

九年级期终考试数学试卷

2026 年 1 月

(满分: 150 分, 考试时间: 100 分钟)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 在比例尺为 $1:200$ 的地图中, 某广场的面积约为 20 平方分米, 那么这个广场的实际面积约为 ()

- A. 400 平方米 B. 4000 平方米 C. 8000 平方米 D. 80000 平方米

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了比例尺的性质. 比例尺为长度比, 面积比为长度比的平方, 地图面积与实际面积成比例, 需进行单位换算.

【详解】 $\because$ 比例尺为 $1:200$,

$\therefore$ 长度比为 $1:200$, 面积比为 $(1:200)^2 = 1:40000$,

地图面积 20 平方分米,

$\therefore$ 实际面积 $= 20 \times 40000 = 800000$ 平方分米, 即 8000 平方米.

故选: C.

2. 已知点 A 为抛物线 $y = 2x^2$ 上一点, 如果点 A 的横坐标为 $a(a > 0)$, 记 AO 与 x 轴的夹角为 α , 那么 $\tan \alpha$ 为 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $2a$ D. $\frac{1}{2a}$

【答案】 C

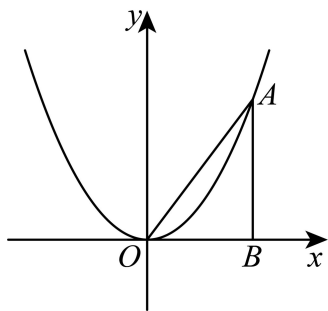
【解析】

【分析】 本题主要考查正切的定义, 根据点 A 在抛物线上的坐标和正切函数的定义直接计算.

【详解】 解: $\because$ 点 A 在抛物线 $y = 2x^2$ 上, 且横坐标为 $a(a > 0)$,

$\therefore A(a, 2a^2)$,

如图, 过 A 作 $AB \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 B ,



$$\therefore \tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{2a^2}{a} = 2a,$$

故选: C.

3. 已知直角坐标平面内点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, 记向量 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 如果 $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, 那么点 C 的坐标是 ()

A. $(2,3)$

B. $(2,-3)$

C. $(-2,3)$

D. $(-2,-3)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查平面直角坐标系中向量的线性运算, 掌握向量坐标的加减和数乘规则是解题的关键.

根据向量坐标运算规则, 直接计算 $\overrightarrow{OC}$ 的表达式即可.

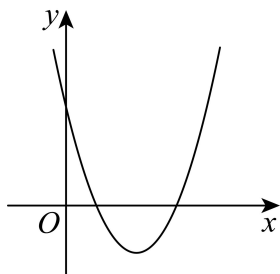
【详解】 根据题意, $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1,0)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0,1)$

$$\text{则 } \overrightarrow{OC} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1,0) - 3(0,1) = (2,0) - (0,3) = (2,-3),$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(2,-3)$.

故选: B.

4. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过第一、二、四象限, 那么下列不等式中, 不可能成立的是 ()



A. $a > 0$

B. $b > 0$

C. $c > 0$

D. $b^2 - 4ac > 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查抛物线的图像与性质，根据图像确定 a, b, c 的符号即可.

【详解】 由图可知，抛物线开口向上， $a > 0$ ，故 A 正确，不符合题意；

对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，则 $b < 0$ ，故 B 不正确，符合题意；

与 y 轴交于正半轴，则 $c > 0$ ，故 C 正确，不符合题意；

与 x 轴交于不同的两点，则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，故 D 正确，不符合题意.

故选：B.

5. 小明和小丽家在同一幢楼，小明住 8 楼，小丽住 9 楼. 小明在家里看对面一幢楼的顶部 A 处的仰角为 α_1 ，看底部 B 处的俯角为 β_1 ；而小丽在家里看对面这幢楼的顶部 A 处的仰角为 α_2 ，看底部 B 处的俯角为 β_2 ，那么下列结论中，正确的是 ()

A. $\alpha_1 > \alpha_2$ 且 $\beta_1 > \beta_2$

B. $\alpha_1 > \alpha_2$ 且 $\beta_1 < \beta_2$

C. $\alpha_1 < \alpha_2$ 且 $\beta_1 > \beta_2$

D. $\alpha_1 < \alpha_2$ 且 $\beta_1 < \beta_2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的知识，通过比较仰角和俯角的正切值来比较角度大小，由于小丽所在楼层比小明高，因此仰角较小而俯角较大.

【详解】 解：设两楼水平距离为 d ，每层楼高为 h ，对面楼高为 H .

$\because$ 小明住 8 楼，高度为 $8h$ ，

$$\therefore \tan \alpha_1 = \frac{H-8h}{d}, \quad \tan \beta_1 = \frac{8h}{d}.$$

$\because$ 小丽住 9 楼，高度为 $9h$ ，

$$\therefore \tan \alpha_2 = \frac{H-9h}{d}, \quad \tan \beta_2 = \frac{9h}{d}.$$

$\because 9h > 8h$ ，

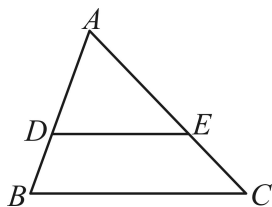
$\therefore \tan \alpha_2 < \tan \alpha_1$ ，即 $\alpha_1 > \alpha_2$ ，

且 $\tan \beta_2 > \tan \beta_1$ ，即 $\beta_1 < \beta_2$.

$\therefore \alpha_1 > \alpha_2$ 且 $\beta_1 < \beta_2$ ，

故选：B.

6. 如图， D 、 E 是 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 上的两点，在下列条件中，能够判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()



- A. $DB=1$, $CE=2$, $AD=3$, $AE=4$ B. $DB=1$, $CE=2$, $AB=3$, $AC=4$
 C. $DB=1$, $CE=2$, $AD=3$, $AC=4$ D. $DB=1$, $CE=2$, $AB=3$, $AE=4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平行线分线段成比例定理的应用，如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

根据平行线分线段成比例定理对各个选项进行判断即可.

- 【详解】A. $\because \frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} = 3, \frac{AE}{CE} = \frac{4}{2} = 2$,
 $\therefore \frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{CE}$, 故不能得到 $DE \parallel BC$, 故本选项不合题意;
 B. $\because \frac{AD}{BD} = \frac{3-1}{1} = 2, \frac{AE}{CE} = \frac{4-2}{2} = 1$,
 $\therefore \frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{CE}$, 故不能得到 $DE \parallel BC$, 故本选项不合题意;
 C. $\because \frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} = 3, \frac{AE}{CE} = \frac{4-2}{2} = 1$,
 $\therefore \frac{AD}{BD} \neq \frac{AE}{CE}$, 故不能得到 $DE \parallel BC$, 故本选项不合题意;
 D. $\because \frac{AD}{BD} = \frac{3-1}{1} = 2, \frac{AE}{CE} = \frac{4}{2} = 2$
 $\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$, 能得到 $DE \parallel BC$, 故本选项符合题意;

故选: D.

二、填空题: (本大题共 10 题, 每题 4 分, 满分 40 分) 【各题答案, 请填写在答题纸的相应题号位置中.】

7. 已知: $a+b+c=90$, $a:b:c=2:3:4$, 那么 $a+b-c=$ _____.

【答案】10

【解析】

【分析】本题主要考查比例关系的应用, 根据比例关系设未知数, 求出常数后计算表达式.

【详解】解: 设 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$,
 代入 $a+b+c=90$, 得 $2k+3k+4k=90$,
 即 $9k=90$, 解得 $k=10$,

则 $a = 2 \times 10 = 20$, $b = 3 \times 10 = 30$, $c = 4 \times 10 = 40$,

故 $a + b - c = 20 + 30 - 40 = 10$.

故答案为: 10.

8. 我们知道抛物线 $L_1: y = x^2 + 2x + 4$ 与 $L_2: y = x^2 + 4x + 2$ 通过平移是可以重合的, 那么要使这两条抛物线平移后重合, 平移的距离至少是_____.

【答案】 $\sqrt{26}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的平移的性质, 运用勾股定理求出两点之间的距离, 先把一般式化为顶点式, 找出抛物线 L_1, L_2 的顶点坐标, 再运用勾股定理列式计算, 即可作答.

【详解】 解: $L_1: y = x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3$,

则抛物线 L_1 的顶点坐标为 $(-1, 3)$,

$L_2: y = x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 4 - 2 = (x + 2)^2 - 2$,

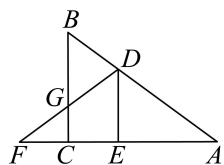
则抛物线 L_2 的顶点坐标为 $(-2, -2)$,

依题意, $\sqrt{[-2 - (-1)]^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$,

即平移的距离至少是 $\sqrt{26}$.

故答案为: $\sqrt{26}$,

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$, D 、 E 是边 AB 、 AC 上的点, 且 $DE \parallel BC$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折至 $\triangle FDE$, DF 与 BC 交于点 G . 如果 $\triangle FCG$ 的面积是 $\triangle ADE$ 面积的 $\frac{1}{4}$, 那么线段 DE 的长是_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 折叠的性质, 由 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折至 $\triangle FDE$, 得 $EF = AE$,

$AD = FD$, $\angle AED = \angle FED$, 证明 $\triangle FCG \sim \triangle AED$, 由 $\triangle FCG$ 的面积是 $\triangle ADE$ 面积的 $\frac{1}{4}$, 即 $\left(\frac{FC}{AE}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

故有 $\frac{FC}{AE} = \frac{1}{2}$ ，即 $AE = 2FC$ ，设 $FC = x$ ，则 $AE = 2x$ ，由 $EF = AE$ ，得 $8 - x = 2x$ ，解得： $x = \frac{8}{3}$ ，所以 $AE = \frac{16}{3}$ ，再证明 $\triangle AED \sim \triangle ACB$ ，得 $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ，然后代入即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】解： $\because$ 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折至 $\triangle FDE$ ，

$$\therefore EF = AE, AD = FD, \angle AED = \angle FED,$$

$$\therefore \angle A = \angle F,$$

$$\therefore \angle AED + \angle FED = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AED = \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle GCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FCG \sim \triangle AED,$$

$$\therefore \triangle FCG \text{ 的面积是 } \triangle ADE \text{ 面积的 } \frac{1}{4},$$

$$\therefore \left(\frac{FC}{AE}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{FC}{AE} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } AE = 2FC,$$

$$\text{设 } FC = x, \text{ 则 } AE = 2x,$$

$$\therefore CE = 8 - 2x,$$

$$\therefore EF = CE + FC = 8 - 2x + x = 8 - x,$$

$$\text{由 } EF = AE, \text{ 得 } 8 - x = 2x, \text{ 解得: } x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore AE = \frac{16}{3},$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB = 90^\circ, \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{DE}{6},$$

$$\therefore DE = 4,$$

故答案为：4.

10. 已知一个斜坡的坡比是1:2.4，如果某人从坡底沿这个斜坡走了 s 米到达坡顶，那么坡底与坡顶间的垂直距离是_____。（用 s 的代数式表示）

【答案】 $\frac{5s}{13}$ ## $\frac{5}{13}s$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理以及坡比的定义. 根据坡比定义, 垂直高度与水平距离的比为1:2.4, 设垂直高度为 h , 则水平距离为 $2.4h$, 利用勾股定理, 得 $s^2 = h^2 + b^2 = h^2 + (2.4h)^2 = 6.76h^2$, 求解得到 $h = \frac{5s}{13}$, 即可作答.

【详解】 解: 依题意, 设垂直高度为 h 米, 水平距离为 b 米,

$\because$ 坡比1:2.4,

$$\therefore \text{得 } \frac{h}{b} = \frac{1}{2.4},$$

$$\text{即 } b = 2.4h,$$

$$\text{根据勾股定理, } s^2 = h^2 + b^2 = h^2 + (2.4h)^2 = h^2 + 5.76h^2 = 6.76h^2,$$

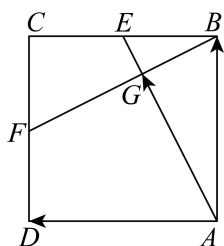
$$\therefore h^2 = \frac{s^2}{6.76},$$

$$\because 6.76 = \left(\frac{13}{5}\right)^2,$$

$$\text{因此 } h = \frac{s}{\frac{13}{5}} = \frac{5s}{13},$$

$$\text{故答案为: } \frac{5s}{13}$$

11. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别为边 BC 、 CD 的中点, AE 与 BF 交于点 G . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AG} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【答案】 $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量、正方形的性质, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

依题意, 设 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AE}$, 得到 $\overrightarrow{AG} = \lambda \vec{a} + \frac{\lambda}{2} \vec{b}$, 再由 $\overrightarrow{AG} = \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AF}$, 化简可得

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\mu+1}{2}\right)\vec{a} + (1-\mu)\vec{b}, \text{ 进而得到 } \begin{cases} \lambda = \frac{\mu+1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} = 1-\mu \end{cases}, \text{ 解方程组即可.}$$

【详解】解：设 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AE}$,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 中, E 为边 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AE} = \lambda \vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b},$$

$\because F$ 为边 CD 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$\because B、G、F$ 三点共线,

$$\therefore \text{存在实数 } \mu, \overrightarrow{AG} = \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu)\overrightarrow{AF},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \mu \vec{a} + (1-\mu)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\mu + \frac{1-\mu}{2}\right)\vec{a} + (1-\mu)\vec{b} = \left(\frac{\mu+1}{2}\right)\vec{a} + (1-\mu)\vec{b},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = \frac{\mu+1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} = 1-\mu \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}.$$

12. 已知 ABC 与 $\triangle DEF$ 相似, 相似比为 $\frac{3}{2}$, 如果 $\triangle DEF$ 的面积是 36, 那么 ABC 的面积是_____.

【答案】 81

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方即可求解.

【详解】 $\because ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $\frac{3}{2}$,

$$\therefore \text{面积比为 } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$\therefore \triangle DEF$ 的面积为 36,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $36 \times \frac{9}{4} = 81$.

故答案为: 81.

13. 已知 α 是锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, 那么 $(\sin \alpha - \cos \alpha)$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{13}}{13}$

【解析】

【分析】本题考查了同角三角函数的基本关系. 利用同角三角函数的基本关系, 由 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ 设 $\sin \alpha = 3k$, $\cos \alpha = 2k$, 再根据 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求出 k 的值, 最后计算 $\sin \alpha - \cos \alpha$

【详解】解: 依题意, $\tan \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}, \sin \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}, \cos \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}},$

则 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$

$\therefore \tan \alpha = \frac{3}{2}$, 且 α 为锐角,

$\therefore$ 设 $\sin \alpha = 3k$, $\cos \alpha = 2k$, 其中 $k > 0$

$\because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$

$\therefore (3k)^2 + (2k)^2 = 1,$

即 $9k^2 + 4k^2 = 1,$

$\therefore 13k^2 = 1,$

$\therefore k^2 = \frac{1}{13},$

解得 $k = \frac{1}{\sqrt{13}}$

因此 $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},$

$\therefore \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13},$

故答案为: $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

14. 如果一个直角三角形的某一边长恰好是另两边长之和的一半, 那么该三角形较小锐角的正弦值是_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查锐角三角函数的定义，首先，判断“某一边”不能是斜边，因为会导致无解；然后考虑该边为直角边，利用勾股定理和条件建立方程，求解得到较短直角边与斜边的比值，即为较小锐角的正弦值.

【详解】 解：设直角三角形三边分别为 a 、 b 、 c ，其中 c 为斜边， $a < b$ ， a 为最小锐角.

①当 $c = \frac{a+b}{2}$ 时，则 $a+b=2c$ ，

$$\therefore b = 2c - a,$$

$$\because a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore a^2 + (2c - a)^2 = c^2,$$

$$\text{整理得 } 2a^2 - 4ac + 3c^2 = 0,$$

$$\therefore \Delta = 16c^2 - 24c^2 < 0,$$

$$\therefore \text{原方程无解，即 } c \neq \frac{a+b}{2};$$

②当 $b = \frac{a+c}{2}$ 时，则 $a+c=2b$ ，

$$\therefore c = 2b - a,$$

$$\because a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (2b - a)^2,$$

$$\text{整理得 } 3b^2 = 4ab,$$

$$\text{解得 } b = \frac{4a}{3},$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{5a}{3},$$

$$\therefore \sin a = \frac{a}{c} = \frac{a}{\frac{5a}{3}} = \frac{3}{5};$$

③当 $a = \frac{b+c}{2}$ 时，则 $2a=b+c$ ，

$$\therefore c = 2a - b,$$

$$\because a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (2a - b)^2,$$

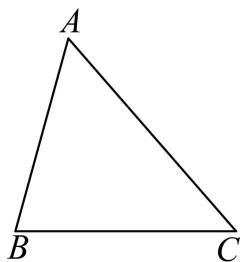
整理得 $3a^2 = 4ab$,

解得 $b = \frac{3a}{4}$, 与 $a < b$ 矛盾, 舍去.

$\therefore$ 较小锐角的正弦值为 $\frac{3}{5}$.

故答案为: $\frac{3}{5}$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, $AB = 4$, $AC = 6$, 那么边 BC 的长是_____.



【答案】 5

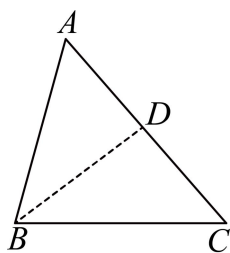
【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定与性质, 角平分线的性质, 掌握相关性质的应用是解题的关键.

作 $\angle ABC$ 的平分线 BD , 交 AC 于点 D , 进而证得 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, 得到 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC}$, 进而可得

$AD = \frac{8}{3}$, 再根据相似比求 BC 即可.

【详解】 解: 作 $\angle ABC$ 的平分线 BD , 交 AC 于点 D ,



$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD = 2\angle DBC,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \angle C,$$

$$\therefore BD = DC,$$

$$\because \angle ABD = \angle C, \text{ 且 } \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{4}{6} &= \frac{AD}{4}, \text{ 解得 } AD = \frac{8}{3}, \\ \therefore DC &= AC - AD = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}, \\ \therefore BD &= DC = \frac{10}{3}, \\ \therefore \frac{AB}{AC} &= \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } \frac{4}{6} = \frac{\frac{10}{3}}{BC}, \end{aligned}$$

解得 $BC = 5$.

故答案为: 5.

16. 对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 及其所在坐标平面内的点 P , 当过点 P 垂直于抛物线对称轴的直线与该抛物线有两个交点, 且这两个交点位于点 P 的两侧时, 我们把点 P 称为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的内点. 现有抛物线 $L_1: y = -x^2 + 2x + 2$ 和 $L_2: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$, 如果点 M 既是抛物线 L_1 的内点, 又是抛物线 L_2 的内点, 那么点 M 的纵坐标 y_M 的取值范围是_____.

【答案】 $-1 < y_M < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的性质, 新定义, 一元二次方程的其他应用, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先理解题意, 根据抛物线 $L_1: y = -x^2 + 2x + 2$ 和 $L_2: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$, 得出开口方向 and 对称轴, 再求出这两个抛物线的交点的横坐标, 分别是 2, -1, 再根据点 M 既是抛物线 L_1 的内点, 又是抛物线 L_2 的内点, 进行分析, 即可作答.

【详解】 解: $\because L_1: y = -x^2 + 2x + 2$ 的 $-1 < 0$

$$\therefore \text{开口方向向下, 对称轴为 } x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1,$$

$$\text{把 } x = 1 \text{ 代入 } y = -x^2 + 2x + 2, \text{ 得 } y = -1^2 + 2 \times 1 + 2 = 3,$$

即 $y = -x^2 + 2x + 2$ 的最大值为 3;

$$\because L_2: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \text{ 的 } \frac{1}{4} > 0$$

$$\therefore \text{开口方向向上, 对称轴为 } x = -\frac{\frac{3}{4}}{2 \times \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2},$$

抛物线 L_2 在对称轴 $x = -\frac{3}{2}$ 的右边, y 随着 x 的增大而增大,

依题意, 得 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = -x^2 + 2x + 2$,

$$\therefore x^2 + 3x - 2 = -4x^2 + 8x + 8,$$

$$\therefore 5x^2 - 5x - 10 = 0,$$

整理得 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = -1$,

$\therefore$ 抛物线 $L_1: y = -x^2 + 2x + 2$ 和 $L_2: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ 有两个交点, 且它们的横坐标分别是 $2, -1$,

把 $x = -1$ 代入 $y = -x^2 + 2x + 2$, 得 $y = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 2 = -1$,

$\therefore$ 抛物线 L_1 的对称轴为 $x = 1$, 最大值为 3 , 抛物线 L_2 在对称轴 $x = -\frac{3}{2}$ 的右边, y 随着 x 的增大而增大,

且 $-\frac{3}{2} < -1 < 1 < 2$, 点 M 既是抛物线 L_1 的内点, 又是抛物线 L_2 的内点,

$$\therefore -1 < y_M < 3,$$

故答案为: $-1 < y_M < 3$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 86 分)

17. 计算: $\frac{2}{\tan 60^\circ + 1} + \cot^2 30^\circ - 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$.

【答案】 $\sqrt{3} + 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查特殊锐角三角函数的混合运算, 原式分别代入特殊锐角三角函数值, 再根据实数的混合运算法则进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{2}{\tan 60^\circ + 1} + \cot^2 30^\circ - 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} + 1} + (\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{3} - 1 + 3 - 1 \\ &= \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

18. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $(1, 2)$ 和 $(0, 4)$.

(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 指出此抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并说明这条抛物线的变化情况.

【答案】(1) $y = x^2 - 3x + 4$

(2) 开口向上，对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ ，当 $x < \frac{3}{2}$ 时， y 随 x 增大而减小，当 $x > \frac{3}{2}$ 时，

y 随 x 增大而增大

【解析】

【分析】本题主要考查了待定系数法求二次函数的解析式以及二次函数的性质，熟练掌握待定系数法是本题的关键.

(1) 用待定系数法求出抛物线的解析式即可；

(2) 把解析式化成顶点式，根据抛物线的性质即可求得.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $(1, 2)$ 和 $(0, 4)$

∴ 把 $(1, 2)$ 和 $(0, 4)$ 代入解析式得 $\begin{cases} 1 + b + c = 2 \\ c = 4 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$ ，

∴ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 3x + 4$ ；

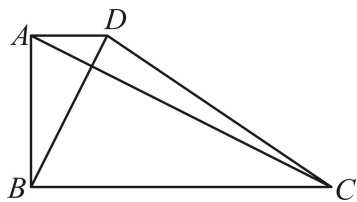
【小问 2 详解】

解： $y = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ ，

∴ 抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ ，

当 $x < \frac{3}{2}$ 时， y 随 x 增大而减小，当 $x > \frac{3}{2}$ 时， y 随 x 增大而增大.

19. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD : AB : BC = 1 : 2 : 4$.



(1) 求证： $AC \perp BD$ ；

(2) 求 $\cot \angle ACD$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) 8

【解析】

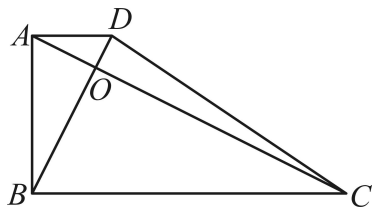
【分析】本题考查了锐角三角函数，梯形的性质，勾股定理及相似三角形的判定和性质，掌握相关性质是解题的关键.

(1) 先证 $\angle ABD = \angle ACB$ ，再根据角的关系可得 $\angle ACB + \angle CBD = 90^\circ$ ，进而得到 $\angle BOC = 90^\circ$ 即可证明；

(2) 由勾股定理得 $AC = 2\sqrt{5}k$ ， $BD = \sqrt{5}k$ ，再证 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，得到 $\frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{4}$ ，进而得到 $OA = \frac{2\sqrt{5}}{5}k$ ， $OC = \frac{8\sqrt{5}}{5}k$ ，再利用 $\cot \angle ACD = \frac{OC}{OD}$ 代入计算即可.

【小问 1 详解】

证明：设 AC, BD 相交于点 O ，



$\because AD:AB:BC = 1:2:4$ ，则可设 $AD = k$ ， $AB = 2k$ ， $BC = 4k$ ，

$\because AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ ， $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2k}{4k} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ACB$ ，

$\because \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB + \angle CBD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle DBC + \angle ACB) = 90^\circ$ ，

即 $AC \perp BD$ ；

【小问 2 详解】

解：根据题意， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2k)^2 + (4k)^2} = 2\sqrt{5}k$ ，

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{k^2 + (2k)^2} = \sqrt{5}k$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle OBC = \angle ODA$ ， $\angle OCB = \angle OAD$ ，

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } OB = 4OD, OC = 4OA,$$

$$\therefore BD = OB + OD = 5OD = \sqrt{5}k,$$

$$\text{解得 } OD = \frac{\sqrt{5}}{5}k,$$

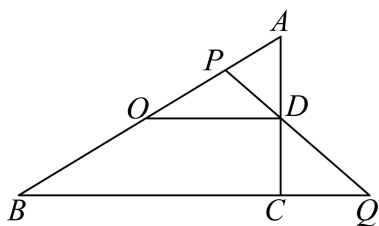
$$AC = OA + OC = 5OA = 2\sqrt{5}k,$$

$$\text{解得 } OA = \frac{2\sqrt{5}}{5}k, \quad OC = \frac{8\sqrt{5}}{5}k,$$

由 (1) 知 $AC \perp BD$, 即 $\angle COD = 90^\circ$,

$$\therefore \cot \angle ACD = \frac{OC}{OD} = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}k}{\frac{\sqrt{5}}{5}k} = 8.$$

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线, P 是线段 OA 上一点, 连接 PD 并延长交 BC 的延长线于点 Q .



(1) 如果 $CQ = OD$, 求证: $\angle PDO = \angle POD$;

(2) 过点 P 作 $PT \parallel BC$ 交 AC 于点 T , 连接 TO 并延长交 CB 的延长线于点 S , 再连接 OQ , 求证:

$$OS = OQ.$$

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查平行线分线段成比例定理、相似三角形判定和性质、全等三角形的判定和性质, 解题的关键是相关性质的灵活应用.

(1) 根据题意, 得到 $\frac{OD}{BQ} = \frac{1}{3}$, 进而可得 P 为 OA 的中点, 再结合 $\angle ADO = 90^\circ$ 即可得证;

(2) 连接 OC , 由平行线段截线段成比例得到 $\frac{OP}{OB} = \frac{DT}{DC}$, 再证 $\triangle OPT \sim \triangle OBS$, $\triangle DTP \sim \triangle DCQ$, 得到

$\frac{PT}{BS} = \frac{OP}{OB}, \frac{PT}{CQ} = \frac{DT}{DC}$, 进而得到 $BS = CQ$, 再利用 “SAS” 证明 $\triangle OBS \cong \triangle OCQ$ 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because OD$ 是 ABC 的中位线,

$$\therefore OD \parallel BC \text{ 且 } OD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore CQ = OD,$$

$$\therefore \frac{OD}{BQ} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore OD \parallel BC, \text{ 即 } OD \parallel BQ,$$

$$\therefore \triangle POD \sim \triangle PBQ,$$

$$\therefore \frac{PO}{PB} = \frac{OD}{BQ} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } PO = \frac{1}{3}PB,$$

$$\therefore PO = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OA, \text{ 即 } P \text{ 为 } OA \text{ 的中点},$$

$$\therefore OP = \frac{1}{2}OA,$$

$$\therefore \angle ADO = 90^\circ,$$

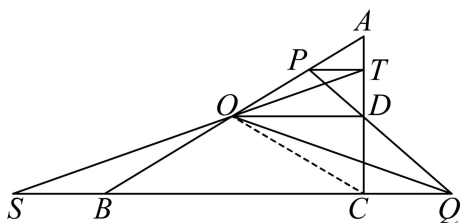
$$\therefore DP = \frac{1}{2}OA,$$

$$\therefore OP = PD,$$

$$\therefore \angle PDO = \angle POD;$$

【小问 2 详解】

证明: 连接 OC ,



$$\therefore OD \parallel BC, PT \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{OP}{OB} = \frac{DT}{DC},$$

$$\therefore \triangle OPT \sim \triangle OBS, \triangle DTP \sim \triangle DCQ,$$

$$\therefore \frac{PT}{BS} = \frac{OP}{OB}, \frac{PT}{CQ} = \frac{DT}{DC},$$

$$\therefore \frac{PT}{BS} = \frac{PT}{CQ},$$

$$\therefore BS = CQ,$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$, O 为 AB 的中点,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = OB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle OBS = \angle OCQ,$$

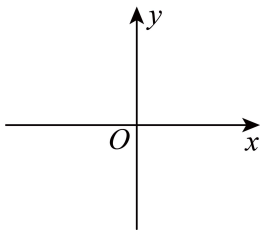
在 $\triangle OBS$ 和 $\triangle OCQ$ 中,

$$\begin{cases} OB = OC \\ \angle OBS = \angle OCQ, \\ BS = CQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OBS \cong \triangle OCQ (\text{SAS}),$$

$$\therefore OS = OQ.$$

21. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像经过点 $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 、 $B(0, 5)$.



(1) 试用字母 a 的代数式表示 b ;

(2) 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像上存在点 C , 使得直线 AB 垂直平分线段 OC , 求此二次函数的解析式;

(3) 试问: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像的对称轴是否可能平分线段 AB ? 如果能, 请求出此时二次函数的解析式; 如果不能, 请说明理由.

【答案】 (1) $b = -\frac{5}{2}a - 2$

$$(2) \quad y = \frac{5}{6}x^2 - \frac{49}{12}x + 5$$

(3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像的对称轴不能平分线段 AB ，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 把 $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 、 $B(0, 5)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 求解即可；

(2) 利用勾股定理求出 $AB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ ，利用等面积法求出 $OD = \sqrt{5}$ ，证明 $\triangle ODH \sim \triangle OBA$ 求出

$OH = 2, DH = 1$ ，得出 $D(2, 1)$ ，从而可求出 $C(4, 2)$ ，然后代入 $y = ax^2 + \left(-\frac{5}{2}a - 2\right)x + 5$ 求解即可；

(3) 线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$ ，然后代入直线 $x = \frac{5a+4}{4a}$ ，判断所得方程是否有解即可。

【小问1详解】

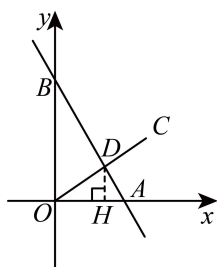
解：把 $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 、 $B(0, 5)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，得

$$\begin{cases} \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得 } b = -\frac{5}{2}a - 2;$$

【小问2详解】

解：如图，设 AB 与 CD 相交于点 D ，作 $DH \perp OA$ 于点 H ，



$$\therefore A\left(\frac{5}{2}, 0\right), B(0, 5),$$

$$\therefore OA = \frac{5}{2}, OB = 5,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OD = \frac{1}{2} OA \cdot OB,$$

$$\therefore \frac{5\sqrt{5}}{2} OD = \frac{5}{2} \times 5,$$

$$\therefore OD = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOH + \angle BOD = \angle ABO + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOH = \angle ABO,$$

$$\therefore DH \perp OA$$

$$\therefore \angle OHD = \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ODH \sim \triangle OBA,$$

$$\therefore \frac{OH}{OB} = \frac{DH}{OA} = \frac{OD}{AB},$$

$$\therefore \frac{OH}{5} = \frac{DH}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}},$$

$$\therefore OH = 2, DH = 1,$$

$$\therefore D(2,1),$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 垂直平分线段 } OC,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 是线段 } OC \text{ 的中点},$$

$$\therefore C(4,2),$$

$$\therefore b = -\frac{5}{2}a - 2, \quad c = 5,$$

$$\therefore y = ax^2 + \left(-\frac{5}{2}a - 2\right)x + 5,$$

把 $C(4,2)$ 代入, 得

$$2 = 16a + 4\left(-\frac{5}{2}a - 2\right) + 5,$$

$$\text{解得 } a = \frac{5}{6},$$

$$\therefore y = \frac{5}{6}x^2 - \frac{49}{12}x + 5;$$

【小问 3 详解】

解: $\because A\left(\frac{5}{2}, 0\right), B(0, 5),$

$\therefore$ 线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right),$

$\therefore y = ax^2 + \left(-\frac{5}{2}a - 2\right)x + 5,$

$\therefore$ 对称轴是直线 $x = \frac{-\frac{5}{2}a - 2}{-2a} = \frac{5a + 4}{4a}.$

若图像的对称轴能平分线段 AB , 则 $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$ 在直线 $x = \frac{5a + 4}{4a}$ 上,

$\therefore \frac{5}{4} = \frac{5a + 4}{4a},$

$\therefore 5a = 5a + 4,$ 此方程无解,

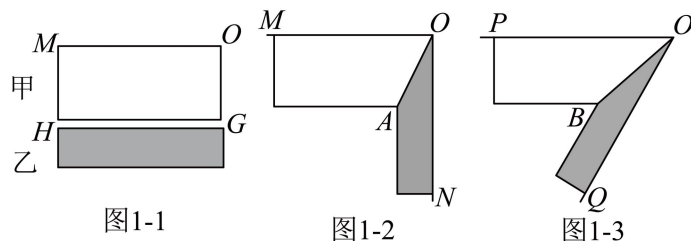
$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像的对称轴不能平分线段 AB .

【点睛】 本题考查了二次函数的图像与性质, 待定系数法求函数解析式, 相似三角形的判定与性质, 中点坐标公式, 以及勾股定理等知识, 熟练掌握二次函数的图像与性质和相似三角形的判定与性质是解答本题的关键.

22. 在铺设地板时, 为了使地面转角处的拼接式样显得美观, 工人通常会采用先对地板进行切割后再拼接的方法. 现有甲乙两种规格的木质地板, 其宽度之比为 2:1 (如图 1-1), 工人准备用这两种地板的组合来铺设室内某区域的地板 (假设每块地板均无正反面之分).

场景 1: 如图 1-2, 当遇到转角为直角的地面时 ($\angle MON = 90^\circ$), 可分别对甲乙两种地板按图中方法沿 OA 切割后拼接铺入该转角处;

场景 2: 如图 1-3, 当遇到转角为 60 度的地面时 ($\angle POQ = 60^\circ$), 可分别对甲乙两种地板采用类似方法沿 OB 切割后拼接铺入该转角处.



在场景 1 中, 小明观察到工人采用了以下确定地板切割线的方法: 先将甲种地板推至转角并紧贴 $\angle MON$ 的两边, 再将乙种地板的长边紧贴 $\angle MON$ 的一边 ON 推至紧靠甲种地板 (如图 2-1), 此时两种地板的接触面即为一 条线段, 该线段不在边 ON 上的端点即可标记为 A , 此时 OA 即为甲种地板的切割线; 用类似方法 (如

图 2-2)，也可在乙种地板上确定切割线 OA 。

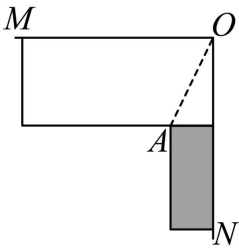


图2-1

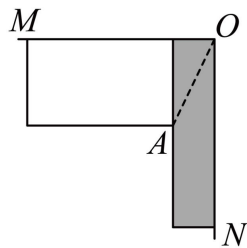


图2-2

- (1) 在场景 1 中，写出乙种地板切割后产生的锐角的正切值，即 $\tan \angle AON =$ _____；
- (2) 在场景 2 中（图 1-3），求乙种地板切割后产生的锐角 $\angle BOQ$ 的正切值；
- (3) 小明注意到，工人在场景 2 中确定甲乙两种地板的切割线时，依然没有采用任何刻度尺、量角器、圆规等工具，那么工人是如何确定两种地板的切割线位置的呢？于是小明就将这个问题带给了数学学习小组的同学们，很快小华给出了一种确定乙种地板切割线的方案：

步骤	示意图
1. 将甲种地板的长边 CF 紧贴墙边 OP 推至其短边 CD 的一个顶点 D 落在 OQ 上为止；	
2. 将乙种地板的长边 GJ 紧贴由第一步所固定的甲种地板的长边 DE 推至其短边 GH 的一个顶点 H 落在 OQ 上为止，标记此时该顶点 H 的位置；	
3. 将前两步中的地板都取走，重新拿一块乙种地板，将长边 KR 紧贴墙边 OQ 推至其短边 TK 的一个顶点 T	

落在 OP 上为止, 此时
顶点 T 与前一步标记
的点 H 的连线即为切
割线.

请问: 此方案所作的乙种地板的切割线是否符合场景 2 的要求? 请说明你的理由.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(3) 符合场景 2 的要求, 理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了解直角三角形的应用,

(1) 先延长 GA , 交 ON 于点 D , 可知 $\angle ODA = 90^\circ$, 再根据 $\tan \angle AON = \frac{AD}{OD}$ 可得答案;

(2) 先作 $OC \perp BG$, 作 $BD \perp OQ$, BC, OD 交于点 E , 再设 $BD = a$, 则 $OC = 2a$, 然后根据勾股定理
分别表示出 $DE = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $OE = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$, 进而求出 $OD = \frac{5\sqrt{3}}{3}a$, 最后根据 $\tan \angle BOQ = \frac{BD}{OD}$ 得出答案;

(3) 先根据题意可知 $\angle POQ = 60^\circ$, $CD = 2a$, $GH = TK = a$ 再表示出 $OD = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$, $DH = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$, 即可
得出 $OH = 2\sqrt{3}a$, 然后再表示出 $HK = \frac{5\sqrt{3}}{3}a$, 接着求出 $\tan \angle THK = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 则此题可解.

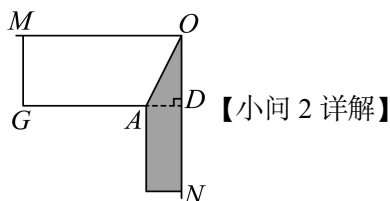
【小问 1 详解】

解: 如图所示, 延长 GA , 交 ON 于点 D , 可知 $\angle ODA = 90^\circ$,

$\therefore OD = 2AD$,

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $\tan \angle AON = \frac{AD}{OD} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$;



【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 O 作 $OC \perp BG$, 交 GB 的延长线于点 C , 过点 B 作 $BD \perp OQ$, 于点 D , BC, OD 交

$$\therefore OH = OD + DH = \frac{6\sqrt{3}}{3}a = 2\sqrt{3}a.$$

在 $\text{Rt}\triangle OEF$ 中, $\tan \angle TOK = \frac{TK}{OK},$

$$\therefore OK = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

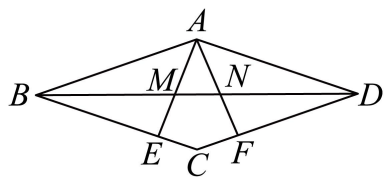
$$\therefore HK = OH - OK = 2\sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{5\sqrt{3}}{3}a.$$

在 $\text{Rt}\triangle TKH$ 中, $\tan \angle THK = \frac{TK}{HK} = \frac{a}{\frac{5\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5},$

$$\therefore \tan \angle STH = \tan \angle THK = \frac{\sqrt{3}}{5} = \tan \angle BOQ.$$

所以此方案所作的乙种地板的切割线符合场景 2 的要求.

23. 如图, 过菱形 $ABCD$ 顶点 A 分别作边 BC 、 CD 的垂线, 垂足为 E 、 F , 交对角线 BD 于点 M 、 N .



- (1) 求证: $BM = DN$;
- (2) 连接 EN , 如果 $EN \parallel AB$, 求 $\cos \angle ABC$ 的值;
- (3) 如果 $\triangle ABM$ 与五边形 $CFNME$ 的面积均为 1, 求菱形 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) 证明见详解

(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3) $2+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质, 相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质及余弦的定义.

(1) 根据已知条件及菱形的性质得出 $AB = AD$, $\angle ABE = \angle ADF$, $\angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$, 证得 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (AAS), 得出 $BE = DF$, $\angle MBE = \angle NDF$, 再证得 $\triangle BME \cong \triangle DNF$ (ASA), 得出 $BM = DN$;

(2) 根据已知条件结合菱形的性质得出 $\triangle BAM \sim \triangle NEM$, $\triangle BNE \sim \triangle BDC$, 继而利用相似三角形的性质

得出 $\frac{EN}{AB} = \frac{MN}{BM}$, $\frac{EN}{CD} = \frac{BN}{BD}$, 由 $AB = CD$ 得到 $\frac{MN}{BM} = \frac{BN}{BD}$, 设 $MN = a$, $BM = b$, 列出关于 a 和 b 的表达式, 从而得出 $\cos \angle ABC$ 的值;

(3) 连接 AC 交 MN 于点 O , 过点 M 作 $MH \perp AB$, 根据题意设 $S_{\triangle AMO} = x$, 利用相似三角形的性质得出相关图形的面积表达式, 最终可列方程求得菱形的面积.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB = AD, \angle ABE = \angle ADF,$$

$$\because AE \perp BC, AF \perp CD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ \\ \angle ABE = \angle ADF \\ AB = AD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\because \angle MBE = \frac{1}{2} \angle ABE, \angle NDF = \frac{1}{2} \angle ADF,$$

$$\therefore \angle MBE = \angle NDF,$$

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle DNF$ 中,

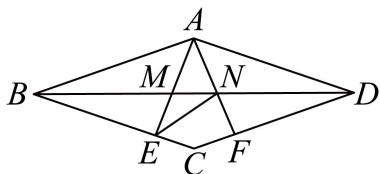
$$\begin{cases} \angle MBE = \angle NDF \\ BE = DF \\ \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BME \cong \triangle DNF (\text{ASA}),$$

$$\therefore BM = DN.$$

【小问 2 详解】

解: 如图,



$$\because EN \parallel AB, \angle BMA = \angle NME,$$

$$\therefore \triangle BAM \sim \triangle NEM,$$

$$\therefore \frac{EN}{AB} = \frac{MN}{BM},$$

$$\text{又} \because EN \parallel CD, \angle NBE = \angle DBC,$$

$$\therefore \triangle BNE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{EN}{CD} = \frac{BN}{BD},$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore \frac{MN}{BM} = \frac{BN}{BD},$$

$$\text{设 } MN = a, \quad BM = b,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a+2b},$$

$$\therefore a^2 + 2ab = ab + b^2,$$

$$\therefore a^2 + ab - b^2 = 0,$$

$$\text{解得: } a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{5}b}{2},$$

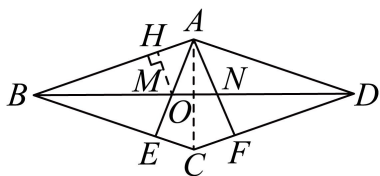
$$\because a > 0,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{BN}{BD} = \frac{MN}{BM} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【小问3详解】

解：如图，连接 AC 交 MN 于点 O ，



$$\therefore S_{\text{四边形}CEMO} = \frac{1}{2} S_{\text{五边形}CFNME} = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } S_{\triangle AMO} = x,$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMO} = 1 + x,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle ABO} = 1 + x,$$

$$\therefore S_{\triangle BEM} = S_{\triangle BOC} - S_{\text{四边形}CEMO} = 1 + x - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BME = \angle AMO, \quad \angle BEM = \angle AOM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BME \sim \triangle AMO,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BME}}{S_{\triangle AMO}} = \left(\frac{BE}{AO} \right)^2 = \frac{x + \frac{1}{2}}{x},$$

$$\therefore \angle EAC = \angle OMA, \quad \angle AEC = \angle AOM,$$

$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle AOM,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOM}} = \left(\frac{AE}{AO} \right)^2 = \frac{x + \frac{1}{2}}{x},$$

$$\therefore \left(\frac{BE}{AO} \right)^2 = \left(\frac{AE}{AO} \right)^2,$$

$$\therefore BE = AE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ABE = 45^\circ,$$

过点 M 作 $MH \perp AB$,

$$\therefore AH = HM,$$

$$\therefore AM = \sqrt{2}HM,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle EBM,$$

$$\therefore HM = EM,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BEM}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{EM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BEM} = x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AMO} = x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = 4(S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMO}) = 4 \times \left(1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫