

2026 年上海市崇明区中考二模数学试卷

(时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

注意事项:

1. 本卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 答题中不能使用计算器.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{12}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】 B

【解析】

【详解】 解: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$,

观察选项, 只有 $\sqrt{3}$ 的被开方数为 3,

故选: B.

2. 下列运算中, 计算结果正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot 2a^3 = 2a^6$ B. $a^2 + 2a^3 = 3a^5$
C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^5 \div 2a^2 = \frac{1}{2}a^3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查整式运算法则, 根据同底数幂乘法、同类项合并规则、幂的乘方、同底数幂除法相关的法则逐一判断选项即可.

【详解】 选项 A: $\because$ 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加, $\therefore a^2 \cdot 2a^3 = 2a^{2+3} = 2a^5 \neq 2a^6$, 选项 A 不符合题意.

选项 B: $\because a^2$ 与 $2a^3$ 不是同类项, 不能合并, $\therefore a^2 + 2a^3 \neq 3a^5$, B 不符合题意.

选项 C: $\because$ 幂的乘方, 底数不变, 指数相乘, $\therefore (a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6 \neq a^5$, C 不符合题意.

选项 D: $\because$ 同底数幂除法, 底数不变, 指数相减, $\therefore a^5 \div 2a^2 = \frac{1}{2}a^{5-2} = \frac{1}{2}a^3$, 所以 D 正确.

3. 如果一个反比例函数的图像在它所在的每个象限内, y 的值随 x 的值增大而减小, 那么这个函数图像可能经过的点是 ()

- A. (3,1) B. (2,-1) C. (-2,4) D. (0,0)

【答案】A

【解析】

【详解】解: 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

$\because$ 该反比例函数在每个象限内, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore k > 0$,

A、 $3 \times 1 = 3 > 0$, 符合要求;

B、 $2 \times (-1) = -2 < 0$, 不符合要求;

C、 $(-2) \times 4 = -8 < 0$, 不符合要求;

D、反比例函数中 $x \neq 0$, 图像不经过原点, 不符合要求.

4. 某校为了解学生体育运动时间的情况, 将调查所得的 50 个数据整理成下表:

体育运动时间 (小时)	1.5	1.7	1.8	2	2.2
人数 (人)	10	10	20	5	5

对于这组数据, 下列判断中, 正确的是 ()

- A. 众数和平均数相等 B. 中位数和平均数相等
C. 中位数和众数相等 D. 中位数、众数和平均数都相等

【答案】C

【解析】

【详解】解: $\because$ 运动时间为 1.8 小时的人数最多, 为 20 人,

$\therefore$ 众数为 1.8;

$\because$ 总共有 50 个数据, 中位数是从小到大排列后第 25、26 个数据的平均数,

累计人数得前两组共 $10 + 10 = 20$ 个数据, 第 21 到 40 个数据均为 1.8,

∴第25、26个数据都是1.8，中位数为 $\frac{1.8+1.8}{2}=1.8$ ；

$$\bar{x} = \frac{1.5 \times 10 + 1.7 \times 10 + 1.8 \times 20 + 2 \times 5 + 2.2 \times 5}{50} = \frac{89}{50} = 1.78,$$

综上，众数=1.8，中位数=1.8，平均数=1.78，中位数和众数相等．

5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列补充条件中，能判定这个平行四边形是正方形的是（ ）

A. $AC = BD$ ， $AB \perp BC$

B. $AO = BO$ ， $AC \perp BD$

C. $AB = AD$ ， $AC \perp BD$

D. $AO = CO$ ， $AB \perp BC$

【答案】B

【解析】

【分析】本题已知四边形是平行四边形，根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理，逐一分析选项，正方形是同时满足矩形和菱形性质的平行四边形．

【详解】解：∵原四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

对选项 A：∵ $AC = BD$ ，

∴平行四边形 $ABCD$ 是矩形，又 $AB \perp BC$ 与 $AC = BD$ 是等价的，都能判定该平行四边形是矩形，不能判定为正方形，故 A 不符合题意；

对选项 B：∵平行四边形对角线互相平分，

$$\therefore AC = 2AO, \quad BD = 2BO,$$

$$\therefore AO = BO,$$

$$\therefore AC = BD,$$

∴平行四边形 $ABCD$ 是矩形，

又∵ $AC \perp BD$ ，

∴平行四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴平行四边形 $ABCD$ 既是矩形又是菱形，因此是正方形，故 B 符合题意；

对选项 C：∵ $AB = AD$ ，

∴平行四边形 $ABCD$ 是菱形，菱形本身对角线互相垂直，因此 $AC \perp BD$ 不能推出它是正方形，故 C 不符合题意；

对选项 D：平行四边形对角线本来互相平分， $AO = CO$ 恒成立， $AB \perp BC$ 仅能推出平行四边形 $ABCD$ 是矩形，不能判定是正方形，故 D 不符合题意．

6. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $AC = 12$ ，点 D 是边 AB 上一点，若以 D 为圆心， AD 为半径的 $\odot D$ 与以 B 为圆心， BC 为半径的 $\odot B$ 相交，且点 C 在 $\odot D$ 的内部，则 AD 的取值范围为（ ）

A. $4 < AD < 9$

B. $4 < AD < 6.5$

C. $6.5 < AD < 9$

D. $6.5 < AD < 13$

【答案】C

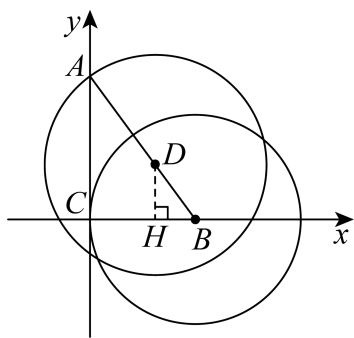
【解析】

【分析】先由勾股定理求出斜边 AB 的长度，设 $AD = x$ ，分别根据点 C 在 $\odot D$ 内部、 $\odot D$ 与 $\odot B$ 相交的条件列出不等式，联立求解得到 AD 的取值范围.

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $AC = 12$ ，

$\therefore$ 由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$.

设 $AD = x$ ，则 $DB = AB - AD = 13 - x$ ， $\odot D$ 半径为 x ， $\odot B$ 半径为 $BC = 5$.



由点 C 在 $\odot D$ 内部得 $CD < AD = x$ ，以点 C 为坐标原点， AC 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图，

则 $C(0,0)$ ， $A(0,12)$ ， $B(5,0)$ ， D 在 AB 上，作 $DH \perp BC$ 于点 H ，

$$\therefore \frac{DH}{DB} = \frac{AC}{AB} = \sin B = \frac{12}{13}, \quad \frac{BH}{DB} = \frac{BC}{AB} = \cos B = \frac{5}{13},$$

$$\therefore DH = \frac{12(13-x)}{13}, \quad BH = \frac{5(13-x)}{13},$$

$$\therefore D\left(5 - \frac{5(13-x)}{13}, \frac{12(13-x)}{13}\right), \quad \text{即 } D\left(\frac{5x}{13}, \frac{12(13-x)}{13}\right)$$

$$\therefore \left[\frac{12(13-x)}{13}\right]^2 + \left(\frac{5x}{13}\right)^2 < x^2$$

化简整理得 $24336 < 3744x$ ，

解得 $x > 6.5$.

由 $\odot D$ 与 $\odot B$ 相交，根据两圆相交的条件得 $|x-5| < DB < x+5$ ，

即 $|x-5| < 13-x < x+5$ ，

解不等式 $13-x < x+5$ 得 $x > 4$ ；

当 $x > 5$ 时， $x-5 < 13-x$ ，解得 $x < 9$ ，

此时 x 的取值范围为 $5 < x < 9$,

即此时 $6.5 < x < 9$,

当 $x \leq 5$ 时, $5 - x < 13 - x$, 即 $x \leq 5$,

此时无解,

综上所述, $6.5 < x < 9$,

即 $6.5 < AD < 9$.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 因式分解: $a^2 + 2a =$ _____.

【答案】 $a(a+2)$

【解析】

【详解】 根据分解因式提取公因式法, 将方程 a^2+2a 提取公因式为 $a(a+2)$. 故 $a^2+2a=a(a+2)$.
故答案是 $a(a+2)$.

8. 方程 $\sqrt{2x-1}=3$ 的解是_____.

【答案】 $x=5$

【解析】

【详解】 解: 方程 $\sqrt{2x-1}=3$ 两边平方, 得 $2x-1=9$,
移项合并同类项, 得 $2x=10$,
系数化为 1, 得 $x=5$,
检验: 当 $x=5$ 时, 左边 $=\sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3 =$ 右边,
因此 $x=5$ 是原方程的解.

9. 函数 $f(x) = \frac{x-3}{2-x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【详解】 解: 要使函数 $f(x) = \frac{x-3}{2-x}$ 有意义, 需满足分式分母不为 0, 即 $2-x \neq 0$,
解得 $x \neq 2$.

10. 不等式组 $\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 \geq 0 \\ 3x - 2 < x \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】

$$-2 \leq x < 1$$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式组的求解，先根据不等式的性质分别求出两个不等式的解集，再根据不等式组解集的确定规则得到最终结果，掌握不等式的性质和解集确定方法是解题关键.

【详解】 解：
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 \geq 0 \text{ ①} \\ 3x - 2 < x \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①，

$$\text{移项得 } \frac{x}{2} \geq -1,$$

不等式两边同乘 2，得 $x \geq -2$.

解不等式②，

$$\text{移项得 } 3x - x < 2,$$

$$\text{合并同类项得 } 2x < 2,$$

不等式两边同除以 2，得 $x < 1$.

根据不等式组解集的确定规则可得原不等式组的解集为 $-2 \leq x < 1$.

11. 将抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 向上平移 4 个单位后，所得的新抛物线与 y 轴的交点坐标为_____.

【答案】 $(0,1)$

【解析】

【分析】 根据二次函数图象的平移规律得到新抛物线的解析式，再利用 y 轴上点的横坐标为 0，代入解析式求出纵坐标，即可得到交点坐标.

【详解】 解： $\because$ 将抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 向上平移 4 个单位，

根据平移的“上加下减”规律，可得新抛物线解析式为：

$$y = x^2 + 2x - 3 + 4,$$

$$\text{整理得 } y = x^2 + 2x + 1.$$

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点的横坐标为 0，

将 $x = 0$ 代入新抛物线解析式，得 $y = 0^2 + 2 \times 0 + 1 = 1$ ，

$\therefore$ 所得新抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$.

12. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2x + 1 = 0$ 有实数根，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ ## $a \neq 0$ 且 $a \leq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式．根据一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根．

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2x + 1 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times a \times 1 \geq 0 \text{ 且 } a \neq 0,$$

解得： $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ ，

故答案为： $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ ．

13. 在一个平衡的天平左、右两端托盘上，分别放置质量为 10g 和 25g 的物品后，天平倾斜（如图所示），现从质量为 5g ， 10g ， 15g 的三件物品中，随机选取两件放置在天平的左端托盘上，则天平恢复平衡的概率为_____．



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 通过画树状图或列表罗列出所有等可能的情况，再从中找出符合条件的情况数，最后利用概率公式求解即可．

【详解】 解： 要使天平恢复平衡，选取的两件物品质量为 $25 - 10 = 15(\text{g})$ ，

列表如下：

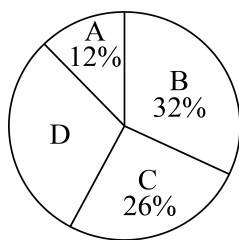
	5g	10g	15g
5g	/	15g	20g
10g	15g	/	25g

15g	20g	25g	/
-----	-----	-----	---

共有 6 种可能的结果，使天平恢复平衡的有 2 种，

$\therefore$ 天平恢复平衡的概率为： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

14. 为激发青少年崇尚科学，探索未知的热情，某校开展“逐梦科技强国”为主题的活动，随机抽取了 200 名学生的模型设计成绩 (成绩为百分制, 用 x 表示), 整理后将其分成如下四组: $A: 60 \leq x < 70$, $B: 70 \leq x < 80$, $C: 80 \leq x < 90$, $D: 90 \leq x \leq 100$, 并将结果绘制成扇形统计图 (如图所示). 如果该校学生共 1200 人, 请估计全校模型设计成绩不低于 80 分的学生共有_____人.



【答案】 672

【解析】

【详解】解: $1 - 12\% - 32\% = 56\%$,

$1200 \times 56\% = 672$ (人),

故估计全校模型设计成绩不低于 80 分的学生共有 672 人.

15. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, AC 与 BD 交于点 P , 令 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么

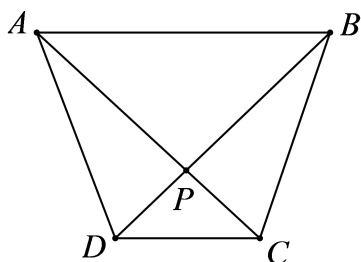
$\overrightarrow{AP} =$ _____ ; (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)

【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】先根据向量的运算法则求出 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, 再根据相似三角形的判定证出 $\triangle ABP \sim \triangle CDP$, 根据相似三角形的性质可得 $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CD} = 2$, 从而可得 $AP = \frac{2}{3}AC$, 由此即可得出答案.

【详解】解: 由题意, 画图如下:



$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CD} = 2,$$

$$\therefore AP = \frac{2}{3} AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}.$$

【点睛】 本题考查了向量的运算、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键.

16. 在某次演习中，我国火箭军成功发射了一枚“东风-31AG”洲际弹道导弹，导弹平均速度为 25 马赫，马赫为速度单位，1 马赫约为 340 米/秒. 用科学记数法表示“东风-31AG”导弹的平均速度为_____米/秒.

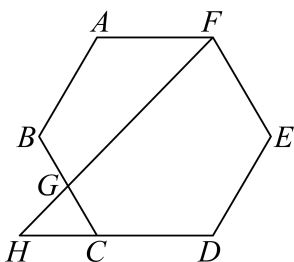
【答案】 8.5×10^3

【解析】

【详解】 解：导弹的平均速度： $25 \times 340 = 8500$,

$$8500 = 8.5 \times 10^3.$$

17. 如图，已知在正六边形 $ABCDEF$ 中， $AB = 4$ ，点 G 是边 BC 的中点，连接 FG 并延长，交 DC 延长线于点 H ，则 CH 的长为_____.



【答案】 $\frac{8}{3}$

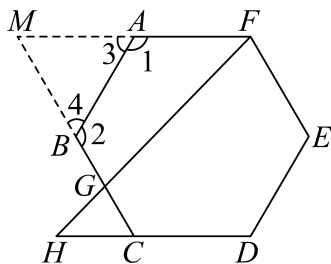
【解析】

【分析】 延长 CB 、 FA 交于点 M ，在正六边形 $ABCDEF$ 中，

$AB = BC = FA = 4$, $\angle 1 = \angle 2 = 120^\circ$, $AF \parallel CD$ ，证明 $\triangle ABM$ 是等边三角形，得出 $AM = BM = AB = 4$,

根据点 G 是 BC 中点, 得出 $BG = CG = 2$, 证明 $\triangle MFG \sim \triangle CHG$, 根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】解: 延长 CB 、 FA 交于点 M ,



在正六边形 $ABCDEF$ 中, $AB = BC = FA = 4$, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$, $AF \parallel CD$,

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 60^\circ,$$

$$\therefore MA = MB,$$

$\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形,

$$\therefore AM = BM = AB = 4,$$

$\therefore$ 点 G 是 BC 中点,

$$\therefore BG = CG = 2,$$

$$\therefore MG = 4 + 2 = 6, MF = 4 + 4 = 8,$$

$$\therefore AF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle MFG \sim \triangle CHG,$$

$$\therefore \frac{MF}{HC} = \frac{MG}{CG},$$

$$\therefore \frac{8}{HC} = \frac{6}{2},$$

$$\therefore HC = \frac{8}{3}.$$

18. 定义: 有一组对角相等而另一组对角不相等的凸四边形叫做“等对角四边形”. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿着过点 B 的直线 l 翻折, 使点 C 落在 AB 边上的点 D 处, 点 E 是边 AC 上一点, 若四边形 $BCED$ 是“等对角四边形”, 则 $\frac{AE}{AC}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】先根据等腰三角形的性质求出 $\triangle ABC$ 各内角的度数, 再结合“等对角四边形”的定义分两种情况进行解答即可.

【详解】解：在 ABC 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

设过点 B 的直线 l 与 AC 相交于点 P ，连接 PD ，

由翻折的性质可知 $\angle BDP = \angle ACB = 72^\circ$ ， $BD = BC$ ， $\angle DBP = \angle CBP = \frac{1}{2}\angle ABC = 36^\circ$ ，

当四边形 $BCED$ 是“等对角四边形”时，有以下两种情况：

①当 $\angle BDE = \angle C = 72^\circ$ 时，

$$\therefore \angle BDP = \angle C = 72^\circ,$$

$\therefore E$ 和点 P 重合，如图所示，

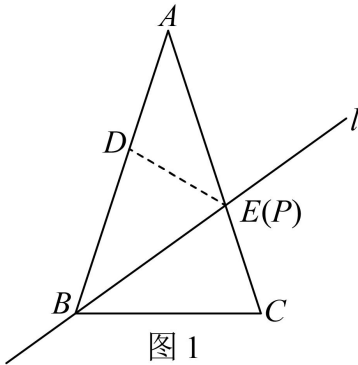


图 1

$$\text{此时，} \angle DEC = 360^\circ - (\angle ABC + \angle BDE + \angle C) = 144^\circ$$

$$\therefore \angle DEC \neq \angle ABC$$

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是“等对角四边形”；

设 $AE = x$ ， $AB = AC = a$ ，其中 $x > 0$ ， $a > 0$

$$\therefore CE = AC - AE = a - x, \frac{AE}{AC} = \frac{x}{a}$$

$$\therefore \angle A = \angle DBP = 36^\circ,$$

$$\therefore BE = AE = x,$$

$$\text{由折叠可知，} \angle BEC = \frac{1}{2}\angle DEC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore BC = BE = x$$

在 ABC 和 BEC 中，

$$\angle CPA = \angle A = 36^\circ, \angle C = \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BEC$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CE},$$

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

整理得到, $x^2 + ax - a^2 = 0$

$$\text{解得, } x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}a$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}a < 0 \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \text{ 时, } \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{AE}{AC} = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

②当 $\angle DEC = \angle ABC = 72^\circ$ 时, 如图所示,

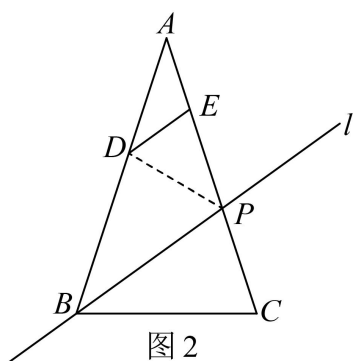


图 2

同理可得, $\angle BDE = 144^\circ$,

$$\therefore \angle BDE \neq \angle C$$

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是“等对角四边形”;

设 $AE = y, AB = AC = a$, 其中 $x > 0, a > 0$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{y}{a}$$

$$\because \angle EDA = 180^\circ - \angle BDE = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore DE = AE = y$$

$$\because \angle EDA = \angle DBP = 36^\circ$$

$$\therefore DE \parallel BP,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABP$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AE \cdot AB = AD \cdot AP$$

由①可知, $BC = BD = BP = AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

$$\therefore AD \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = ay,$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}y,$$

$$\therefore AD = AB - BD = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}+1}{2}y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

$$\therefore \frac{y}{a} = \sqrt{5}-2,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{y}{a} = \sqrt{5}-2,$$

综上所述, $\frac{AE}{AC}$ 的值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sqrt{5}-2$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $(\sqrt{3})^{-1} - (\pi-1)^0 + 12^{\frac{1}{2}} - |\sqrt{3}-1|$

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【详解】 解: $(\sqrt{3})^{-1} - (\pi-1)^0 + 12^{\frac{1}{2}} - |\sqrt{3}-1|$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

20. 解方程: $\frac{x+1}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-3} = 1$

【答案】 $x = -1$

【解析】

【详解】解： $\frac{x+1}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-3} = 1$

$$\therefore \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - \frac{4}{x-3} = 1$$

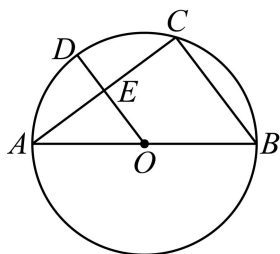
去分母得到， $x+1-4(x-2)=(x-2)(x-3)$ ，

整理得到， $x^2-2x-3=0$ ，

解得 $x=-1$ 或 $x=3$ ，

经检验 $x=3$ 是增根， $x=-1$ 是分式方程的解

21. 如图，已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 为 $\odot O$ 的弦，且 $AC=8$ ，点 D 为 $\widehat{AC}$ 的中点，连接 OD ，交 AC 于点 E ， $DE=2$ 。



(1) 求 $\odot O$ 的半径；

(2) 连接 BE ，求 $\cos \angle BEO$ 的值.

【答案】(1) 5

(2) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据垂径定理得到 $OD \perp AC$ ， $AE = CE = \frac{1}{2}AC = 4$ ，设 $OA = OD = r$ ，则 $OE = OD - DE = r - 2$ ，利用勾股定理求出 $r = 5$ ，即可得到答案；

(2) 证明 $OE \parallel BC$ ，得到 $\angle BEO = \angle CBE$ ，求出 $BC = 6$ ， $BE = 2\sqrt{13}$ ，即可求得答案.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 D 为 $\widehat{AC}$ 的中点，

$$\therefore OD \perp AC, \quad AE = CE = \frac{1}{2}AC = 4,$$

设 $OA = OD = r$ ，则 $OE = OD - DE = r - 2$ ，

$$\therefore OA^2 = OE^2 + AE^2,$$

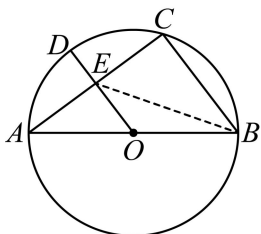
$$\therefore r^2 = (r-2)^2 + 4^2,$$

解得 $r = 5$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 5;

【小问 2 详解】

解: 如图, 由 (1) 得 $OA = OB = 5$, $\angle AEO = 90^\circ$, $CE = \frac{1}{2}AC = 4$,



$$\therefore AB = 10,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle C,$$

$$\therefore OE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEO = \angle CBE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6$,

$$\therefore BE = \sqrt{CE^2 + BC^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore \cos \angle BEO = \cos \angle CBE = \frac{BC}{BE} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

22.

背景	我国新能源汽车产销量连续 10 年全球第一, 2025 年出口 261.5 万辆, 纯电动汽车占比超六成. 凭借环保节能的优势, 电动车越来越受到青睐, 预计到 2035 年, 纯电动汽车将占据市场绝对主导地位.
素材 1	工程师对某品牌的 A 款电动车进行充电测试, 用快速充电桩和慢速充电桩分别对剩余电量为 20% 的两台 A 款电动车同时充电, 充电时, 各自的电量 y 与充电时间 x (小时) 的函数图象分别为图中的线段 BC 和 BD .

素材 2	暑假里，小明一家驾驶某品牌的 A 款电动车从家出发去外地旅游，途中发现电量不足，便驶入服务区充电。此时，车辆剩余电量为 20%，但服务区内的快速充电桩已满，只能先使用慢速充电桩充电。小明一家在慢速充电 40 分钟后，恰好有快速充电桩空出，立即改为快速充电（切换时间忽略不计）。由于行程安排，他们在服务区最多能停留 1.5 小时。

问题解决

(1) 任务一：根据素材 1，试分别对快速充电和慢速充电两种情况，写出 y 关于 x 的函数解析式，并分别指出自变量 x 的取值范围。

(2) 任务二：当他们离开服务区时，车辆的电量能否充至 100%？请说明理由。

【答案】 (1) 快速充电的函数解析式为 $y_1 = 0.8x + 0.2 (0 \leq x \leq 1)$ ；

慢速充电的函数解析式为 $y_2 = 0.1x + 0.2 (0 \leq x \leq 8)$ ；

(2) 当他们离开服务区时，车辆的电量不能充至 100%，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 求出车辆的电量能充至 100% 所需时间，再与 1.5 进行比较即可得到结论。

【小问 1 详解】

解：设快速充电的函数解析式为 $y_1 = kx + b$ ，

把 $(0, 0.2), (1, 1)$ 代入得 $\begin{cases} b = 0.2 \\ 1 = k + b \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = 0.8 \\ b = 0.2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 快速充电的函数解析式为 $y_1 = 0.8x + 0.2 (0 \leq x \leq 1)$ ；

设慢速充电的函数解析式为 $y_2 = mx + n$ ，

把 $(0, 0.2)$, $(8, 1)$ 代入得 $\begin{cases} n = 0.2 \\ 1 = 8m + n \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 0.1 \\ n = 0.2 \end{cases}$,

$\therefore$ 慢速充电的函数解析式为 $y_2 = 0.1x + 0.2 (0 \leq x \leq 8)$;

【小问 2 详解】

解: $40 \div 60 = \frac{2}{3}$ 小时,

把 $x = \frac{2}{3}$ 代入 $y_2 = 0.1x + 0.2$ 得 $y_2 = \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$,

把 $y = \frac{4}{15}$ 代入 $y_1 = 0.8x + 0.2$ 得 $\frac{4}{15} = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$,

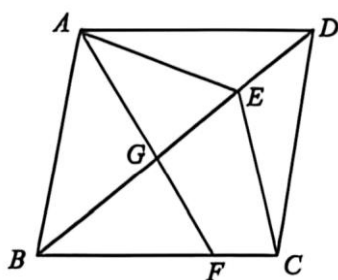
解得 $x = \frac{1}{12}$,

若充到 100%, 还需要 $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (小时), $\frac{11}{12} + \frac{2}{3} = \frac{19}{12}, \frac{19}{12} > \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 车辆的电量不能充至 100%,

$\therefore$ 当他们离开服务区时, 车辆的电量不能充至 100%.

23. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 是对角线 BD 上一点, $BE > ED$, $AE = EC$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 点 F 是边 BC 上一点, AF 与 BD 相交于点 G , 若 $BG \cdot BE = AB \cdot BF$, 求证: $AB^2 = BE \cdot DG$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

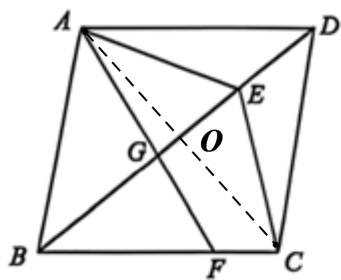
【解析】

【分析】(1) 连接 AC 交 BD 于点 O , 利用等腰三角形的性质证明 $OE \perp AC$, 即可得到结论;

(2) 根据题意得到 $\frac{AB}{BE} = \frac{BG}{BF}$, 证明 $\triangle ADG \sim \triangle FBG$, 推出 $\frac{AB}{BE} = \frac{DG}{AD} = \frac{DG}{AB}$, 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 AC 交 BD 于点 O ,



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$$\because AE = CE,$$

$$\therefore OE \perp AC,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

证明: ∵ $BG \cdot BE = AB \cdot BF$,

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BG}{BF},$$

由 (1) 知, 四边形 $ABCD$ 是菱形;

$$AD \parallel BC, AB = AD,$$

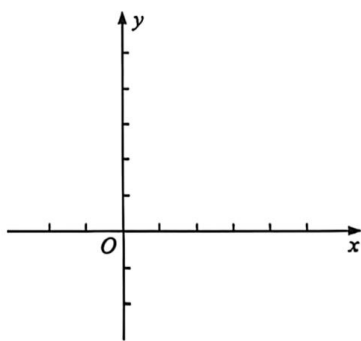
$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle FBG,$$

$$\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{BG}{BF},$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{DG}{AD} = \frac{DG}{AB},$$

$$\therefore AB^2 = BE \cdot DG.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 - 6ax + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 $A(1, 0)$ 和点 B , 顶点为 D .



(1) 求此抛物线的对称轴及点 B 的坐标;

(2) 抛物线的对称轴与 x 轴交于点 M , 点 P 是抛物线上横坐标为 2 的一点, BP 与对称轴交于点 N , 连

接 BD .

①求 $S_{\triangle BDN} : S_{\triangle BMN}$ 的值;

②设直线 PD 与 x 轴交于点 F , 过点 F 作 BD 的平行线, 与 y 轴交于点 E , 当四边形 $BDFE$ 是直角梯形时, 求 $\angle PBO$ 的正切值.

【答案】(1) 抛物线的对称轴为直线 $x=3$, $B(5,0)$

(2) ①1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】(1)根据对称轴公式代入化简即可求得对称轴; 根据抛物线的对称性及点 A 的坐标即可求得点 B 的坐标;

(2)①首先, 根据题意得抛物线的顶点坐标 $D(3, -4a)$, 由点 P 是抛物线上横坐标为 2 的一点, 得点 $P(2, -3a)$, 再求得直线 BP 的表达式为 $y = ax - 5a$, 进而得点 $N(3, -2a)$, 得 $DN = -4a - (-2a) = -2a$, $MN = -2a$, 即可得出 $S_{\triangle BDN} : S_{\triangle BMN} = DN : MN = (-2a) : (-2a) = 1$;

②首先, 过 P 作 $PC \perp x$ 轴于 C , 由 $P(2, -3a)$, $B(5,0)$, 得到 $\tan \angle PBO = \frac{PC}{BC} = \frac{-3a}{3} = -a$, 然后, 分别求得直线 BP 的表达式为 $y = ax - 5a$, 得 $OF = 1, OG = -a$, 直线 BD 的表达式

为 $y = 2ax - 10a$, 得直线 EF 的表达式为 $y = 2ax + 2a$, 进而得 $E(0, 2a)$, 即 $OE = -2a$, 再分两种情

况进行分类讨论, 情况一: 如图 2, 当 $EF \perp DF$ 时, $\angle EFG = 90^\circ$, 证得 $\triangle FOG \sim \triangle EOF$, 得 $\frac{OF}{OE} = \frac{OG}{OF}$,

即 $\frac{1}{-2a} = \frac{-a}{1}$, 解得 $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 进而得 $\tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 情况二: 如图 3, 当 $EF \perp BE$ 时, $\angle BEF = 90^\circ$,

证得 $\triangle EOF \sim \triangle BOE$, 得 $\frac{OF}{OE} = \frac{OE}{BO}$, 即 $\frac{1}{-2a} = \frac{-2a}{5}$, 解得 $a = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$,

进而得 $\tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

【小问 1 详解】

解: 根据题意知抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-6a}{2a} = 3$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 - 6ax + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 $A(1,0)$ 和点 B ,

$\therefore$ 抛物线的开口向下,

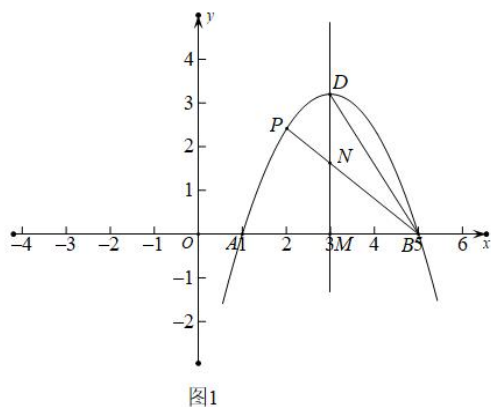
$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 3$,

∴ 点 B 在对称轴的右侧，设点 $B(x, 0)$ ，则 $\frac{x+1}{2} = 3$ ，解得 $x = 5$ ，

∴ $B(5, 0)$ ；

【小问 2 详解】

①解：如图 1，



∵ 抛物线 $y = ax^2 - 6ax + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 $A(1, 0)$ ，

∴ 把 $A(1, 0)$ ，代入 $y = ax^2 - 6ax + c$ ，得 $0 = a - 6a + c$ ，得 $c = 5a$ ，

∴ $y = ax^2 - 6ax + 5a = a(x - 3)^2 - 4a$ ，

∴ 抛物线的顶点 $D(3, -4a)$ ，

∵ 点 P 是抛物线上横坐标为 2 的一点，

∴ 当 $x = 2$ 时， $y = a \cdot 2^2 - 6a \cdot 2 + 5a = -3a$ ，

∴ 点 $P(2, -3a)$ ，

设直线 BP 的表达式为 $y = kx + n$ ，

把 $P(2, -3a)$ ， $B(5, 0)$ 分别代入，得 $\begin{cases} 2k + n = -3a \\ 5k + n = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = a \\ n = -5a \end{cases}$ ，

∴ 直线 BP 的表达式为 $y = ax - 5a$ ，

当 $x = 3$ 时， $y = 3a - 5a = -2a$ ，

∴ 点 $N(3, -2a)$ ，

∴ $DN = -4a - (-2a) = -2a$ ， $MN = -2a$ ，

∴ $S_{\triangle BDN} : S_{\triangle BMN} = DN : MN = (-2a) : (-2a) = 1$ ；

②解：过 P 作 $PC \perp x$ 轴于 C ，

$$\therefore P(2, -3a), B(5, 0),$$

$$\therefore PC = -2a, BC = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore \tan \angle PBO = \frac{PC}{BC} = \frac{-3a}{3} = -a.$$

设直线 DP 的表达式为 $y = mx + b$ ，与 y 轴交于 G ，

把 $D(3, -4a)$ ， $P(2, -3a)$ 代入，得

$$\begin{cases} 3m + b = -4a \\ 2m + b = -3a \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = -a \\ b = -a \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } DP \text{ 的表达式为 } y = -ax - a,$$

当 $y = 0$ 时， $-ax - a = 0$ ，解得 $x = -1$ ；当 $x = 0$ 时， $y = -a$ ，

$$\therefore F(-1, 0), G(0, -a),$$

$$\therefore OF = 1, OG = -a,$$

设直线 BD 的表达式为 $y = hx + t$ ，

把 $B(5, 0)$ ， $D(3, -4a)$ ，代入，得

$$\begin{cases} 5h + t = 0 \\ 3h + t = -4a \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} h = 2a \\ t = -10a \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的表达式为 } y = 2ax - 10a,$$

$$\therefore EF \parallel BD,$$

$$\therefore \text{设直线 } EF \text{ 的表达式为 } y = 2ax + p,$$

把 $F(-1, 0)$ 代入，得 $-2a + p = 0$ ，解得 $p = 2a$ ，

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的表达式为 } y = 2ax + 2a,$$

当 $x = 0$ 时， $y = 2a$ ，

$$\therefore E(0, 2a), \text{即 } OE = 2a.$$

情况一：如图 2，当 $EF \perp DF$ 时， $\angle EFG = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle OFE = \angle OEB,$$

$$\therefore \triangle EOF \sim \triangle BOE,$$

$$\therefore \frac{OF}{OE} = \frac{OE}{BO}, \text{ 即 } \frac{1}{-2a} = \frac{-2a}{5}, \text{ 解得 } a = \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

综上, 当四边形 $BDFE$ 是直角梯形时, 求 $\angle PBO$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【点睛】解题的关键是得到 $\tan \angle PBO = \frac{PC}{BC} = \frac{-3a}{3} = -a$, 分别求得直线 BP 的表达式为 $y = ax - 5a$,

得 $OF = 1, OG = -a$, 直线 BD 的表达式为 $y = 2ax - 10a$, 直线 EF 的表达式为 $y = 2ax + 2a$, 得

$E(0, 2a)$, 即 $OE = -2a$, 再分两种情况进行分类讨论, 情况一: 如图 2, 当 $EF \perp DF$ 时, $\angle EFG = 90^\circ$,

证得 $\triangle FOG \sim \triangle EOF$; 情况二: 如图 3, 当 $EF \perp BE$ 时, $\angle BEF = 90^\circ$, 证得 $\triangle EOF \sim \triangle BOE$.

25. 如图 1, AB 是半圆 O 的直径, 点 C 是半圆上一点, 过点 C 的直线交 BA 的延长线于点 D , 点 E 是线段 OB 上一点, 且满足 $OE = AD$, 过点 E 作 AB 的垂线交 DC 的延长线于点 F , 交 BC 于点 G , 且 $\angle F = 2\angle ABC$.

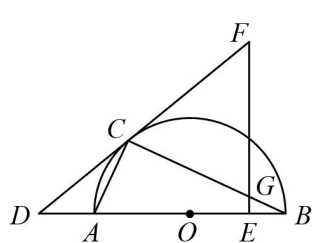


图1

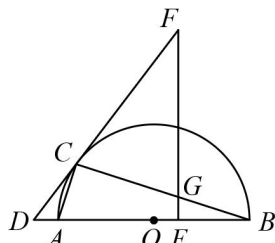
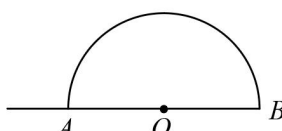


图2



备用图

(1) 求证: $\angle ACD = \angle ABC$;

(2) 如图 2, 当 $BE = 3OE$ 时, 求 $\frac{CF}{CD}$ 的值;

(3) 设 EF 与 $\widehat{BC}$ 的交点为 P , 连接 OP , 交 BC 于点 M , 若以 O 为圆心, OE 长为半径的圆与以 P 为圆心, PM 为半径的圆外切, 求 $\sin \angle ABC$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{CF}{CD} = \frac{7}{3}$;

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle OCB,$$

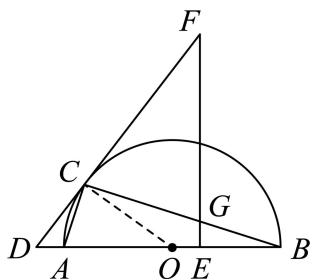
$$\because OC = OB,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ABC;$$

【小问 2 详解】

解: 连接 OC , 如图,



设 $OE = x$, 则 $AD = x$, $BE = 3OE = 3x$,

$$\therefore OB = OE + BE = 4x,$$

$$\therefore OA = OB = 4x, \quad AB = 2OB = 8x,$$

$$\because BD = AD + AB = 9x, \quad DO = AD + AO = 5x,$$

$$\therefore DE = DO + OE = 6x,$$

由 (1) 可知 $\angle ACD = \angle ABC$, $\angle DCO = \angle DEF = 90^\circ$,

$$\because \angle D = \angle D,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD, \triangle DCO \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \frac{CD}{DE} = \frac{DO}{DF},$$

$$\therefore CD^2 = AD \cdot BD = x \cdot 9x = 9x^2$$

解得 $CD = 3x$ 或 $CD = -3x$ (舍去),

$$\therefore \frac{3x}{6x} = \frac{5x}{DF},$$

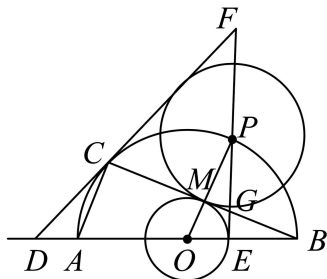
解得 $DF = 10x$,

$$\therefore CF = DF - CD = 7x,$$

$$\therefore \frac{CF}{CD} = \frac{7x}{3x} = \frac{7}{3};$$

【小问3详解】

解：如图，



设 $OM = OE = y$, $BE = a$,

$$\therefore DA = OE = y, OB = y + a,$$

$$\therefore BD = DA + 2OB = 3y + 2a,$$

$$AB = 2OB = 2y + 2a,$$

$\because BC$ 切于以 OE 为半径的 $\odot O$ 于点 M ,

$$\therefore OM \perp BC, OM = OE = y,$$

$$\therefore \angle OMB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle OBM = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle OBM \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{OM}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AC = 2OM = 2y,$$

由 (2) 可知 $CD^2 = AD \cdot BD = y \cdot (3y + 2a) = 3y^2 + 2ay$,

$$\because \triangle DAC \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{y}{CD} = \frac{2y}{BC},$$

$$\therefore BC = 2CD, \text{ 即 } BC^2 = (2CD)^2 = 12y^2 + 8ay,$$

$$\because AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore (2y)^2 + (12y^2 + 8ay) = (2y + 2a)^2,$$

$$4y^2 + 12y^2 + 8ay = 4y^2 + 8ay + 4a^2,$$

$$3y^2 = a^2,$$

解得 $a = \sqrt{3}y$ 或 $-\sqrt{3}y$ (舍去),

$$\therefore OB = y + \sqrt{3}y = (\sqrt{3} + 1)y,$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{OM}{OB} = \frac{y}{(\sqrt{3}+1)y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫