与 xy^2 不是同类项，无法合并，不能得到 x^3y^3 ， $\therefore$ 选项 D 不符合题意.

3. 已知函数图像上的两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，当 $x_1 < x_2$ 时 $y_1 < y_2$ ，一定满足此规律的函数是（ ）

- A. $y = x + 1$ B. $y = 1$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = -x^2 + 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的增减性可判断选项 A；根据函数值为定值可判断选项 B；根据特殊值法可判断选项

C、D.

【详解】解：A. $\because y = x + 1$ 是一次函数，且 $1 > 0$,

$\therefore$ 当 $x_1 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ，故此选项符合题意；

B. $\because y = 1$ ，对任意 $x_1 < x_2$ ，都有 $y_1 = y_2 = 1$ ，

$\therefore y_1 = y_2$ ，故此选项不符合题意；

C. 取 $x_1 = -2$ ， $x_2 = -1$ ，满足 $x_1 < x_2$ ，此时 $y_1 = -\frac{1}{2}$ ， $y_2 = -1$ ，

$\therefore y_1 > y_2$ ，故此选项不符合题意；

D. 取 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ，满足 $x_1 < x_2$ ，此时 $y_1 = -1^2 + 1 = 0$ ， $y_2 = -2^2 + 1 = -3$ ，

$\therefore y_1 > y_2$ ，故此选项不符合题意.

4. 一个不透明的袋子里装有 4 个红球、3 个白球和 2 个蓝球，这些球只有颜色不同，随机从中摸出一个球，要使摸到红球的概率为 $\frac{1}{2}$ ，以下方法不可行的是（ ）

A. 往袋中放入一个红球

B. 往袋中放入一个绿球

C. 从袋中取出一个蓝球

D. 从袋中取出一个白球

【答案】B

【解析】

【分析】先计算原有红球数和总球数，再根据概率公式，分别计算各选项操作后摸到红球的概率，判断是否等于 $\frac{1}{2}$ ，即可得到答案.

【详解】解：原有红球 4 个，总球数为 $4 + 3 + 2 = 9$ ，摸到红球概率为 $\frac{1}{2}$ ，即 $\frac{\text{红球个数}}{\text{总球数}} = \frac{1}{2}$ ，对各选项逐一验证：

A、 $\because$ 放入 1 个红球后，红球数为 5，总球数为 10， $\therefore P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，方法可行；

B、 $\because$ 放入 1 个绿球后，红球数为 4，总球数为 10， $\therefore P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$ ，方法不可行；

C、 $\because$ 取出 1 个蓝球后，红球数为 4，总球数为 8， $\therefore P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ，方法可行；

D、 $\because$ 取出 1 个白球后，红球数为 4，总球数为 8， $\therefore P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ，方法可行；

因此方法不可行的是 B.

5. 第 67 届国际奥林匹克数学竞赛 (IMO) 将于 2026 年 7 月在上海举行. 在上届比赛中, 中国队发挥出色, 获得团体总分第一名, 也是当届比赛中唯一一支所有队员都获得金牌的队伍. 中国队参赛队员比赛成绩的

方差可用以下公式来计算: $S^2 = \frac{1}{6} \left[(42 - \bar{x})^2 + (42 - \bar{x})^2 + (40 - \bar{x})^2 + (36 - \bar{x})^2 + (36 - \bar{x})^2 + (35 - \bar{x})^2 \right]$.

根据以上信息, 下列叙述中不正确的是 ()

- A. 中国队共有 6 名同学参赛
- B. 众数是 36
- C. 中位数是 38
- D. 平均数是 38.5

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查方差公式的意义, 以及众数、中位数、平均数的计算, 根据方差公式确定所有数据后, 依次根据定义判断各选项即可.

【详解】解: A、 $\because$ 方差公式中共有 6 个数据项, $\therefore$ 中国队共有 6 名同学参赛, A 选项正确, 不符合题意;

B、 $\because$ 36 和 42 都出现 2 次, 均为出现次数最多的数, $\therefore$ 众数是 36 和 42, B 选项错误, 符合题意;

C、 $\because$ 6 个数据的中位数是第 3 个和第 4 个数据的平均数, 即 $\frac{36+40}{2} = 38$, $\therefore$ 中位数是 38, C 选项正确, 不符合题意;

D、 $\because$ 平均数 $\bar{x} = \frac{35+36+36+40+42+42}{6} = \frac{231}{6} = 38.5$, $\therefore$ 平均数是 38.5, D 选项正确, 不符合题意.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AC = BD$, 下列判断中的正确的是 ()

- A. 如果 $BC = AD$, 那么四边形 $ABCD$ 是等腰梯形
- B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形
- C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形
- D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是正方形

【答案】C

【解析】

【分析】根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理进行判断即可.

【详解】解: A. 如果 $BC=AD$, 那么四边形 $ABCD$ 可能是等腰梯形, 也可能是矩形, 错误;

B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形, 错误;

C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形, 正确;

D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 不一定是正方形, 错误;

故选: C.

【点睛】此题考查等腰梯形的判定，关键是根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理解答.

二、填空题 (共 48 分, 每小题 4 分)

7. 分解因式: $4x^2 - 9y^2 =$ _____.

【答案】 $(2x+3y)(2x-3y)$

【解析】

【详解】解: 原式 = $(2x+3y)(2x-3y)$.

故答案为: $(2x+3y)(2x-3y)$

8. 化简: $\frac{2}{1-x} - \frac{2x}{1-x} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】根据同分母分式减法法则计算后, 约分即可得到化简结果.

【详解】解: $\frac{2}{1-x} - \frac{2x}{1-x} = \frac{2-2x}{1-x} = \frac{2(1-x)}{1-x} = 2$.

9. 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

【解析】

【详解】解: $\because x^2 - y^2 = 5$,

$$\therefore (x+y)(x-y) = 5,$$

$$\because x+y=1,$$

$$\therefore x-y=5,$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=1 \text{ ①} \\ x-y=5 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得: } x=3,$$

把 $x=3$ 代入①得: $y=-2$,

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

10. 方程 $\sqrt{x+2} = 3$ 的解是_____.

【答案】 $x = 7$

【解析】

【分析】 将方程两边同时平方，把无理方程转化为一元一次方程求解，再检验即可得到原方程的解.

【详解】 解： $\sqrt{x+2} = 3$

两边平方得： $x+2 = 9$

移项得： $x = 9 - 2$

解得： $x = 7$

检验：将 $x = 7$ 代入原方程，左边 $= \sqrt{7+2} = 3 =$ 右边.

所以 $x = 7$ 是原方程的解.

11. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，利用一元二次方程根的判别式解答即可.

【详解】 解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根，

∴ $\Delta = 1 - 4a \geq 0$,

解得 $a \leq \frac{1}{4}$,

故答案为： $a \leq \frac{1}{4}$.

12. 将抛物线 $y = x^2 - 4x + 1$ 向上平移 2 个单位，得到新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = x^2 - 4x + 3$

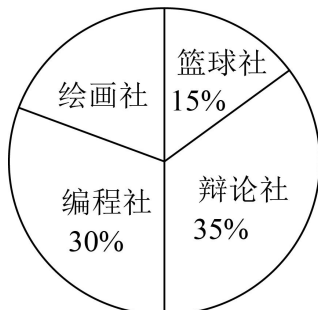
【解析】

【分析】 根据二次函数图象平移规则“左加右减，上加下减”，向上平移直接在函数表达式整体加上平移的单位，即可得到答案.

【详解】 解：∵ 抛物线 $y = x^2 - 4x + 1$ 向上平移 2 个单位，

∴ 得到新抛物线的表达式是 $y = x^2 - 4x + 1 + 2 = x^2 - 4x + 3$.

13. 某学校对学生参与社团情况做了调查, 并将调查的数据整理后绘制成如图所示的扇形统计图 (每个学生只能参加一个社团). 如果参加编程社的学生有 120 人, 那么参加绘画社的学生有_____人.



【答案】 80

【解析】

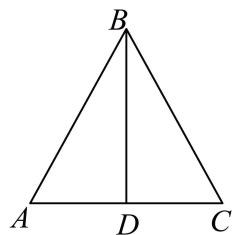
【分析】 用参加编程社的学生人数除以扇形统计图中编程社的百分比可得总人数, 再用总人数乘以绘画社人数百分比即可解答.

【详解】 解: $120 \div 30\% = 400$ (人),

$400 \times (1 - 15\% - 35\% - 30\%) = 80$ (人).

∴ 参加绘画社的学生有 80 人.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, BD 平分 $\angle ABC$, 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{DB}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式为_____.



【答案】 $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 先得出 $AD = \frac{1}{2}AC$, 则可得 $\overrightarrow{AD}$, 再根据 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ 求解即可.

【详解】 解: $\because AB = BC$, BD 平分 $\angle ABC$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$\therefore AD = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

15. 2026年3月29日，中关村论坛年会发布重大成果，中科院物理所团队首次实现二维金属。二维金属是极薄的单原子层金属材料，厚度超小。已知某二维金属材料厚度 1.5×10^{-10} 米，一根头发丝直径约0.03毫米，换算为米是 3×10^{-5} 米。则头发丝直径是该二维金属材料厚度的_____倍。（用科学记数法表示）

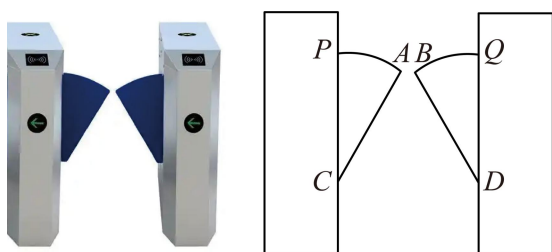
【答案】 2×10^5

【解析】

【分析】 根据题意列出算式 $3 \times 10^{-5} \div (1.5 \times 10^{-10})$ ，然后通过法则即可求解。

【详解】 解： $3 \times 10^{-5} \div (1.5 \times 10^{-10}) = (3 \div 1.5) \times 10^{-5-(-10)} = 2 \times 10^5$ 。

16. 如图是地铁入口双翼闸机示意图。已知双翼边缘 $AC = BD = 60\text{cm}$ ，与闸机侧立面夹角 $\angle PCA = \angle QDB = 30^\circ$ ，双翼展开时端点 A 、 B 的间距为8cm。当双翼收起时，可通过闸机的物体最大宽度为_____cm。

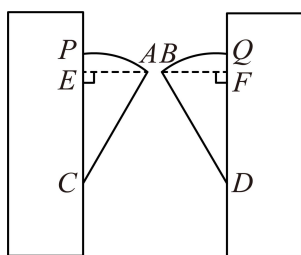


【答案】 68

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AE \perp PC$ 于点 E ，过点 B 作 $BF \perp QD$ 于点 F ，求出 AE, BF 的长即可。

【详解】 解： 如图，过点 A 作 $AE \perp PC$ 于点 E ，过点 B 作 $BF \perp QD$ 于点 F ，



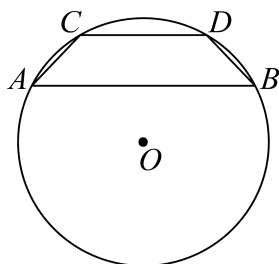
$\therefore \angle PCA = \angle QDB = 30^\circ$, $AC = BD = 60\text{cm}$,

$\therefore AE = \frac{1}{2}AC = 30\text{cm}$, $BF = \frac{1}{2}BD = 30\text{cm}$,

$\therefore$ 双翼展开时端点 A 、 B 的间距为 8cm ,

$\therefore$ 当双翼收起时, 可通过闸机的物体最大宽度为 $30 + 8 + 30 = 68(\text{cm})$.

17. 如图, 已知弦 AB 、 CD 在圆心 O 的同侧, 且 AB 是 $\odot O$ 内接正三角形的一条边, CD 是 $\odot O$ 内接正六边形的一条边, $AB \parallel CD$. 如果 AC 也是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一条边, 那么 n 的值为_____.

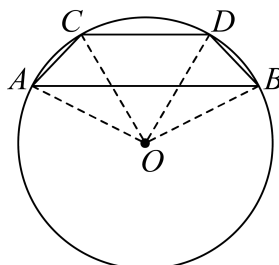


【答案】12

【解析】

【分析】连接 OA 、 OB 、 OC 、 OD , 如图, 利用正多边形与圆, 分别计算 $\odot O$ 的内接正六边形与内接正三角形的中心角得到 $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$, 则 $\angle AOC = 30^\circ$, 然后计算即可得到 n 的值.

【详解】解: 连接 OA 、 OB 、 OC 、 OD , 如图,



$\therefore CD$, AB 分别为 $\odot O$ 的内接正六边形与内接正三角形的一边,

$\therefore \angle DOC = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOD = \frac{\angle AOB - \angle DOC}{2} = 30^\circ$,

$\therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$,

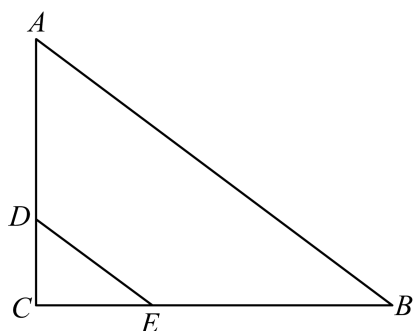
即 AC 恰好是同圆内接一个正十二边形的一边.

故答案为: 12.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 5$, $BC = 12$. 点 D 、 E 分别在边 AC 、 BC 上, 且 $\frac{CD}{CE}$

的值为 $\frac{3}{4}$ 。以 E 为圆心， ED 为半径作圆，如果 $\odot E$ 与 $\triangle ABC$ 的三边有三个公共点，那么 CD 的值为

_____。



【答案】4 或 $\frac{36}{17}$

【解析】

【分析】设 $CD = 3x$ ，则 $CE = 4x$ ，根据勾股定理，可得 $DE = 5x$ ， $AB = 13$ ，再根据 $\odot E$ 与 $\triangle ABC$ 的三边有三个公共点，分类讨论：①当 $\odot E$ 与 AB 相切时，根据切线的性质和相似三角形的判定方法，易得 $\triangle BFE \sim \triangle BCA$ ，从而 $BE = 13x$ ，进而 $BC = 17x = 12$ ，计算即可求解；②当 $ED = EB$ 时，易求 $BC = 9x = 12$ ，计算即可求解。

【详解】解：设 $CD = 3x$ ，则 $CE = 4x$ ，

在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中， $DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = 5x$ ，

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，

如图 1，当 $\odot E$ 与 AB 相切时，切点为 F ，则 $\odot E$ 与 $\triangle ABC$ 的三边有三个公共点，

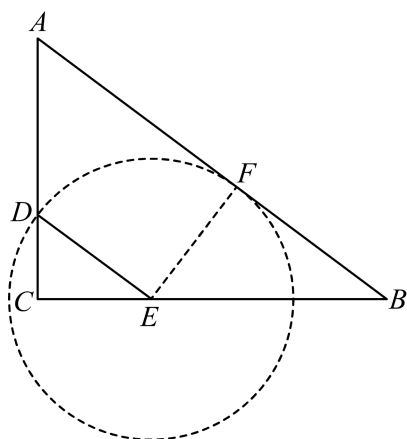


图1

$\because \odot E$ 与 AB 相切，

$\therefore EF \perp AB$ ， $EF = ED = 5x$ ，

$$\begin{aligned}
 &\because \angle C = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle EFB = \angle C = 90^\circ, \quad \angle B = \angle B, \\
 &\therefore \triangle BFE \sim \triangle BCA, \\
 &\therefore \frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC}, \text{ 即 } \frac{BE}{13} = \frac{5x}{5}, \text{ 则 } BE = 13x, \\
 &\therefore BC = BE + CE = 13x + 4x = 17x, \\
 &\because BC = 12, \\
 &\therefore 17x = 12, \text{ 解得 } x = \frac{12}{17}, \\
 &\therefore CD = 3x = \frac{36}{17};
 \end{aligned}$$

如图 2, 当 $ED = EB$ 时, 则 $\odot E$ 与 $\triangle ABC$ 的三边有三个公共点,

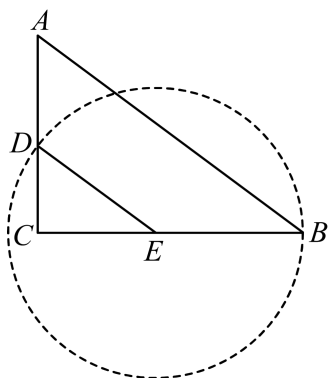


图2

$$\begin{aligned}
 &\because ED = EB, \\
 &\therefore BC = BE + CE = 5x + 4x = 9x, \\
 &\therefore 9x = 12, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3}, \\
 &\therefore CD = 3x = 4;
 \end{aligned}$$

综上所述: CD 的值为 4 或 $\frac{36}{17}$.

三、解答题 (共 78 分)

19. 计算: $(\pi - \sqrt{10})^0 + (2 - \sqrt{3})^{-1} + \sqrt[3]{-27} + \cos 30^\circ$.

【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【详解】解： $(\pi - \sqrt{10})^0 + (2 - \sqrt{3})^{-1} + \sqrt[3]{-27} + \cos 30^\circ = 1 + (2 + \sqrt{3}) + (-3) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

20. 解不等式组：
$$\begin{cases} 4(1-x) > 8 \text{ ①} \\ x+3 \leq \frac{x}{2} \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】 $x \leq -6$

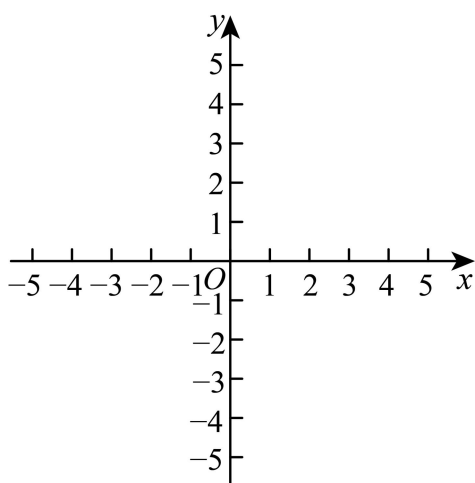
【解析】

【详解】解：解不等式①，得： $x < -1$ ，

解不等式②，得： $x \leq -6$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x \leq -6$.

21. 在平面直角坐标系 xOy (如图)，已知正比例函数 $y = 2x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像相交于点 $A(2, m)$ ，过点 $B(4, 0)$ 作 x 轴的垂线，与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像相交于点 C .



(1) 求 m 的值和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式；

(2) 联结 OC ，点 D 是 OC 的中点，联结 BD ，求 BD 的长.

【答案】 (1) $m = 4$, $y = \frac{8}{x}$

(2) $BD = \sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 先求出 m ，再待定系数法求解析式；

(2) 先求出点 C 的坐标，再利用直角三角形斜边中线求 BD 的长.

【小问 1 详解】

解：把 $A(2, m)$ 代入 $y = 2x$ ，得 $m = 4$ 。

$\therefore A(2, 4)$ ，把 $A(2, 4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ ，得 $k = 8$ 。

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{8}{x}$ 。

【小问2详解】

把 $x = 4$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ ，得 $y = 2$ 。

$\therefore C(4, 2)$ 。 $\therefore B(4, 0)$ ， $\therefore BC = 2$ 。

又 $\because BC \perp x$ 轴， $\therefore \angle CBO = 90^\circ$ 。

在 $Rt\triangle CBO$ 中， $\therefore$ 点 D 是 OC 的中点，

$\therefore BD = \frac{1}{2}OC$ ，

$\because OC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ， $\therefore BD = \sqrt{5}$ 。

22. 折纸是承载中国传统礼俗与生活智慧的民间传统艺术。学校折纸社团的同学们用 $12\text{cm} \times 12\text{cm}$ 正方形纸片开展折纸活动。

【发现问题】如图1，将正方形纸片 $ABCD$ 对折再展开，折痕交 AD 于点 E 、交 BC 于点 F ，点 E 、 F 分别是边 AD 、 BC 的二等分点。在第一次对折后，同向再对折一次（如图2），可得到边的_____等分点。按照这样的方式对折 n 次（ n 是正整数）可以得到边的_____等分点（用含 n 的代数式表示），但这样折的方式都不会得到边的三等分点。

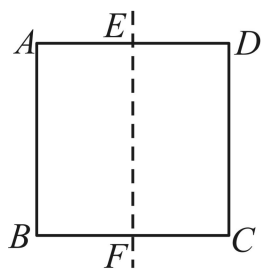


图1

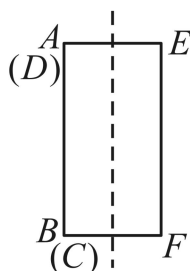


图2

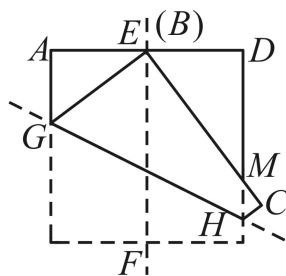


图3

【提出问题】能不能通过折纸的方式得到边的三等分点？

【分析问题】围绕这个问题，同学们展开了讨论。

小明：要得到边的三等分点，得想想别的折法。

小华：同向对折的方式得不到边的三等分点，能否通过把角翻折到边上，构造出1:2的比例？

小海：嗯，我是这样想的，在第一次对折展开（如图 1）的基础上，将点 B 沿着直线翻折到点 E 处（如图 3），折痕分别交正方形的边于点 G 、 H ，边 BC 交正方形的边于点 M ， M 就是边 CD 的一个三等分点。

【解决问题】

- (1) 完成填空；
- (2) 求 AG 的长；
- (3) 判断小海的折法是否正确并说明理由。

【答案】 (1) 四， 2^n ；

(2) 4.5cm

(3) 正确，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据题意可得答案；

(2) 设 $AG = x$ ，则由折叠的性质可得 $GE = (12 - x)$ cm，求出 AE 的长，利用勾股定理可得方程 $x^2 + 6^2 = (12 - x)^2$ ，解方程即可得到答案；

(3) 证明 $\angle AEG = \angle DME$ ，得到 $\tan \angle AEG = \tan \angle DME$ ，则 $\frac{AE}{AG} = \frac{DM}{DE}$ ，可求出 $DM = 8$ cm，据此可得结论。

【小问 1 详解】

解：由题意得，第一次对折后，同向再对折一次（如图 2），可得到边的四等分点。按照这样的方式对折 n 次（ n 是正整数）可以得到边的 2^n 等分点；

【小问 2 详解】

解：设 $AG = x$ ，则由折叠的性质可得 $GE = (12 - x)$ cm

$\because$ 四边形是 $ABCD$ 正方形，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ 。

$\because E$ 是 AD 的中点， $AD = 12$ cm，

$\therefore AE = 6$ cm，

在 $\text{Rt}\triangle AGE$ 中，由勾股定理得 $AG^2 + AE^2 = GE^2$ ，

$\therefore x^2 + 6^2 = (12 - x)^2$ ，

解得 $x = 4.5$,

$$\therefore AG = 4.5\text{cm};$$

【小问3 详解】

解：小海的折法正确，理由如下：

由折叠的性质和正方形的性质可得 $\angle D = \angle GEC = 90^\circ$.

$$\therefore \angle AEM = \angle DME + \angle D, \quad \angle AEG + \angle CEG = \angle DME + \angle D,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle DME.$$

$$\therefore \tan \angle AEG = \tan \angle DME.$$

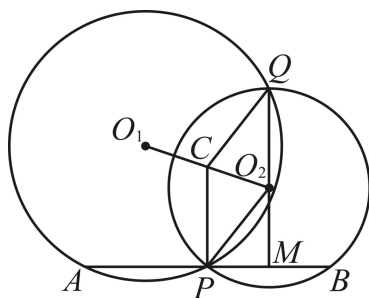
$$\therefore \frac{AE}{AG} = \frac{DM}{DE}.$$

$$\therefore \frac{6}{4.5} = \frac{DM}{6},$$

解得 $DM = 8\text{cm}$,

由 $8:12 = 2:3$ 可知， M 是边 CD 的一个三等分点.

23. 已知：如图， $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 P 、 Q ，且 $r_{\odot O_1} > r_{\odot O_2}$ ，过点 P 的直线 AB 分别交 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 于点 A 、 B ，且 $AP = BP$. 点 C 是线段 O_1O_2 的中点. 联结 QO_2 并延长交 BP 于点 M ，且 $PM = BM$.



(1) 求证： $CP \perp AB$;

(2) 求证：四边形 CPO_2Q 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

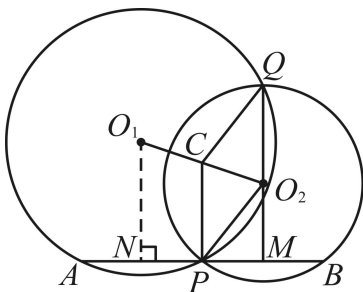
【分析】(1) 作 $O_1N \perp AP$ ，垂足为 N ，根据垂径定理可得 $AN = PN = \frac{1}{2}AP$ ， $\angle O_1NP = 90^\circ$ ， $\angle O_2MB = 90^\circ$ ，从而得到 $O_1N \parallel O_2M$ ，可得到四边形 O_1NMO_2 是梯形，即可求证；

(2) 联结 PQ 交 O_1O_2 于 D ，根据题意可得 O_1O_2 垂直平分 PQ ，从而得到 $DP = DQ$ ， $CP = CQ$ ，再有

$CP \parallel O_2M$, 可得 $\frac{CD}{O_2D} = \frac{DP}{DQ}$, 从而得到 $CD = O_2D$, 可得到四边形 CPO_2Q 是平行四边形, 即可求证.

【小问 1 详解】

证明: 作 $O_1N \perp AP$, 垂足为 N .



$\because O_1N$ 过圆心, $O_1N \perp AP$,

$$\therefore AN = PN = \frac{1}{2}AP, \quad \angle O_1NP = 90^\circ.$$
$$\therefore PM = BM ,$$
$$\therefore PM = \frac{1}{2}BP.$$
$$\because AP = BP,$$

$\therefore PN = PM$, 即点 P 是 MN 中点.

$\because O_2M$ 过圆心, $PM = BM$,

$$\therefore O_2M \perp BP.$$
$$\therefore \angle O_2MB = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle O_1NP = \angle O_2MB.$$
$$\therefore O_1N \parallel O_2M ,$$
$$\because O_1N \neq O_2M ,$$

$\therefore$ 四边形 O_1NMO_2 是梯形.

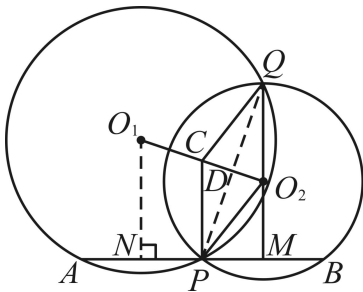
$\therefore$ 点 C 是线段 O_1O_2 的中点, 点 P 是 MN 中点,

$$\therefore CP \parallel O_2M,$$
$$\therefore \angle CPB = \angle O_2MB = 90^\circ,$$

$$\therefore CP \perp AB.$$

【小问 2 详解】

证明: 联结 PQ 交 O_1O_2 于 D .



$\therefore \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 P 、 Q ,

$$\therefore O_1O_2 \text{ 垂直平分 } PQ,$$
$$\therefore DP = DQ, \quad CP = CQ.$$
$$\therefore CP \parallel OM,$$

$$\therefore \frac{CD}{O_2D} = \frac{DP}{DQ},$$

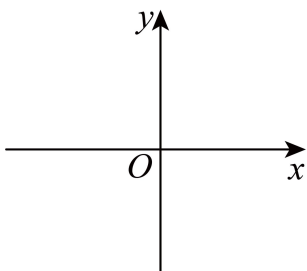
$$\therefore CD = O_2D \text{ .}$$
$$\therefore DP = DQ,$$

$\therefore$ 四边形 CPO_2Q 是平行四边形,

$$\therefore CP = CQ,$$

$\therefore$ 四边形 CPO_2Q 是菱形.

24. 定义：如果一个二次函数的图像与一次函数的图像相交于坐标轴上的两个点，那么称此二次函数为这个一次函数的“贯轴抛物线”。



(1) 已知 $y = x^2 + bx + c$ 是一次函数 $y = -x + 3$ 的一条“贯轴抛物线”，求 b 、 c 的值；

(2) 已知一次函数 $y = -x + n$ (其中 n 为常数, $n > 0$) 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 C , 它的一条“贯轴抛物线” $y = -x^2 + mx + n$ 与 x 轴的另一个交点为 B , 顶点 D 在第一象限. 如果在 y 轴上存在点 E , 使得四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 求 n 的值;

(3) 一个二次函数既是一次函数 $y_1 = -x + (2k + 1)$ 又是一次函数 $y_2 = (2k + 1)x + (2k + 1)$ (其中 k 为常数, $k > 0$) 的“贯轴抛物线”, 且此二次函数图像与 x 轴分别交于 P 、 Q 两点 (点 P 在点 Q 的左边), 与 y 轴交于点 M . 如果二次函数图像上始终存在点 N , 且 N 在第四象限, 使得 $\angle PMN = 75^\circ$, 求满足条件的 k 的取值范围.

【答案】(1) $\begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$

(2) $n = 3$

(3) $0 < k < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 令 $x = 0$, 得直线 $y = -x + 3$ 与 y 轴的交点为 $(0, 3)$, 令 $y = 0$, 得直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴的交点为 $(3, 0)$, 结合题意知点 $(3, 0)$, $(0, 3)$, 再进一步求解即可.

(2) 直线 $y = -x + n$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(n, 0)$, $C(0, n)$, 可得 $y = -x^2 + mx + n$, 求解 $n = m + 1$. B 点坐标为 $(-1, 0)$, 结合四边形 $BCDE$ 为平行四边形, 进一步求解即可.

(3) 结合题意知: $P(-1, 0)$, $M(0, 2k + 1)$, $Q(2k + 1, 0)$, 当点 N 在第四象限且 $\angle PMN = 75^\circ$ 时, 则 $\angle PMQ > 75^\circ$, 可得 $45^\circ < \angle MPQ < 60^\circ$, 进一步可得 $1 < 2k + 1 < \sqrt{3}$, 再解不等式即可.

【小问 1 详解】

解: 令 $x = 0$, 得直线 $y = -x + 3$ 与 y 轴的交点为 $(0, 3)$,

令 $y = 0$, 得直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴的交点为 $(3, 0)$,

由题意知点 $(3, 0)$, $(0, 3)$ 在抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上,

分别把 $x = 3$, $y = 0$ 和 $x = 0$, $y = 3$ 代入得:

$$\begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$.

【小问 2 详解】

解: 直线 $y = -x + n$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 $A(n, 0)$, $C(0, n)$,

$\because$ 点 $(n, 0)$ 在抛物线 $y = -x^2 + mx + n$, ①

$$\therefore -n^2 + mn + n = 0,$$

$$\because n > 0, \therefore n = m + 1.$$

令 $y = 0$ 代入①式, 得: $-x^2 + (n-1)x + n = 0$.

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = n,$$

$$\therefore B \text{ 点坐标为 } (-1, 0),$$

$\because$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形,

$$\therefore x_D = -\frac{m}{2 \times (-1)} = -x_B = 1, \text{ 解得 } m = 2.$$

$$\therefore n = 3.$$

【小问 3 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y_1 = -x + (2k+1)$,

当 $x = 0$, $y = 2k+1$, 当 $y = 0$, 则 $x = 2k+1$,

同理: 由一次函数 $y_2 = (2k+1)x + (2k+1)$ 可得:

当 $x = 0$, $y = 2k+1$, 当 $y = 0$, 则 $x = -1$,

结合题意知: $P(-1, 0)$, $M(0, 2k+1)$, $Q(2k+1, 0)$,

$$\therefore OM = OQ = 2k+1,$$

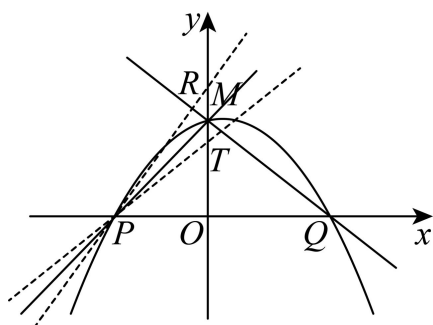
$$\therefore \angle OMQ = \angle OQM = 45^\circ,$$

当点 N 在第四象限且 $\angle PMN = 75^\circ$ 时, 则 $\angle PMQ > 75^\circ$,

在 $\triangle PMQ$ 中, $\therefore \angle PMQ > 75^\circ$, $\angle PQM = 45^\circ$,

$$\therefore \angle MPQ < 60^\circ,$$

如图,



当 $\angle RPO = 60^\circ$ 时, $RO = PO \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

当 $\angle TPO = 45^\circ$ 时, $TO = PO = 1$,

在 $\triangle PMO$ 中, $\therefore MO = 2k + 1 > 1 = PO$ ($k > 0$),

$$\therefore \angle MPQ > 45^\circ,$$

$$\therefore 45^\circ < \angle MPQ < 60^\circ,$$

$$\therefore 1 < 2k + 1 < \sqrt{3},$$

$$\therefore 0 < k < \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

25. 在 $\square ABCD$ 中, 点 E , F 分别在边 BC , CD 上, 连结 AE , DE , EF , $DE = DC$.

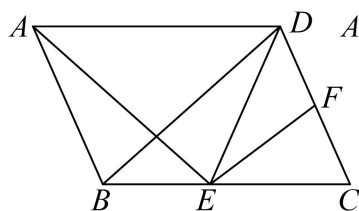


图 1

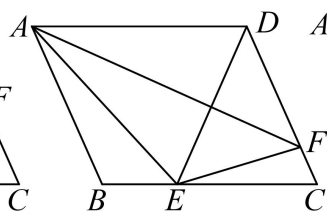


图 2

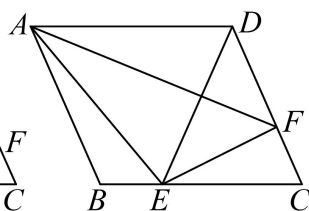


图 3

(1) 如图 1, 连结 BD , 如果 $EF \parallel BD$, 求证: $\triangle ECF \sim \triangle ADE$;

(2) 已知 $\tan C = \sqrt{5}$, 连结 AF .

①如图 2, 如果点 D, E 关于直线 AF 对称, 求 $S_{\triangle ADF} : S_{\square ABCD}$ 的值;

②如图 3, 如果 $AF = \sqrt{5}DF$, $\angle AFE = \angle EDC$, 求 $\frac{CF}{FD}$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) ① $\frac{3}{8}$; ② $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查相似三角形的判定及性质、等腰三角形的判定及性质、平行四边形的性质等:

(1) 先证明 $\triangle BCD \cong \triangle ADE$, 结合 $\triangle ECF \sim \triangle BCD$, 即可证明结论;

(2) ①作 $DH \perp BC$, 垂足为 H . 作 $FP \perp AD$, 交 AD 的延长线于 P , 延长 PF 交 BC 于 Q , 容易证得

$$\frac{AD}{DE} = \frac{DE}{EC}, \text{ 设 } HC = a, \text{ 可得到 } AD = AE = 3a, \text{ 进而可证得 } AE = EG = 3a, \text{ 结合 } \frac{DF}{FC} = \frac{AD}{CG} = 3,$$

$$\frac{DF}{FC} = \frac{PF}{FQ}, \text{ 可得到 } \frac{PF}{PQ} = \frac{3}{4}; \text{ ②过点 } F \text{ 作 } FP \perp AD, \text{ 交 } AD \text{ 的延长线于点 } P, \text{ 设 } DP = m, \text{ 可求得 } \frac{PF}{DP} = \frac{AP}{PF},$$

进而可求得 $\angle DFP = \angle PAF$, 得到 $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle FOD = 90^\circ$, 证明 $\triangle DEF \sim \triangle FOD$, 可求得

$$DE = \frac{3}{2}\sqrt{6}m, \text{ 进而可求得 } CF = \frac{1}{2}\sqrt{6}m.$$

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC = AD, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DEC.$$

$$\because DE = DC,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEC.$$

$$\therefore \angle C = \angle ADE.$$

$$\because BC = AD, \angle C = \angle ADE, CD = DE,$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ADE.$$

$$\because EF \parallel BD,$$

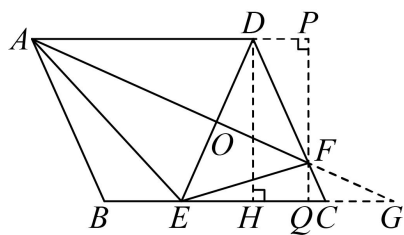
$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle BCD.$$

$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle ADE.$$

【小问 2 详解】

解: ①作 $DH \perp BC$, 垂足为 H . 作 $FP \perp AD$, 交 AD 的延长线于 P , 延长 PF 交 BC 于 Q , 延长 AF 交 BC 延长线于点 G .

$$\text{设 } HC = a, \text{ 则 } HD = HC \cdot \tan C = \sqrt{5}a, DE = DC = \sqrt{HD^2 + HC^2} = \sqrt{6}a.$$



$\because$ 点 D , E 关于直线 AF 对称,

$$\therefore AD = AE.$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED.$$

$$\because DE = DC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle DCE.$$

$$\because \angle ADE = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \angle DEC = \angle DCE.$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DEC.$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{DE}{EC}.$$

$$\because DE = DC, \quad DH \perp BC,$$

$$\therefore EC = 2HC = 2a.$$

$$\therefore \frac{AD}{\sqrt{6}a} = \frac{\sqrt{6}a}{2a}.$$

$$\therefore AD = 3a.$$

$$\therefore AD = AE = 3a.$$

$\because D, E$ 关于直线 AF 对称,

$$\therefore \angle DAF = \angle EAF.$$

$$\because AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle DAF = \angle G.$$

$$\therefore \angle G = \angle EAF.$$

$$\therefore AE = EG = 3a.$$

$$\therefore CG = a.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle GCF, \quad \triangle DPF \sim \triangle CQF.$$

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{AD}{CG} = 3, \quad \frac{DF}{FC} = \frac{PF}{FQ}.$$

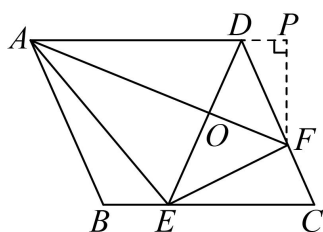
$$\therefore \frac{PF}{FQ} = 3.$$

$$\therefore \frac{PF}{PQ} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} AD \cdot PF, \quad S_{\square ABCD} = AD \cdot PQ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\square ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} PF}{PQ} = \frac{3}{8}.$$

②过点 F 作 $FP \perp AD$ ，交 AD 的延长线于点 P 。



设 $DP = m$ 。

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle PDF = \angle C.$$

$$\therefore PF = DP \cdot \tan \angle PDF = \sqrt{5}m, \quad \sin \angle DFP = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\therefore DF = \sqrt{DP^2 + PF^2} = \sqrt{6}m.$$

$$\therefore AF = \sqrt{5}DF,$$

$$\therefore AF = \sqrt{30}m.$$

$$\therefore AP = \sqrt{AF^2 - DF^2} = 5m.$$

$$\therefore AD = 4m.$$

$$\therefore \frac{PF}{DP} = \frac{AP}{PF}.$$

$$\therefore \triangle DPF \sim \triangle FPA.$$

$$\therefore \angle DFP = \angle PAF.$$

设 $\angle DFP = \angle PAF = \alpha$ 。

$$\therefore \angle PDF = 90^\circ - \alpha .$$

$$\therefore \angle C = \angle DEC = \angle ADE = 90^\circ - \alpha .$$

$$\therefore \angle FAP + \angle ADE = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle FOD = 90^\circ .$$

$$\therefore OD = AD \cdot \sin \angle PAF = 4m \cdot \sin \angle DFP = \frac{2\sqrt{6}}{3}m .$$

$$\because \angle EDF = \angle AFE, \quad \angle EDF + \angle DFO = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle AFE + \angle DFO = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle EFD = \angle FOD .$$

$$\text{又 } \angle ODE = \angle FDE ,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle FOD .$$

$$\therefore \frac{DF}{DO} = \frac{DE}{DF} .$$

$$\therefore DE = \frac{3}{2}\sqrt{6}m .$$

$$\therefore DC = \frac{3}{2}\sqrt{6}m .$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}\sqrt{6}m .$$

$$\therefore \frac{CF}{DF} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6}m}{\sqrt{6}m} = \frac{1}{2} .$$