

杨浦区初三期中数学测评卷

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列实数中, 无理数的是 ()

- A. $\frac{1}{8^3}$ B. $\frac{22}{7}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $0.0\dot{3}0\dot{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】明确无理数定义: 无理数是无限不循环小数, 有理数是整数和分数的统称, 有限小数和无限循环小数都属于有理数, 化简各选项后根据定义判断即可.

【详解】解: $\because \frac{1}{8^3} = \sqrt[3]{8} = 2$, 2 是整数, 属于有理数, $\therefore$ A 不符合题意;

$\because \frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数, $\therefore$ B 不符合题意;

$\because \pi$ 是无限不循环小数, 是无理数, $\therefore \frac{\pi}{3}$ 仍是无限不循环小数, 是无理数, $\therefore$ C 符合题意;

$\because 0.0\dot{3}0\dot{3}$ 是无限循环小数, 属于有理数, $\therefore$ D 不符合题意.

2. 下列运算中, 正确的是 ()

- A. $a^3 + a^3 = 2a^3$ B. $2a^3 - a^3 = 2$ C. $a^3 \cdot a^3 = a^9$ D. $(a^3)^3 = a^6$

【答案】A

【解析】

【分析】运用合并同类项、同底数幂乘法、幂的乘方的法则, 逐一判断选项正误.

【详解】解: A、 $\because$ 合并同类项时, 系数相加, 字母和指数不变, $\therefore a^3 + a^3 = (1+1)a^3 = 2a^3$, A 正确;

B、 $\because 2a^3 - a^3 = (2-1)a^3 = a^3 \neq 2$, $\therefore$ B 错误;

C、 $\because$ 同底数幂相乘，底数不变，指数相加， $\therefore a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6 \neq a^9$ ， $\therefore$ C 错误；

D、 $\because$ 幂的乘方，底数不变，指数相乘， $\therefore (a^3)^3 = a^{3 \times 3} = a^9 \neq a^6$ ， $\therefore$ D 错误。

3. 下列方程中，有两个不相等的实数根的是（ ）

A. $x^2 + 1 = 0$

B. $x^2 - 2x + 1 = 0$

C. $x^2 + x + 1 = 0$

D. $x^2 + x - 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】解题思路为利用一元二次方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，分别计算四个选项方程的 Δ 值，根据 Δ 与 0 的大小关系判断根的情况。本题主要考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 及根据 Δ 判断根的情况是解题的关键。

【详解】解：选项 A： $x^2 + 1 = 0$

$$a = 1, b = 0, c = 1,$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0, \text{ 无实数根, 不符合题意;}$$

选项 B： $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$a = 1, b = -2, c = 1,$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0, \text{ 有两个相等的实数根, 不符合题意;}$$

选项 C： $x^2 + x + 1 = 0$

$$a = 1, b = 1, c = 1,$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0, \text{ 无实数根, 不符合题意;}$$

选项 D： $x^2 + x - 1 = 0$

$$a = 1, b = 1, c = -1,$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0, \text{ 有两个不相等的实数根, 符合题意;}$$

故选：D。

4. 下列函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是（ ）

A. $y = -\frac{2}{x}$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = x^2 - 2$

D. $y = 2x - 2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数、反比例函数、二次函数的增减性，逐一判断各选项即可得出结果.

【详解】A、 $y = -\frac{2}{x}$ ，图象过二，四象限，在每一个象限内， y 随自变量 x 的值增大而增大，不符合题意；

B、 $y = \frac{2}{x}$ ，图象过一，三象限，在每一个象限内， y 随自变量 x 的值增大而减小，不符合题意；

C、 $y = x^2 - 2$ ，在 y 轴左侧， y 随自变量 x 的值增大而减小，在 y 轴右侧， y 随自变量 x 的值增大而增大，不符合题意；

D、 $y = 2x - 2$ ， $k = 2 > 0$ ， y 随自变量 x 的值增大而增大，符合题意.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(8,6)$ ，以 M 为圆心， r 为半径的圆与 x 轴相交，与 y 轴相离，那么 r 可以取的值是 ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】先求出圆心 M 到 x 轴和 y 轴的距离，再根据直线与圆相交相离的位置关系确定半径 r 的取值范围，最后匹配选项即可.

【详解】解： $\because$ 点 M 的坐标为 $(8,6)$ ，

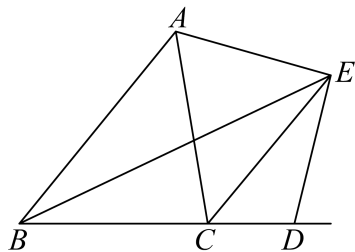
$\therefore$ 圆心 M 到 x 轴的距离 $d_1 = 6$ ，到 y 轴的距离 $d_2 = 8$ ，

$\because$ 圆与 x 轴相交，与 y 轴相离，

$\therefore r > d_1$ 且 $r < d_2$ ，即 $6 < r < 8$ ，

观察选项，只有 7 满足该范围，因此选 B.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 E ，连接 AE ，如果要求出 $\angle CAE$ 的度数，只需知道下列哪个角的度数 ()



A. $\angle ABC$

B. $\angle ACB$

C. $\angle BAC$

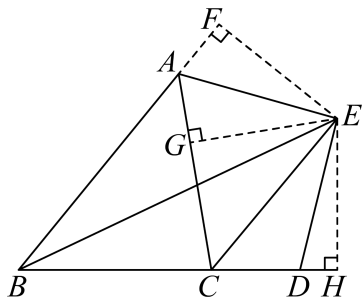
D. $\angle AEC$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质与判定. 过点 E 作 AB 、 AC 、 BC 所在直线的垂线, 利用角平分线的性质定理可得点 E 到 AB 、 AC 的距离相等, 进而判定 AE 平分 $\angle FAG$, 建立 $\angle CAE$ 与 $\angle BAC$ 的数量关系即可求解.

【详解】解: 过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 F , $EG \perp AC$ 交 AC 于点 G , $EH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H .



$\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $EF \perp AB$, $EH \perp BC$,

$\therefore EF = EH$.

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$, $EG \perp AC$, $EH \perp BC$ (D 、 B 、 C 共线),

$\therefore EG = EH$.

$\therefore EF = EG$.

$\because EF \perp AB$, $EG \perp AC$,

$\therefore AE$ 平分 $\angle FAG$.

$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle FAG = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BAC)$.

$\therefore$ 只要求出 $\angle CAE$ 的度数, 只需知道 $\angle BAC$ 的度数. 故选 C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算 $(a-2)(a+2) =$ _____.

【答案】 $a^2 - 4$

【解析】

【分析】根据平方差公式直接进行计算即可

【详解】 $(a-2)(a+2) = a^2 - 4$

故答案为: $a^2 - 4$

【点睛】本题考查了平方差公式, 熟练掌握平方差公式的结构特征是解题的关键

8. 解不等式组: $\begin{cases} x-1 < 0 \\ 2x+3 \geq \frac{1}{2}x \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】

$$-2 \leq x < 1$$

【解析】

【分析】先分别求解两个一元一次不等式，再取两个解集的公共部分，即可得到不等式组的解集.

【详解】解: $\begin{cases} x-1 < 0 \text{①} \\ 2x+3 \geq \frac{1}{2}x \text{②} \end{cases},$

解不等式①得: $x < 1$,

解不等式②得: $x \geq -2$,

所以不等式组的解集为 $-2 \leq x < 1$.

9. 方程 $\sqrt{3x+1} = 2$ 的解是_____.

【答案】

$$x = 1$$

【解析】

【分析】通过两边平方将无理方程转化为一元一次方程，求解后检验得到原方程的解；

【详解】解: $\sqrt{3x+1} = 2$,

方程两边同时平方，得 $3x+1 = 2^2$,

整理得 $3x+1 = 4$,

移项得 $3x = 4-1$,

合并同类项得 $3x = 3$,

系数化为1得 $x = 1$,

检验: 将 $x = 1$ 代入原方程，左边 $= \sqrt{3 \times 1 + 1} = 2 =$ 右边，

因此 $x = 1$ 是原方程的解.

10. 正八边形的中心角等于 _____度.

【答案】 45

【解析】

【分析】本题考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是牢记中心角的定义及求法，根据正 n 多边形中心

角公式是 $\frac{360^\circ}{n}$ 即可解题.

【详解】解：正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ ；

故答案为：45.

11. 已知一斜坡的坡比为 1: 2, 坡角为 α , 那么 $\sin \alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】坡比 = 坡角的正切值，设竖直直角边为 x ，水平直角边为 $2x$ ，由勾股定理求出斜边，进而可求出 α 的正弦值.

【详解】解：如图所示：

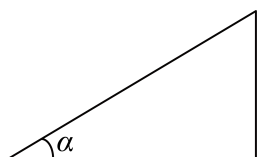
由题意，得： $\tan \alpha = i = \frac{1}{2}$,

设竖直直角边为 x ，水平直角边为 $2x$ ，

则斜边 = $\sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x$,

则 $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



【点睛】此题主要考查坡比、坡角的关系以及勾股定理；熟记坡角的正切等于坡比是解决问题的关键.

12. 中国邮政于 2026 年 1 月 5 日发行《丙午年》特种邮票共计 2668 万套，将数据“2668 万”用科学记数法表示为_____.

【答案】 2.668×10^7

【解析】

【详解】解：2668 万 = $26680000 = 2.668 \times 10^7$

13. 九年级（1）班羽毛球小组共有 4 名队员，其中两名男生，两名女生. 从中随机选取两人，恰好能组成一组混双搭档的概率是_____.

【答案】

$$\frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】根据题意列出所有等可能结果，再找出恰好组成混双搭档的结果，结合概率公式计算即可.

【详解】解：记两名男生分别为男 1，男 2，两名女生分别为女 1，女 2，

列表如下：

	男 1	男 2	女 1	女 2
男 1		(男 1，男 2)	(男 1，女 1)	(男 1，女 2)
男 2	(男 2，男 1)		(男 2，女 1)	(男 2，女 2)
女 1	(女 1，男 1)	(女 1，男 2)		(女 1，女 2)
女 2	(女 2，男 1)	(女 2，男 2)	(女 2，女 1)	

可得共有12种等可能的结果，其中恰好能组成混双搭档（一男一女）的结果有8种，

根据概率公式可得，恰好能组成一组混双搭档的概率为 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

14. 将直线 $y=3x-1$ 向上平移 m 个单位长度，如果平移后的直线经过第二象限，那么 m 的值可以是_____。（写出一个即可）

【答案】

$$2$$

【解析】

【分析】根据直线经过第二象限求参数的取值范围，根据平移规则求出平移后的直线解析式，再结合一次函数的性质得到参数的取值范围，写出一个符合要求的值即可.

【详解】解：∵ $y=3x-1$ 向上平移 m 个单位长度，

∴ 平移后的解析式为 $y=3x-1+m$ ，

∴ 平移后的直线经过第二象限，

$$\therefore m-1>0,$$

$$\therefore m>1,$$

$\therefore m$ 的值可以是 2 (答案不唯一) .

15. 如果抛物线 $y = x^2 - x - 6$ 上的点 $A(-3, n)$ 和点 B 关于它的对称轴对称, 那么点 B 的坐标是_____.

【答案】

$(4, 6)$

【解析】

【分析】首先确定抛物线的对称轴, 再求出点 A 的坐标, 最后根据对称点的性质求解即可.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 - x - 6$ 中, $a = 1$, $b = -1$,

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为 } x = -\frac{-1}{2 \times 1} = \frac{1}{2},$$

将 $x = -3$ 代入抛物线解析式, 得 $n = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 6)$,

$\because$ 点 A 和点 B 关于抛物线对称轴对称, 对称点纵坐标相等, 点 A , 点 B 到对称轴的距离相等,

设点 B 的横坐标为 x , 可得 $\frac{-3+x}{2} = \frac{1}{2}$,

解得 $x = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4, 6)$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD = 2AD$, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{CD}$ 可用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

【答案】

$$\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$$

【解析】

【分析】先根据线段比例关系得到向量 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的关系, 再利用平面向量的三角形法则将 $\overrightarrow{CD}$ 转化为已知向量的线性组合, 即可得到结果.

【详解】解: $\because$ 点 D 在边 AB 上, $BD = 2AD$,

$$\therefore BD = \frac{2}{3}BA,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA},$$

$$\because \overrightarrow{BA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\vec{a},$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

17. 已知正方形 ABCD, AB=1, 分别以点 A、C 为圆心画圆, 如果点 B 在圆 A 外, 且圆 A 与圆 C 外切, 那么圆 C 的半径长 r 的取值范围是_____.

【答案】 $\sqrt{2} - 1 < r < \sqrt{2}.$

【解析】

【分析】 首先根据题意求得对角线 AC 的长, 设圆 A 的半径为 R, 根据点 B 在圆 A 外, 得出 $0 < R < 1$, 则 $-1 < -R < 0$, 再根据圆 A 与圆 C 外切可得 $R+r=\sqrt{2}$, 利用不等式的性质即可求出 r 的取值范围.

【详解】 $\because$ 正方形 ABCD 中, AB=1,

$$\therefore AC = \sqrt{2},$$

设圆 A 的半径为 R,

$\therefore$ 点 B 在圆 A 外,

$$\therefore 0 < R < 1,$$

$$\therefore -1 < -R < 0,$$

$$\therefore \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} - R < \sqrt{2}.$$

$\therefore$ 以 A、C 为圆心的两圆外切,

$$\therefore \text{两圆的半径的和为 } \sqrt{2},$$

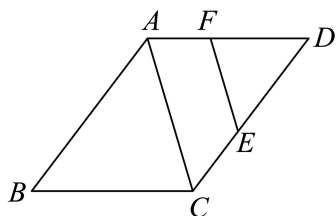
$$\therefore R+r=\sqrt{2}, r=\sqrt{2}-R,$$

$$\therefore \sqrt{2} - 1 < r < \sqrt{2}.$$

故答案为 $\sqrt{2} - 1 < r < \sqrt{2}.$

【点睛】 本题考查了圆与圆的位置关系, 点与圆的位置关系, 正方形的性质, 勾股定理, 不等式的性质. 掌握位置关系与数量之间的关系是解题的关键.

18. 如图, 在平行四边形 ABCD 中, $AB=6$, $BC=5$, $\sin B = \frac{4}{5}$, 点 E 是边 CD 上一点, $EF \parallel AC$, 如果点 D 关于直线 EF 的对称点 G 恰好在边 AB 上, 那么 AG 的长是_____.

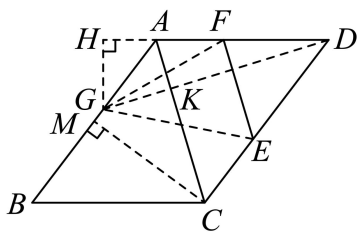


【答案】 $\frac{7}{3}$

【解析】

【分析】过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，连接 FG, EG, DG ，过点 G 作 $GH \perp AD$ 于点 H ，先求得 $AC = BC = 5$ ，证明 $\angle HAG = \angle B = \angle CAG = \alpha$ ，设 $GH = 4k$ ，则 $AG = 5k$ ， $AH = 3k$ ，证明 $\triangle AHG \cong \triangle AKG$ (AAS) 得出 $GK = GH = 4k$ ， $AK = AH = 3k$ ， $KC = AC - AK = 5 - 3k$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADK$ ， $\text{Rt}\triangle CDK$ 中，根据勾股定理求得 $k = \frac{7}{15}$ ，即可求解.

【详解】解：如图，过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，连接 FG, EG, DG ，过点 G 作 $GH \perp AD$ 于点 H ，



$$\because BC = 5, \sin B = \frac{CM}{BC} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore CM = 4,$$

$$\therefore BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = 3,$$

$$\therefore AM = BM = 3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore CA = CB,$$

设 $\angle B = \alpha$,

$$\therefore \angle CAG = \angle B = \alpha,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC = 5, CD = AB = 6,$$

$$\therefore \angle HAG = \angle B = \angle CAG = \alpha,$$

$$\therefore \frac{GH}{AG} = \sin \angle HAG = \sin B = \frac{4}{5},$$

设 $GH = 4k$, 则 $AG = 5k$, $AH = 3k$,

$\therefore$ 点 D 关于直线 EF 的对称点 G 恰好在边 AB 上,

$$\therefore DG \perp EF,$$

又 $\because EF \parallel AC$,

$\therefore DG \perp AC$, 设 DG, AC 交于点 K ,

$$\therefore \angle HAG = \angle KAG = \alpha, \angle H = \angle AKG = 90^\circ, AG = AG,$$

$$\therefore \triangle AHG \cong \triangle AKG (\text{AAS}),$$

$$\therefore GK = GH = 4k, \quad AK = AH = 3k,$$

$$\therefore KC = AC - AK = 5 - 3k,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADK \text{ 中, } KD^2 = AD^2 - AK^2 = 5^2 - (3k)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDK \text{ 中, } KD^2 = CD^2 - KC^2 = 6^2 - (5 - 3k)^2,$$

$$\therefore 5^2 - (3k)^2 = 6^2 - (5 - 3k)^2,$$

$$\text{解得: } k = \frac{7}{15},$$

$$\therefore AG = 5k = 5 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{3}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{2}{\sqrt{3}+1} - 12^{\frac{1}{2}} + |1-\sqrt{3}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

【答案】 6

【解析】

【分析】 先计算分母有理化、化简二次根式、化简绝对值, 再计算二次根式的加减法即可得.

$$\text{【详解】 解: 原式} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \sqrt{12} + \sqrt{3} - 1 + 8$$

$$= \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 8$$

$$= 6.$$

$$20. \text{ 解方程: } \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}.$$

【答案】

$$x = -4$$

【解析】

【详解】解： $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$,

去分母，得 $3(x+1) - 2(x-1) = 1$,

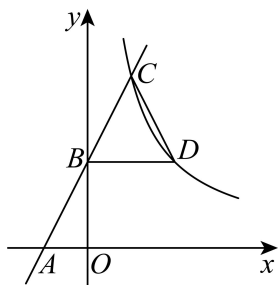
去括号，得 $3x+3-2x+2=1$,

解得 $x = -4$;

检验，当 $x = -4$ 时， $x^2 - 1 = 15 \neq 0$,

$\therefore$ 方程的解为 $x = -4$.

21. 如图，一次函数 $y = 2x + 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$ 的图像交于点 C ，过点 B 作 x 轴的平行线与该反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像交于点 D ，连接 CD .



(1) 求 A 、 B 两点的坐标;

(2) 如果 $BC = DC$ ，求 k 的值.

【答案】(1) $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$

(2) 16

【解析】

【分析】(1) 分别令 $x = 0$ 和 $y = 0$ 即可得到答案;

(2) 过点 C 作 $CE \perp BD$ ，垂足为 E ，证明 $\triangle AOB \sim \triangle BEC$ ，设点 $C(m, 2m+4)$ ，则 $D(2m, 4)$ ，得到 $m(2m+4) = 2m \times 4$ ，求出 $D(4, 4)$ ，即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：当 $x = 0$ 时， $y = 4$ ，

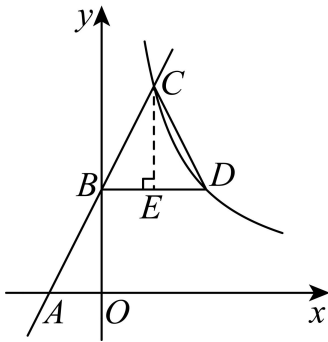
$\therefore B(0, 4)$,

当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ，

$\therefore A(-2, 0)$;

【小问 2 详解】

解：过点 C 作 $CE \perp BD$ ，垂足为 E ，



$$\because \angle BAO = \angle CBE, \angle AOB = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{AO}{OB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

设点 $C(m, 2m+4)$ ，则 $D(2m, 4)$ ，

$$\therefore m(2m+4) = 2m \times 4,$$

$$\text{整理得, } m^2 - 2m = 0,$$

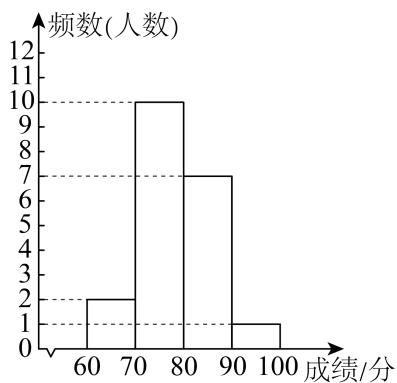
解得 $m = 0$ (舍去) 或 $m = 2$ ，

$$\therefore D(4, 4),$$

$$\therefore k = 4 \times 4 = 16.$$

22. 某学校组织数学竞赛，对 A、B 两个班级各 20 名学生进行了测试，对测试成绩（百分制）进行了整理分析，下面给出了部分信息.

(i) A 班测试成绩的频数分布直方图如图:



(数据分成 4 组: $60 \leq x < 70, 70 \leq x < 80, 80 \leq x < 90, 90 \leq x \leq 100$)

(ii) B 班测试成绩如下:

69, 69, 70, 70, 71, 73, 77, 78, 80, 81,
82, 82, 82, 82, 83, 83, 83, 86, 91, 96.

(iii) A 班、B 班测试成绩的平均数、众数、中位数如下:

	平均数	众数	中位数
A 班	79.6	77	p
B 班	79.4	m	q

根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) m 的值为_____, p _____ q (填 “>” “=” 或 “<”);
- (2) 如果两个班级都各去掉一个最高分和一个最低分, 那么下列判断正确的是_____;
- A. 两个班测试成绩的方差都增大;
- B. 两个班测试成绩的方差都减小;
- C. A 班测试成绩的方差增大, B 班测试成绩的方差减小;
- D. A 班测试成绩的方差减小, B 班测试成绩的方差增大.
- (3) 为了选出冲击个人冠军的种子选手, 学校对这次成绩 90 分以上的甲、乙、丙三位同学又单独进行了 5 次测试, 平均数较大的选手排序靠前, 如果平均数相同, 那么方差较小的选手排序靠前. 这 5 次测试的成绩如下:

	测试 1	测试 2	测试 3	测试 4	测试 5	方差
甲	93	90	92	93	92	1.2
乙	91	92	92	92	92	0.16
丙	94	90	90	94	k	$S_{\text{丙}}^2$

如果丙的排序居中, 那么表中 k (k 为整数) 的值为_____, $S_{\text{丙}}^2 =$ _____.

【答案】(1) 82, <

(2) B (3) 92, 3.2

【解析】

【分析】(1) 根据众数、中位数的定义分析即可;

(2) 根据方差的意义求解即可;

(3) 根据平均数、方差的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由 B 班的数据可得, 众数 $m = 82$, 中位数 $q = \frac{81+82}{2} = 81.5$

由 A 班的频数分布直方图可得, 第 10, 11 个数据在 $70 \leq x < 80$ 这一组, 因此中位数 $p < 80$

故 $p < q$;

【小问 2 详解】

解: 如果两个班级都各去掉一个最高分和一个最低分, 相当于将波动最大的两个数据去掉了,

由方差的意义可得, 两个班测试成绩的方差都减小;

【小问 3 详解】

解: 由题意得, $\overline{x_{\text{甲}}} = (93+90+92+93+92) \div 5 = 92$, $\overline{x_{\text{乙}}} = (91+92+92+92+92) \div 5 = 91.8$

$$\overline{x_{\text{丙}}} = (94+90+90+94+k) \div 5 = \frac{368+k}{5}$$

$\therefore$ 平均数较大的选手排序靠前, 如果平均数相同, 那么方差较小的选手排序靠前

$$\therefore \begin{cases} \overline{x_{\text{乙}}} < \overline{x_{\text{丙}}} \leq \overline{x_{\text{甲}}} \\ S^2_{\text{丙}} > S^2_{\text{甲}} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \overline{x_{\text{乙}}} \leq \overline{x_{\text{丙}}} < \overline{x_{\text{甲}}} \\ S^2_{\text{丙}} < S^2_{\text{乙}} \end{cases}$$

$$\therefore 91.8 \leq \frac{368+k}{5} \leq 92$$

解得 $91 \leq k \leq 92$,

$$\text{当 } k = 91 \text{ 时, } \overline{x_{\text{丙}}} = \frac{368+91}{5} = 91.8,$$

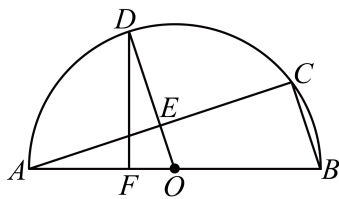
$$\text{则 } S^2_{\text{丙}} = \frac{(94-91.8)^2 \times 2 + (90-91.8)^2 \times 2 + (91-91.8)^2}{5} = 3.36 > S^2_{\text{乙}}, \text{ 不成立;}$$

$$\text{当 } k = 92 \text{ 时, } \overline{x_{\text{丙}}} = \frac{368+92}{5} = 92,$$

$$\text{则 } S^2_{\text{丙}} = \frac{(94-92)^2 \times 2 + (90-92)^2 \times 2 + (92-92)^2}{5} = 3.2 > S^2_{\text{乙}}, \text{ 成立,}$$

$\therefore$ 表中 k (k 为整数) 的值为 92, $S_{\text{丙}}^2 = 3.2$.

23. 已知: 如图, AB 是半圆 O 的直径, C 是半圆上一点 (不与点 A 、 B 重合), 点 D 是弧 AC 的中点, 过点 D 作 $DF \perp AB$, 垂足为点 F , 连接 OD 与 AC 交于点 E .



(1) 求证: $BC = 2OF$;

(2) 连接 FE 并延长与弦 BC 的延长线交于点 G , 联结 DG . 求证: 四边形 $DECG$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先由垂径定理的推论结合三角形中位线定理得到 $BC = 2OE$, 然后证明 $\triangle AEO \cong \triangle DFO$ (AAS) 即可;

(2) 连接 AD , 先由三角形的中位线定理证明 $OE \parallel BC$, 然后证明 $\triangle AED \cong \triangle ECG$ (ASA), 得到 $DE = GC$, 即可证明四边形 $DECG$ 是平行四边形, 再由 $\angle DEC = 90^\circ$ 证明即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 D 是弧 AC 的中点, OD 是半径,

$$\therefore OD \perp AC, \quad AE = EC$$

$$\because OA = OB$$

$$\therefore BC = 2OE,$$

$$\because OD \perp AC,$$

$$\therefore \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\because DF \perp AB,$$

$$\therefore \angle DFO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AEO = \angle DFO,$$

$$\text{又} \because \angle AOE = \angle DOF, \quad OA = OD$$

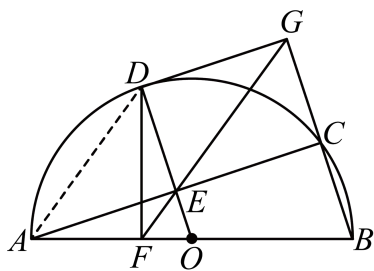
$$\therefore \triangle AEO \cong \triangle DFO \text{ (AAS)}$$

$$\therefore OE = OF,$$

$$\therefore BC = 2OF;$$

【小问 2 详解】

证明: 连接 AD



$$\because OA = OB, AE = CE,$$

$$\therefore OE \parallel BC$$

$$\therefore \angle AED = \angle ECG,$$

$$\because OE = OF, OD = OA$$

$$\therefore \frac{OF}{OA} = \frac{OE}{OD},$$

$$\therefore \angle EOF = \angle DOA$$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle ODA$$

$$\therefore \angle OFE = \angle OAD$$

$$\therefore EF \parallel AD$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEF = \angle GEC$$

$$\text{又} \because AE = EC$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle ECG (\text{ASA})$$

$$\therefore DE = GC$$

$$\text{又} \because DE \parallel GC$$

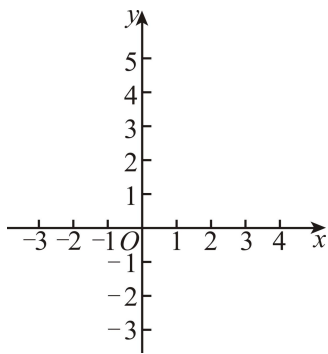
$$\therefore \text{四边形 } DECG \text{ 是平行四边形,}$$

$$\because OD \perp AC$$

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } DECG \text{ 是矩形.}$$

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 顶点为点 D .



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 点 P 是对称轴右侧的抛物线上一点, 过点 P 作 PQ 垂直抛物线的对称轴, 垂足为点 Q , 连接 PD , 设点 P 的横坐标为 m .

①求 $\tan \angle DPQ$ 的值 (用含 m 的代数式表示).

②过点 Q 作 PD 的平行线, 交抛物线于点 E (点 E 在对称轴右侧), 求 $\frac{DP}{QE}$ 的值;

【答案】 (1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) ① $m - 2$; ② $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由待定系数法求解即可;

(2) ①先求出 $D(2, -1)$, 则 $P(m, m^2 - 4m + 3)$, $Q(2, m^2 - 4m + 3)$, 那么 $PQ = m - 2$,

$DQ = m^2 - 4m + 3 - (-1) = m^2 - 4m + 4$, 再由正切的定义求解即可;

②由平行可得 $\tan \angle EQP = \tan \angle DPQ = m - 2$, 过点 E 作 $EH \perp QP$ 交 QP 的延长线于点 H , 设

$E(t, t^2 - 4t + 3)$, 则 $H(t, m^2 - 4m + 3)$, 则 $EH = t^2 - 4t + 3 - (m^2 - 4m + 3) = (t - 2)^2 - (m - 2)^2$,

$QH = t - 2$, 在 $\text{Rt}\triangle QEH$ 中, $\tan \angle EQH = \frac{EH}{QH} = \frac{(t - 2)^2 - (m - 2)^2}{t - 2}$, 得到方程

$\frac{(t - 2)^2 - (m - 2)^2}{t - 2} = m - 2$, 解得 $\frac{m - 2}{t - 2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, 再由 $\triangle EQH \sim \triangle DQP$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$,

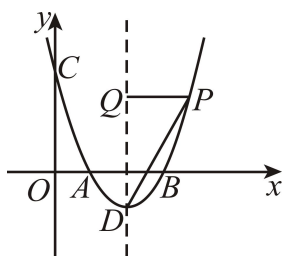
$$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 该抛物线的表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$;

【小问 2 详解】

解：①如图，



$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1,$$

$$\therefore D(2, -1),$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 2$

设点 P 的横坐标为 m ，则 $P(m, m^2 - 4m + 3)$ ，

$\therefore$ 过点 P 作 PQ 垂直抛物线的对称轴，

$$\therefore Q(2, m^2 - 4m + 3),$$

$$\therefore PQ = m - 2, \quad DQ = m^2 - 4m + 3 - (-1) = m^2 - 4m + 4,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle PDQ \text{ 中, } \tan \angle DPQ = \frac{DQ}{PQ} = \frac{m^2 - 4m + 4}{m - 2} = m - 2;$$

② $\because QE \parallel DP$,

$$\therefore \angle EQP = \angle DPQ,$$

$$\therefore \tan \angle EQP = \tan \angle DPQ = m - 2,$$

过点 E 作 $EH \perp QP$ 交 QP 的延长线于点 H ,

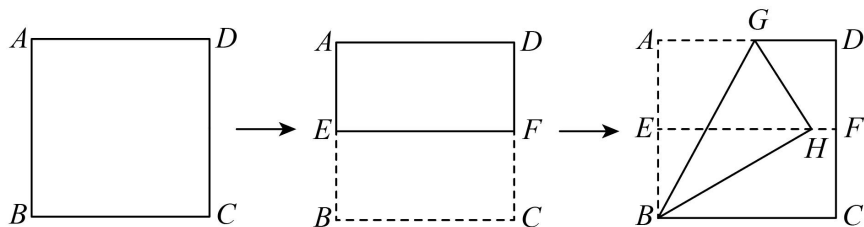


图1正方形 $ABCD$

图2对折正方形 $ABCD$

图3将点 A 折至 EF 上点 H

(2) 小智小组将正方形纸片 (如图 4) 按照图 5 至图 7 的方式操作, 折痕 BE 、 BG 与折痕 AC 的交点分别是 H 、 Q , 经过多次操作和测量, 发现线段 HQ 与 EG 的比值是一个定值, 请你帮助小智小组求出 $\frac{HQ}{GE}$ 的值;

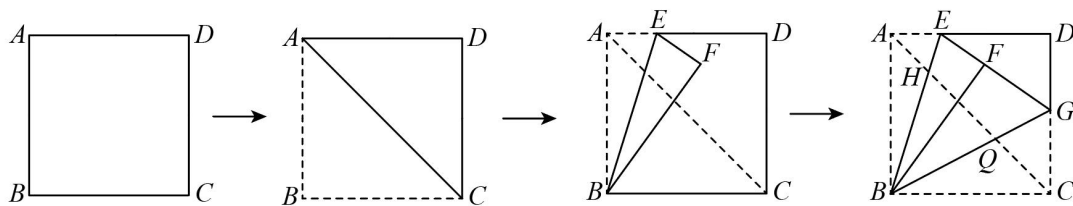


图4正方形 $ABCD$

图5对折正方形 $ABCD$

图6将 AB 折至 EF

图7将 BC 折至 EF

【尝试应用】

(3) 如图 7, 设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $AE = m$, 求 $\frac{HQ}{QC}$ 的值 (用含 m 的代数式表示).

【答案】(1) 30°

$$(2) \frac{HQ}{GE} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(3) \frac{HQ}{QC} = \frac{1+m^2}{1-m^2}.$$

【解析】

【分析】(1) 利用折叠的性质求得 $\triangle ABH$ 是等边三角形, 据此求解即可;

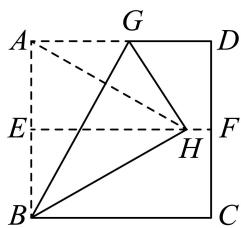
(2) 连接 GH , BD , 证明 $\text{Rt}\triangle GFB \cong \text{Rt}\triangle GCB$ (HL), 求得 $\angle FBG = \angle CBG$, $\angle BGF = \angle BGC$, 证明 $\triangle BQH \sim \triangle CQG$ 和 $\triangle HQG \sim \triangle BQC$, 推出 $\triangle BHG$ 是等腰直角三角形, 再证明 $\triangle BHQ \sim \triangle BGE$, 据此计算即可求解;

(3) 证明 $\triangle EDB \sim \triangle QCB$, $\triangle AEH \sim \triangle CBH$, 分别求得 $CQ = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-m)$, $CH = \frac{\sqrt{2}}{1+m}$,

据此求解即可.

【小问 1 详解】

解：连接 AH ，



由折叠的性质得 $AB = HB$ ， $\angle ABG = \angle HBG$ ， EF 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore HA = HB,$$

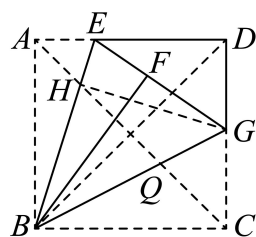
$$\therefore HA = HB = AB,$$

$\therefore \triangle ABH$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ABG = \frac{1}{2} \angle ABH = 30^\circ;$$

【小问 2 详解】

解：连接 GH ， BD ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, \angle ACB = \angle ACD = \angle BDC = 45^\circ,$$

由折叠的性质得 $AB = BF$ ， $\angle ABE = \angle FBE$ ， $\angle EAB = \angle EFB = 90^\circ$ ，

$$\therefore BC = BF, \angle GFB = \angle GCB = 90^\circ,$$

$$\therefore BG = BG,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle GFB \cong \text{Rt}\triangle GCB (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle FBG = \angle CBG, \angle BGF = \angle BGC,$$

$$\therefore \angle EBG = \angle EBF + \angle GBF = \frac{1}{2} (\angle ABF + \angle CBF) = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HBQ = \angle GCQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BQH = \angle CQG,$$

$$\therefore \triangle BQH \sim \triangle CQG,$$

$$\therefore CQ = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - m),$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle CBH,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AH}{CH}, \text{ 即 } \frac{m}{1} = \frac{\sqrt{2}-CH}{CH},$$

$$\therefore CH = \frac{\sqrt{2}}{1+m},$$

$$\therefore HQ = CH - CQ = \frac{\sqrt{2}}{1+m} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-m),$$

$$\therefore \frac{HQ}{QC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{1+m} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-m)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-m)} = \frac{1+m^2}{1-m^2}.$$