

2025-2026 学年上海市闵行区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（共 24 分，每小题 4 分，每小题只有一个正确选项）

1.（4 分）下列各组图形中不一定是相似形的是（ ）

- A. 两个等腰直角三角形 B. 两个等边三角形
C. 两个正方形 D. 两个直角三角形

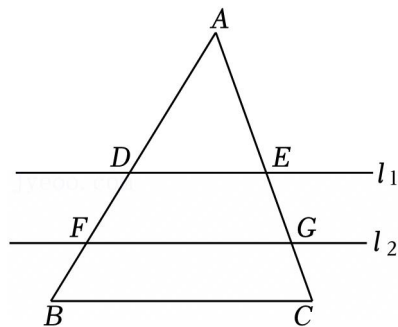
2.（4 分）下列函数中，二次函数是（ ）

- A. $y = \frac{3}{4}x$ B. $y = \frac{1}{x}$
C. $y = x(2x - 1)$ D. $y = (x+4)^2 - x^2$

3.（4 分）下列说法中，一定正确的是（ ）

- A. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，且 $\vec{b} = -2\vec{a}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
B. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $\vec{e} = 1$
C. 向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BA}$ 是相等向量
D. 如果 $k = 0$ ， $\vec{a}$ 是非零向量，那么 $k\vec{a} = 0$

4.（4 分）如图，已知 $\triangle ABC$ ，直线 l_1 与边 AB 、 AC 分别相交于点 D 、 E ，直线 l_2 与边 AB 、 AC 分别相交于点 F 、 G ， $l_1 \parallel l_2 \parallel BC$ ，那么下列比例式一定正确的是（ ）



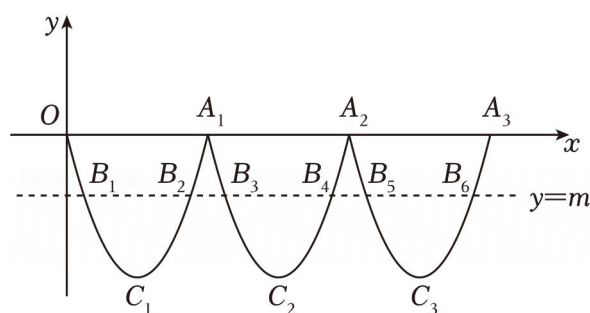
- A. $\frac{AD}{DF} = \frac{DE}{GF}$ B. $\frac{AD}{BF} = \frac{AE}{GC}$ C. $\frac{DE}{FG} = \frac{FG}{BC}$ D. $\frac{DF}{BF} = \frac{GC}{EG}$

5.（4 分）已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ （其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a < 0$ ）的对称轴是直线 $x = 1$ ，且与 x 轴有两个交点，下列结论一定正确的是（ ）

- A. $c < 0$ B. $b < 0$ C. $2a + b = 0$ D. $a + b + c = 0$

6.（4 分）如图，已知抛物线 $C_1: y = x^2 - 6x$ ($0 \leq x \leq 6$) 与 x 轴交于 O 、 A_1 两点。将抛物线 C_1 向右平移得到抛物线 C_2 ，交 x 轴于点 A_1 、 A_2 ；再将抛物线 C_2 向右平移得到抛物线 C_3 ，交 x 轴于点 A_2 、 A_3 。若直线 $y = m$ ($-9 < m < 0$) 与这 3 条抛物线交于点 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 、 B_6 ，则这 6 个点的横坐标之和

是 ()



- A. 6 B. 18 C. 30 D. 54

二、填空题 (共 48 分, 每小题 4 分)

7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{b-a}{a}$ 的值是_____.

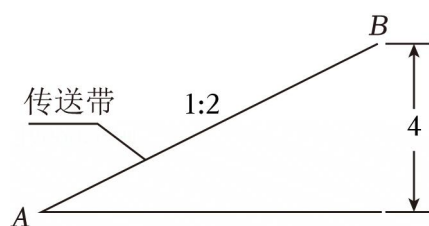
8. (4 分) 计算: $2(\vec{3a} - \vec{b}) + 3\vec{b} =$ _____.

9. (4 分) 如果两个相似三角形的面积之比为 16: 9, 那么它们的周长之比是_____.

10. (4 分) 已知长方形的长是 x , 宽是长的一半, 面积是 y , 那么 y 关于 x 的解析式是 (不要求写定义域).

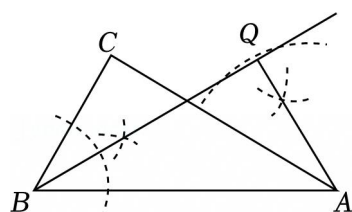
11. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $\angle B$ 的余弦值是 $\frac{3}{4}$, 那么 AB 的长是_____.

12. (4 分) 如图, 传送带和地面所成斜坡的坡度为 1: 2, 它把物体从地面送到离地面 4 米高的地方, 那么物体所经过的路程是_____ 米 (结果保留根号).



13. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的黄金分割点, 且 $AD > DB$, $AE > EC$, $BC = 2$, 那么 DE 的长是_____ (结果保留根号).

14. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 12$, 结合尺规作图痕迹所提供的信息可求出 AQ 的长是_____.



15. (4 分) 如图①中小狗手影是一种常见的游戏, 它利用的原理是: 光是沿直线传播的. 如图②我们把光

源看成一个点，手面看成平行于墙面的一条线段．在一次游戏中，手距离墙壁 3 米，光源与手的距离为 1 米．在 hand 的位置不变的情况下，如果光源与手的距离增加 1 米，那么小狗手影的高度变为原来的（填“几分之几”）．



图 ①

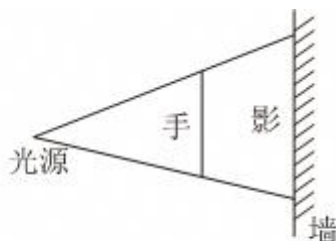
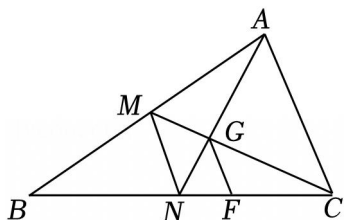
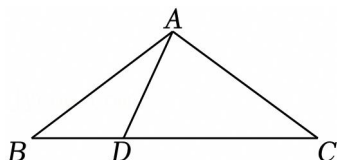


图 ②

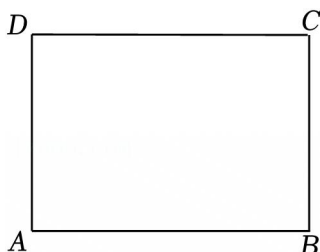
16. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点，联结 AN 、 CM 交于点 G ， $GF \parallel AC$ 交 BC 于点 F ，那么 $S_{\triangle NGF} : S_{\triangle AGC} =$ _____ .



17. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AC = 10$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$ ，点 D 是边 BC 上的一点，联结 AD ，如果 $\angle ADB = 90^\circ + \angle BAD$ ，那么 $AD =$ _____ .



18. (4 分) 如图，矩形 $ABCD$ 中，联结 BD ，点 E 是 BC 的中点，过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 CD 于点 F ，将 $\triangle CEF$ 沿直线 EF 翻折，点 C 落在平面内点 G 处，如果点 G 恰在 AE 上，那么 $BG : AE$ 的值是 _____ .



三、解答题（本大题共 7 题，共 78 分）如无特别说明，本大题作答须写出证明或计算的主要步骤。

19. (10 分) 计算： $\sin 45^\circ - 2\sin 60^\circ + \frac{2\cot 45^\circ}{\tan 60^\circ + 1}$.

20. (10 分) 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是边 DC 的中点， AE 与对角线 BD 交于点 G ，设 $\vec{AB} = \vec{a}$ ，

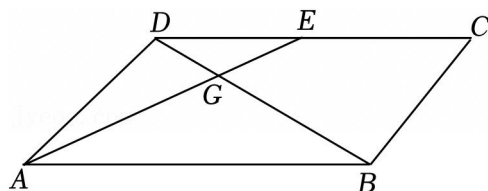
$$\vec{AD} = \vec{b}.$$

(1) 填空：向量 $\vec{DB} =$ _____，向量 $\vec{AG} =$ _____.

(注：本题结果用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

(2) 作出向量 $\vec{DG}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.

(注：画图不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的向量)



21. (10 分) 人工智能已经逐渐融入我们的生活. 某餐厅为了跟上时代的步伐, 购买了一个送餐机器人, 这种机器人与地面的接触面积是可以调整的. 在水平地面上, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间存在的反比例函数关系 (数据如表一所示). 餐厅的地面由玻璃、木地板和大理石三种材质拼接而成. 地面材质与地面承受的最大压强的关系如表二所示.

表一：地面所受压强与接触面积之间的关系

地面所受压强 p (Pa)	...	4×10^4	6×10^4	8×10^4	1×10^5	...
接触面积 S (m^2)	...	1.2×10^{-3}	8×10^{-4}	6×10^{-4}	4.8×10^{-4}	...

表二：地面材质与地面承受的最大压强的关系

地面材质	玻璃	木地板	大理石
能承受的最大压强 p (Pa)	4.8×10^7	2.4×10^7	2.5×10^8

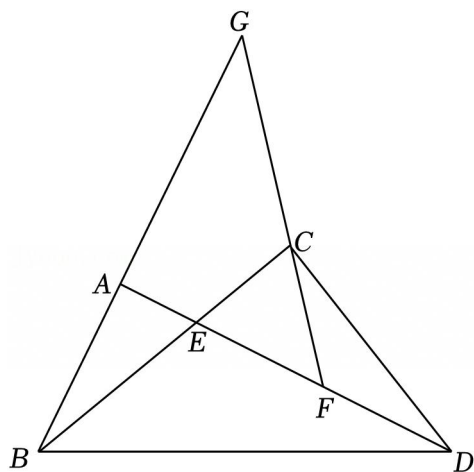
(1) 求地面所受压强 p (Pa) 关于接触面积 S (m^2) 的函数表达式 (不写定义域);

(2) 求该机器人与地面的接触面积至少为多少平方米?

22. (12 分) 如图, 线段 AD 、 BC 相交于点 E , 点 F 是线段 ED 的中点, 联结 AB 、 BD 、 CD , 分别延长 BA 、 FC 交于点 G . 已知 $\angle BAD = 90^\circ$, 且 $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$.

(1) 求证: $\angle ABE = \angle FCD$;

(2) 如果 DA 平分 $\angle BDC$, 求证: $\frac{BG}{BD} = \frac{BC}{2CF}$.



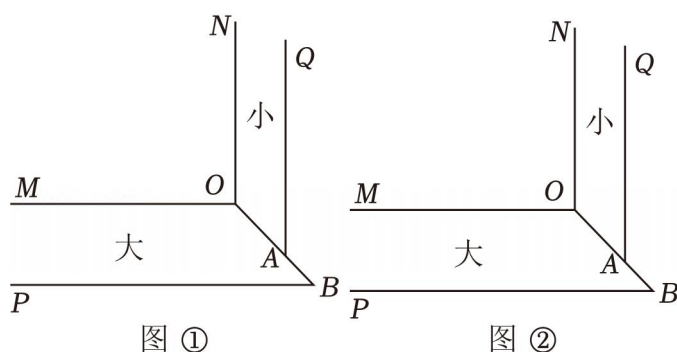
23. (10 分) 探究活动：巧拼地砖外边.

装修工人有一大一小两根条形边角料（大条形边角料 $MOBP$ 中 $MO \parallel PB$ ，小条形边角料 $NOAQ$ 中 $ON \parallel AQ$ ， $\angle MOB = \angle NOA = 135^\circ$ ），如图 1 拼接到直角地砖（ $\angle MON = 90^\circ$ ）的外边上，发现点 A 与点 B 不能重合. 为了尽可能节约用料，又能使两根条形边角料能拼成一个直角，工人师傅使用一把直尺、一支笔和一台切割机，经过图 2 - 图 9 的操作解决了问题，完成了拼接.

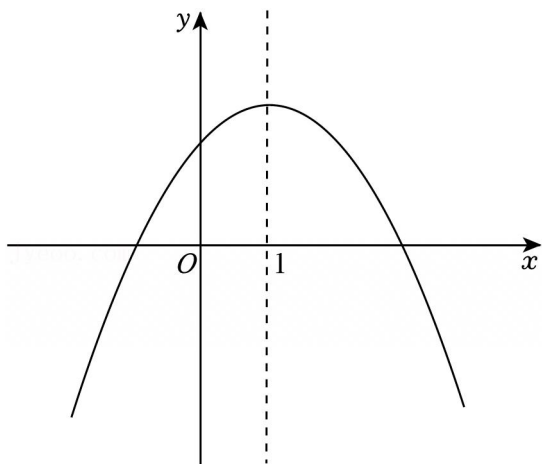
图 1	图 2	图 3	图 4	图 5
【操作说明】将一大一小两根条形边角料拼在直角地砖的外边.	【操作说明】画出 QA 的延长线，交 BP 于点 C.	【操作说明】联结 OC.	【操作说明】沿着射线 OB 方向，平移小条形边角料 $NOAQ$，使点 A 与点 B 重合，得到四边形 $O'N'Q'B$.	【操作说明】画出 MO 的延长线，交小条形边角料的边

图 6	图 7	图 8	图 9
【操作说明】联结 BD .		【操作说明】沿着 OC 、 BD 切割.	【操作说明】拼接切割后的两根条形边角料.

- (1) 请根据图 2 - 图 6 的操作说明, 在图①中画出操作过程相应的图形, 并按操作过程标注相应的字母;
- (2) 如果大条形边角为 $MOBP$ 的宽度为 12cm , 小条形边角为 $NOAQ$ 的宽度为 9cm , 大条形边角料 $MOBP$ 裁剪后的锐角是 $\angle OCP$, 那么 $\tan \angle OCP =$ _____ ;
- (3) 请根据上述探究, 设计一个新裁剪方案, 在图②中画出剪裁方法, 并简单说明理由.



24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b 、 c 是常数) 经过点 $A(5, -6)$, 对称轴为直线 $x = 1$, 顶点为 B .
- (1) 求抛物线 C_1 的函数表达式及点 B 的坐标.
- (2) 点 M 为抛物线 C_1 上的动点, 过点 M 作直线 $x = m$.
- ① 当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分 (包含交点) 的最高点的纵坐标为 $2 - m$, 求 m 的值;
- ② 当点 M 不在坐标轴上时, 直线 $x = m$ 交抛物线 $C_2: y = x^2 - 2x - 3$ 于点 P , 过点 P 作 y 轴垂线, 垂足为点 D , 在线段 PD 的延长线上截取 $DQ = 2PD$, 联结 MQ , 当抛物线 C_1 的顶点 B 在 $\triangle PQM$ 内部时, 直接写出 m 的取值范围.



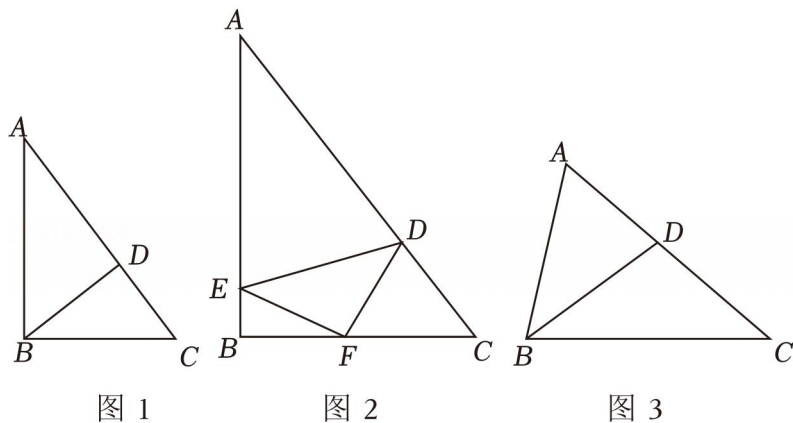
25. (14分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AC 上的一点.

(1) 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时.

①如图 1, BD 是边 AC 上的高, 求证: $BD^2 = AD \cdot CD$;

②如图 2, $AD = AE$, 点 F 在边 BC 上, 且 $CF = CD$, 顺次联结 DE 、 EF 、 FD . 如果 $EF = DF$, $\tan \angle EFB = \frac{1}{2}$, 求 $\cot C$ 的值.

(2) 如图 3, 如果点 D 是边 AC 的中点, $\angle ABD = \angle ACB$, 点 G 在线段 DB 延长线上, 且 $BG = BC$, 联结 CG , 取 CG 中点 H , 分别延长 HB 、 CA 交于点 O , 求 $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COH}}$ 的值.



2025-2026 学年上海市闵行区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一. 选择题 (共 6 小题)

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	C	A	B	C	D

一、选择题（共 24 分，每小题 4 分，每小题只有一个正确选项）

1. (4分) 下列各组图形中不一定是相似形的是 ()

- A. 两个等腰直角三角形 B. 两个等边三角形
- C. 两个正方形 D. 两个直角三角形

【分析】根据相似图形的定义解答即可.

【解答】解：A、两个等腰直角三角形一定相似，不符合题意；

B、两个等边三角形一定相似，不符合题意；

C、两个正方形一定相似，不符合题意；

D、两个直角三角不一定相似，符合题意，

故选: D .

【点评】 本题考查的是相似图形，熟知相似图形的形状必须完全相同；相似图形的大小不一定相同是解题的关键.

2. (4分) 下列函数中, 二次函数是 ()

- A. $y = \frac{3}{4}x$
- B. $y = \frac{1}{x}$
- C. $y = x(2x - 1)$
- D. $y = (x+4)^2 - x^2$

【分析】根据二次函数的定义：形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，判断各选项是否满足该形式，即可得到答案.

【解答】解：A. $y = \frac{3}{4}x$ ，为一次函数，不符合题意；

B. $y = \frac{1}{x}$, 是反比例函数, 不符合题意;

C. $y = x(2x - 1) = 2x^2 - x$, 是二次函数, 符合题意;

D. $y = (x+4)^2 - x^2 = 8x+16$, 为一次函数, 不符合题意;

故选: C.

【点评】 本题考查二次函数定义，熟记二次函数定义是解决问题的关键.

3. (4分) 下列说法中, 一定正确的是 ()

A. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 且 $\vec{b} = -2\vec{a}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量, 那么 $\vec{e} = 1$

C. 向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BA}$ 是相等向量

D. 如果 $k = 0$, $\vec{a}$ 是非零向量, 那么 $k\vec{a} = \vec{0}$

【分析】根据平面向量平行的判定, 单位向量的定义相等向量的定义一一判断即可.

【解答】解: A、如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 且 $\vec{b} = -2\vec{a}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 正确, 本选项符合题意;

B、如果 $\vec{e}$ 是单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$, 错误, 应该是 $|\vec{e}| = 1$, 本选项不符合题意;

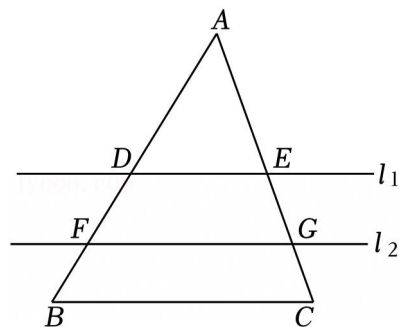
C、向量 $\vec{AB}$ 与向量 $\vec{BA}$ 是相等向量, 错误, 本选项不符合题意;

D、如果 $k = 0$, $\vec{a}$ 是非零向量, 那么 $k\vec{a} = \vec{0}$, 错误, 应该是 $k\vec{a} = \vec{0}$, 本选项不符合题意.

故选: A.

【点评】本题考查平面向量, 解题的关键是掌握有关平面向量的性质.

4. (4分) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 直线 l_1 与边 AB 、 AC 分别相交于点 D 、 E , 直线 l_2 与边 AB 、 AC 分别相交于点 F 、 G , $l_1 \parallel l_2 \parallel BC$, 那么下列比例式一定正确的是 ()



A. $\frac{AD}{DF} = \frac{DE}{GF}$ B. $\frac{AD}{BF} = \frac{AE}{GC}$ C. $\frac{DE}{FG} = \frac{FG}{BC}$ D. $\frac{DF}{BF} = \frac{GC}{EG}$

【分析】根据相似三角形的判定定理与性质定理、平行线分线段成比例定理判断求解即可.

【解答】解: $\because l_1 \parallel l_2 \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AFG, \triangle AFG \sim \triangle ABC, \frac{AD}{BF} = \frac{AE}{GC}, \frac{DF}{BF} = \frac{EG}{GC},$$

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{DE}{GF}, \frac{FG}{BC} = \frac{AF}{AB},$$

故 A、C、D 错误, 不符合题意; B 正确, 符合题意;

故选: B.

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质，熟记相似三角形的判定与性质定理是解题的关键．

5. (4分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a < 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$ ，且与 x 轴有两个交点，下列结论一定正确的是 ()

A. $c < 0$ B. $b < 0$ C. $2a + b = 0$ D. $a + b + c = 0$

【分析】根据题意得出 $-\frac{b}{2a} = 1$ ，再结合二次函数与一元二次方程的关系及二次函数的性质，对所给选项依次进行判断即可．

【解答】解：由题知，

因为抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，

所以 $-\frac{b}{2a} = 1$ ，

则 $2a + b = 0$ ，

所以 C 选项符合题意；

因为 $a < 0$ ，

所以 $b > 0$ ，

所以 B 选项不符合题意．

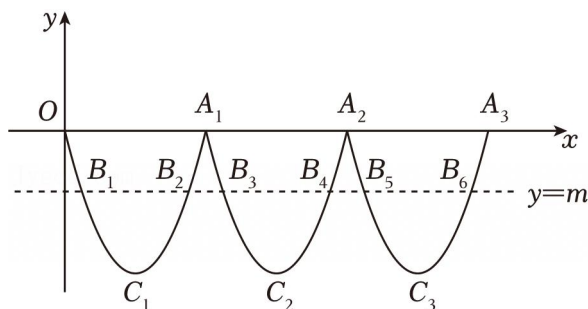
因为无法确定抛物线与 y 轴的交点位置及抛物线顶点的位置，

所以 AD 选项不符合题意．

故选：C．

【点评】本题主要考查了二次函数图象与系数的关系及抛物线与 x 轴的交点，熟知二次函数的图象与性质是解题的关键．

6. (4分) 如图，已知抛物线 $C_1: y = x^2 - 6x$ ($0 \leq x \leq 6$) 与 x 轴交于 O 、 A_1 两点．将抛物线 C_1 向右平移得到抛物线 C_2 ，交 x 轴于点 A_1 、 A_2 ；再将抛物线 C_2 向右平移得到抛物线 C_3 ，交 x 轴于点 A_2 、 A_3 ．若直线 $y = m$ ($-9 < m < 0$) 与这 3 条抛物线交于点 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 、 B_6 ，则这 6 个点的横坐标之和是 ()



A. 6 B. 18 C. 30 D. 54

【分析】易得 $C_2: y = (x - 9)^2 - 9$, $C_3: y = (x - 15)^2 - 9$, 进而可得 B_1 、 B_2 关于直线 $x = 3$ 对称, B_3 、 B_4 关于直线 $x = 9$ 对称, B_5 、 B_6 关于直线 $x = 15$ 对称, 即可得解.

【解答】解: 对于抛物线 $C_1: y = x^2 - 6x (0 \leq x \leq 6)$,

令 $y = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 6$,

$\therefore OA_1 = 6$,

即抛物线向右平移 6 个单位得到抛物线 C_2 , 以此类推,

则 $C_2: y = (x - 9)^2 - 9$, $C_3: y = (x - 15)^2 - 9$,

由抛物线对称性可得 B_1 、 B_2 关于直线 $x = 3$ 对称,

B_3 、 B_4 关于直线 $x = 9$ 对称,

B_5 、 B_6 关于直线 $x = 15$ 对称,

$\therefore B_1 + B_2 = 2 \times 3 = 6$, $B_3 + B_4 = 2 \times 9 = 18$, $B_5 + B_6 = 2 \times 15 = 30$,

$\therefore B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = 6 + 18 + 30 = 54$,

故选: D.

【点评】本题主要考查了抛物线与 x 轴的交点、几何变换等内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

二、填空题 (共 48 分, 每小题 4 分)

7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{b-a}{a}$ 的值是 $-\frac{1}{2}$.

【分析】设 $a = 2k$, $b = 3k$, 代入原式即可得出答案.

【解答】解: 设 $a = 2k$, $b = 3k$,

则原式 $= \frac{3k - 2k}{2k} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题主要考查比例的性质, 熟练掌握设参法是解题的关键.

8. (4 分) 计算: $2(\vec{3a} - \vec{b}) + 3\vec{b} = \vec{6a} + \vec{b}$.

【分析】根据平面向量的运算法则计算即可.

【解答】解: $2(\vec{3a} - \vec{b}) + 3\vec{b} = \vec{6a} - \vec{2b} + \vec{3b} = \vec{6a} + \vec{b}$.

故答案为: $\vec{6a} + \vec{b}$.

【点评】本题考查平面向量, 熟练掌握平面向量的运算法则是解答本题的关键.

9. (4 分) 如果两个相似三角形的面积之比为 16: 9, 那么它们的周长之比是 4: 3.

【分析】根据相似三角形的面积的比等于相似比的平方求出相似比, 再根据相似三角形的周长的比等于

相似比求出周长之比.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的面积之比为 16: 9,

$\therefore$ 它们的相似比为 4: 3,

$\therefore$ 它们的周长之比为 4: 3,

故答案为: 4: 3.

【点评】本题考查的是相似三角形的性质, 相似三角形的周长的比等于相似比、相似三角形的面积的比等于相似比的平方.

10. (4 分) 已知长方形的长是 x , 宽是长的一半, 面积是 y , 那么 y 关于 x 的解析式是 $y = \frac{x^2}{2}$ (不要求写定义域).

【分析】先表示宽, 再根据长方形的面积公式列式计算即可.

【解答】解: $\because$ 长方形的长是 x , 宽是长的一半,

$\therefore$ 宽为 $\frac{x}{2}$,

$\therefore y = x \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$.

故答案为: $y = \frac{x^2}{2}$.

【点评】本题主要考查函数关系式, 理解题意是解题的关键.

11. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $\angle B$ 的余弦值是 $\frac{3}{4}$, 那么 AB 的长是 16.

【分析】由锐角的余弦定义得到 $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$, 即可求出 AB 的长.

【解答】解: $\because \angle C = 90^\circ$,

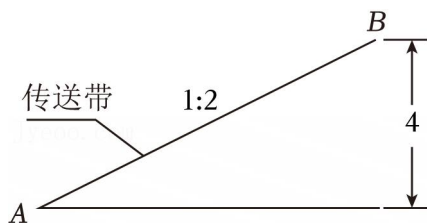
$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{AB} = \frac{3}{4}$,

$\therefore AB$ 的长是 16.

故答案为: 16.

【点评】本题考查解直角三角形, 关键是掌握锐角的余弦定义.

12. (4 分) 如图, 传送带和地面所成斜坡的坡度为 1: 2, 它把物体从地面送到离地面 4 米高的地方, 那么物体所经过的路程是 $4\sqrt{5}$ 米 (结果保留根号).



【分析】根据坡度的概念求出 AC ，再根据勾股定理求出 AB ．

【解答】解：∵ 斜坡 AB 的坡度为 $1:2$ ，

$$\therefore BC:AC = 1:2,$$

$$\therefore BC = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore AC = 8 \text{ 米},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{5} \text{ (米)},$$

答：物体所经过的路程为 $4\sqrt{5}$ 米，

故答案为： $4\sqrt{5}$ ．

【点评】本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比．

13. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的黄金分割点，且 $AD > DB$ ， $AE > EC$ ， $BC = 2$ ，那么 DE 的长是 $\sqrt{5}-1$ （结果保留根号）．

【分析】由黄金分割的定义得 $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ， $\frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，则 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，得 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，即可解决问题．

【解答】解：如图，∵ 点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的黄金分割点，且 $AD > DB$ ， $AE > EC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

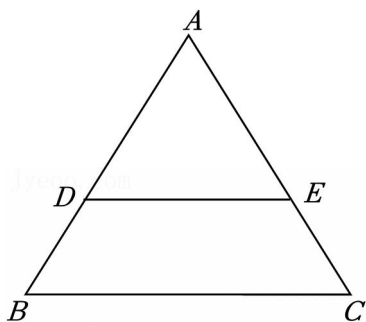
又 ∵ $\angle A = \angle A$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

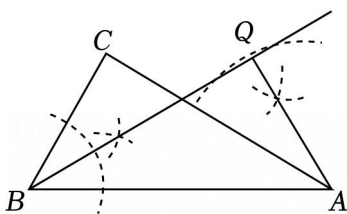
$$\therefore DE = \frac{\sqrt{5}-1}{2} BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2 = \sqrt{5}-1,$$

故答案为： $\sqrt{5}-1$ ．



【点评】本题考查了黄金分割以及相似三角形的判定与性质等知识，熟练掌握黄金分割和相似三角形的判定与性质是解题的关键．

14. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 12$ ，结合尺规作图痕迹所提供的信息可求出 AQ 的长是 6 ．



【分析】由作图痕迹可知： BQ 平分 $\angle ABC$ ， $AQ \perp BQ$ ，再根据含 30° 角的直角三角形的性质求解即可．

【解答】解：由作图痕迹可知： BQ 平分 $\angle ABC$ ， $AQ \perp BQ$ ，

$$\therefore \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

故答案为：6．

【点评】此题考查了含 30° 角的直角三角形的性质，熟记含 30° 角的直角三角形的性质是解题的关键．

15. (4分) 如图①中小狗手影是一种常见的游戏，它利用的原理是：光是沿直线传播的．如图②我们把光源看成一个点，手面看成平行于墙面的一条线段．在一次游戏中，手距离墙壁 3 米，光源与手的距离为 1 米．在 hand 的位置不变的情况下，如果光源与手的距离增加 1 米，那么小狗手影的高度变为原来的 $\frac{5}{8}$ (填“几分之几”).



图 ①

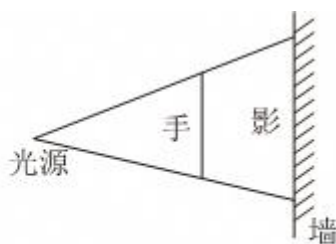


图 ②

【分析】根据相似三角形的判定和性质定理即可得到结论．

【解答】解：∵点 O 为光源， CD 为小狗手影， AB 为小明的手，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

作 $OE \perp AB$ 交 AB 于点 E ，延长 OE 交 CD 于点 F ，则 $OF \perp CD$ ，

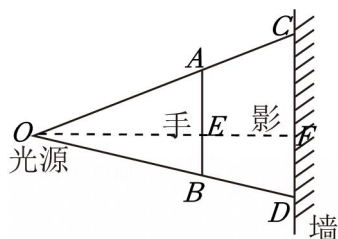


图2

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle ODC, \angle OAB = \angle OCD,$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OCD,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF},$$

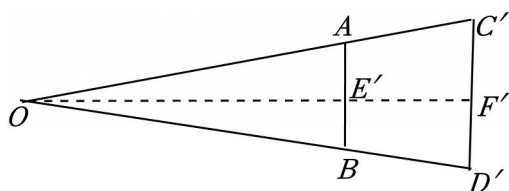
$$\therefore OF = 3 + 1 = 4 \text{ 米}, OE = 1 \text{ 米},$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{4},$$

设 $AB = x$,

$$\therefore CD = 4x,$$

∵在光源不动的情况下，光源与手的距离增加 1 米，



$$\therefore OE' = 2 \text{ 米},$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OC'D',$$

$$\therefore \frac{AB}{C'D'} = \frac{OE'}{OF'},$$

$$\therefore \frac{x}{C'D'} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore C'D' = \frac{5}{2}x,$$

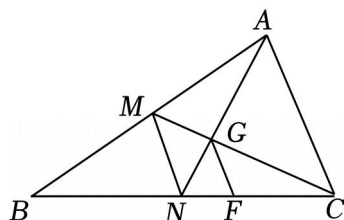
$$\therefore \frac{\frac{5}{2}x}{4x} = \frac{5}{8},$$

答：小狗手影的高度变为原来的 $\frac{5}{8}$ ，

故答案为: $\frac{5}{8}$.

【点评】 本题考查相似三角形的应用, 解题的关键是掌握相似三角形的判定和性质.

16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点, 联结 AN 、 CM 交于点 G , $GF \parallel AC$ 交 BC 于点 F , 那么 $S_{\triangle NGF} : S_{\triangle AGC} = \underline{1:4}$.



【分析】 根据三角形中位线得出点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 进而利用相似三角形的判定与性质解答.

【解答】 解: $\because$ 点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点, 联结 AN 、 CM 交于点 G ,

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore NG : AG = 1 : 2$,

$\because GF \parallel AC$,

$\therefore \triangle NGF \sim \triangle NAC$, 且相似比为 $NG : AN = 1 : 3$,

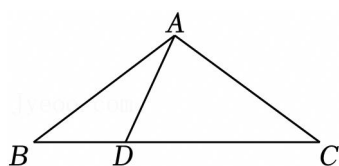
同理可得: $\triangle NGF \sim \triangle AGC$, 且相似比为 $NG : AG = 1 : 2$,

$\therefore S_{\triangle NGF} : S_{\triangle AGC} = 1 : 4$.

故答案为: $1 : 4$.

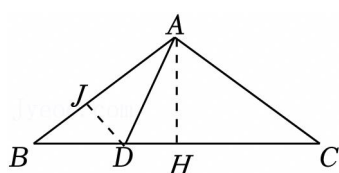
【点评】 此题考查三角形中位线定理, 关键是根据三角形中位线得出点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心解答.

17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AC = 10$, $\cos B = \frac{4}{5}$, 点 D 是边 BC 上的一点, 联结 AD , 如果 $\angle ADB = 90^\circ + \angle BAD$, 那么 $AD = \underline{3\sqrt{5}}$.



【分析】 如图, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过点 D 作 $DJ \perp AB$ 于点 J . 解直角三角形求出 BH , AH , 再利用你姐夫求出 DH , 利用勾股定理求出 AD 即可.

【解答】 解: 如图, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过点 D 作 $DJ \perp AB$ 于点 J .



$\because AB = AC = 10$, $AH \perp BC$,

$$\therefore BH = CH,$$

$$\therefore \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BH = CH = 8,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ + \angle BAD = 90^\circ + \angle DAH,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAH,$$

$$\therefore DJ \perp AB, DH \perp AH,$$

$$\therefore DJ = DH,$$

$$\therefore \triangle ABH \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times AH \times BH = \frac{1}{2} \times AB \times DJ + \frac{1}{2} \times AH \times DH,$$

$$\therefore 6 \times 8 = DH \times (10 + 6),$$

$$\therefore DH = 3,$$

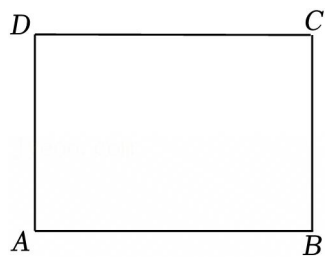
$$\therefore AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}.$$

故答案为: $3\sqrt{5}$.

【点评】 本题考查解直角三角形，勾股定理，角平分线的性质，等腰三角形的性质，解题的关键是掌握相关知识解决问题.

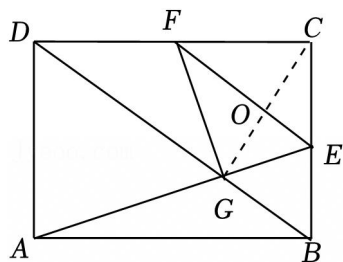
18. (4分) 如图，矩形 $ABCD$ 中，联结 BD ，点 E 是 BC 的中点，过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 CD 于点 F ，将 $\triangle$

CEF 沿直线 EF 翻折，点 C 落在平面内点 G 处，如果点 G 恰在 AE 上，那么 $BG:AE$ 的值是 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.



【分析】 易证 $EF \parallel BD$ ，则 $CG \perp BD$ ，设 $BG = 1$ ，则 $DG = 2$ ，由射影定理可得 $CG = \sqrt{2}$ ，再利用勾股定理求出 CD 、 BC ，进而再求出 AE ，即可得解.

【解答】 解：如图，连接 CG 交 EF 于点 O ，



则 $CG \perp EF$,

$\because E$ 为 BC 中点, 且 G 在 BD 上,

$\therefore OC = OG$,

$\therefore EF \parallel BD$, 则 $CG \perp BD$,

在矩形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$,

$\therefore \triangle BEG \sim \triangle DAG$,

$$\therefore \frac{BG}{DG} = \frac{BE}{AD} = \frac{1}{2},$$

设 $BG = 1$, 则 $DG = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $CG \perp BD$,

$$\therefore \angle DGC = \angle BGD = 90^\circ, \quad \angle DCG = \angle CBG = 90^\circ - \angle BCG,$$

$\therefore \triangle DCG \sim \triangle CBG$,

$$\therefore CG^2 = DG \cdot BG = 2,$$

$$\therefore CG = \sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, $CD = \sqrt{CG^2 + DG^2} = \sqrt{6}$,

$$\therefore AB = CD = \sqrt{6},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中, $BC = \sqrt{CG^2 + BG^2} = \sqrt{3}$,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore BG : AE = 1 : \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

【点评】 本题主要考查了翻折的性质、矩形的性质、相似三角形的判定和性质等内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 共 78 分) 如无特别说明, 本大题作答须写出证明或计算的主要步骤。

19. (10分) 计算: $\sin 45^\circ - 2\sin 60^\circ + \frac{2\cot 45^\circ}{\tan 60^\circ + 1}$.

【分析】利用特殊锐角三角函数值计算即可.

【解答】解: 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2 \times 1}{\sqrt{3} + 1}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

【点评】本题考查特殊锐角三角函数值, 熟练掌握相关特殊值是解题的关键.

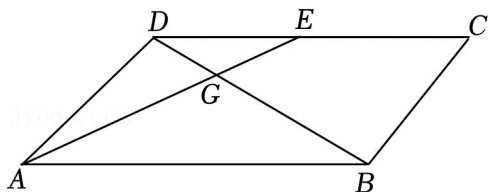
20. (10分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 DC 的中点, AE 与对角线 BD 交于点 G , 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$.

(1) 填空: 向量 $\vec{DB} = \underline{\vec{a} - \vec{b}}$, 向量 $\vec{AG} = \underline{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}}$.

(注: 本题结果用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

(2) 作出向量 $\vec{DG}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.

(注: 画图不要求写作法, 但要指出所作图中表示结论的向量)



【分析】(1) 由题意得 $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}$. 由平行四边形的性质得 $\vec{DC} = \vec{AB} = \vec{a}$, $AB \parallel CD$, 可得 $\triangle ABG \sim \triangle EDG$, 则 $\frac{EG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$, 可得 $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AE}$. 由题意得 $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, 则可得 $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

(2) 结合平面向量的分向量的定义作图即可.

【解答】解: (1) $\because \vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$,

$$\therefore \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore \vec{DC} = \vec{AB} = \vec{a}, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle EDG, \angle BAG = \angle DEG,$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle EDG,$$

$$\therefore \frac{EG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AE}.$$

$\because$ 点 E 是边 DC 的中点,

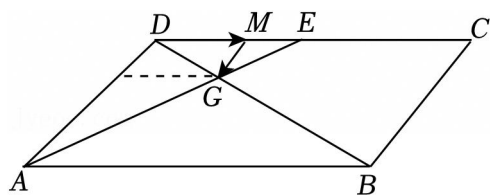
$$\therefore \vec{DE} = \frac{1}{2} \vec{DC} = \frac{1}{2} \vec{a},$$

$$\therefore \vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}.$$

故答案为: $\vec{a} - \vec{b}; \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}.$

(2) 如图, $\vec{DM}, \vec{MG}$ 即为所求.



【点评】 本题考查平面向量、三角形中位线定理、平行四边形的性质、作图—复杂作图, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

21. (10 分) 人工智能已经逐渐融入我们的生活. 某餐厅为了跟上时代的步伐, 购买了一个送餐机器人, 这种机器人与地面的接触面积是可以调整的. 在水平地面上, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间存在的反比例函数关系 (数据如表一所示). 餐厅的地面由玻璃、木地板和大理石三种材质拼接而成. 地面材质与地面承受的最大压强的关系如表二所示.

表一: 地面所受压强与接触面积之间的关系

地面所受压强 p (Pa)	...	4×10^4	6×10^4	8×10^4	1×10^5	...
接触面积 S (m^2)	...	1.2×10^{-3}	8×10^{-4}	6×10^{-4}	4.8×10^{-4}	...

表二: 地面材质与地面承受的最大压强的关系

地面材质	玻璃	木地板	大理石
能承受的最大压强 p (Pa)	4.8×10^7	2.4×10^7	2.5×10^8

(1) 求地面所受压强 p (Pa) 关于接触面积 S (m^2) 的函数表达式 (不写定义域);

(2) 求该机器人与地面的接触面积至少为多少平方米?

【分析】(1) 由表格的数据可知, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间成反比例函数的关系, 设地面所受压强 p (Pa) 关于接触面积 S (m^2) 的函数表达式为 $p = \frac{F}{S}$, 将一对数据代入即可求出 F 的值.

(2) 将 $p = 2.5 \times 10^8 Pa$ 代入 (1) 中所求函数表达式中, 即可求出这种机器人与玻璃通道的最小接触面积.

【解答】解: (1) 由表格的数据可知, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间成反比例函数的关系.

设地面所受压强 p (Pa) 关于接触面积 S (m^2) 的函数表达式为 $p = \frac{F}{S}$.

将 $(4 \times 10^4, 1.2 \times 10^{-2})$ 代入 $p = \frac{F}{S}$, 得 $F = 4 \times 10^4 \times 1.2 \times 10^{-2} = 4.8 \times 10^2$,

$\therefore$ 地面所受压强 p (Pa) 关于接触面积 S (m^2) 的函数表达式为 $p = \frac{4.8 \times 10^2}{S}$.

(2) 把 $p = 2.5 \times 10^8$ 代入 $p = \frac{4.8 \times 10^2}{S}$ 得, $S = 1.92 \times 10^{-6}$,

答: 该机器人与地面的接触面积至少为 1.92×10^{-6} 平方米.

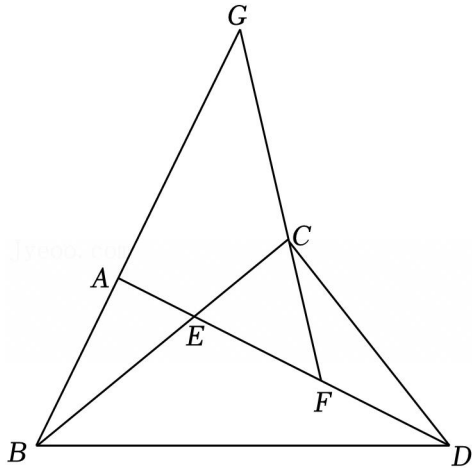
【点评】本题主要考查了以物理知识为情境的反比例函数的应用相关知识, 知道物理学中压力、压强与接触面积三者之间的关系是解题的关键. 计算时需要仔细.

22. (12 分) 如图, 线段 AD 、 BC 相交于点 E , 点 F 是线段 ED 的中点, 联结 AB 、 BD 、 CD , 分别延长 BA 、

FC 交于点 G . 已知 $\angle BAD = 90^\circ$, 且 $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$.

(1) 求证: $\angle ABE = \angle FCD$;

(2) 如果 DA 平分 $\angle BDC$, 求证: $\frac{BG}{BD} = \frac{BC}{2CF}$.



【分析】(1) 根据两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似可得 $\triangle AEB \sim \triangle CEB$ ，那么 $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ABE = \angle FDC$ ，进而根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可得 $CF = DF$ ，即可判断出 $\angle FCD = \angle FDC$ ，那么 $\angle ABE = \angle FCD$ ；

(2) 证明 $\triangle BCG \sim \triangle DEB$ ，可得 $\frac{BG}{BD} = \frac{BC}{DE}$ ，进而判断出 $DE = 2CF$ ，代换即可。

【解答】解：(1) 证明： $\because \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ ， $\angle AEB = \angle CED$ ，

$\therefore \triangle AEB \sim \triangle CEB$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ABE = \angle FDC$ ，

$\because$ 点 F 是 ED 的中点，

$\therefore CF = \frac{1}{2}DE$ ， $DF = \frac{1}{2}DE$ ，

$\therefore CF = DF$ ，

$\therefore \angle FCD = \angle FDC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle FCD$ ；

(2) $\because DA$ 平分 $\angle BDC$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ADC$ ，

$\because \angle ABE = \angle ADC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle ADB$ ，

$\because \angle BCD = 90^\circ$ ，点 F 是 ED 的中点，

$\therefore CF = \frac{1}{2}DE$ ， $FE = \frac{1}{2}DE$ ，

$\therefore CF = EF$ ， $DE = 2CF$ ，

$\therefore \angle CEF = \angle ECF$ ，

$$\therefore \angle BCG = \angle CEF + \angle EFC,$$

$$\angle BED = \angle ECF + \angle EFC,$$

$$\therefore \angle BCG = \angle BED,$$

$$\therefore \triangle BCG \sim \triangle DEB,$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{BC}{DE},$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{BC}{2CF}.$$

【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质的综合应用. 熟练掌握并应用相似三角形的判定和性质是解决本题的关键.

23. (10 分) 探究活动: 巧拼地砖外边.

装修工人有一大一小两根条形边角料 (大条形边角料 $MOBP$ 中 $MO \parallel PB$, 小条形边角料 $NOAQ$ 中 $ON \parallel AQ$, $\angle MOB = \angle NOA = 135^\circ$), 如图 1 拼接到直角地砖 ($\angle MON = 90^\circ$) 的外边上, 发现点 A 与点 B 不能重合. 为了尽可能节约用料, 又能使两根条形边角料能拼成一个直角, 工人师傅使用一把直尺、一支笔和一台切割机, 经过图 2 - 图 9 的操作解决了问题, 完成了拼接.

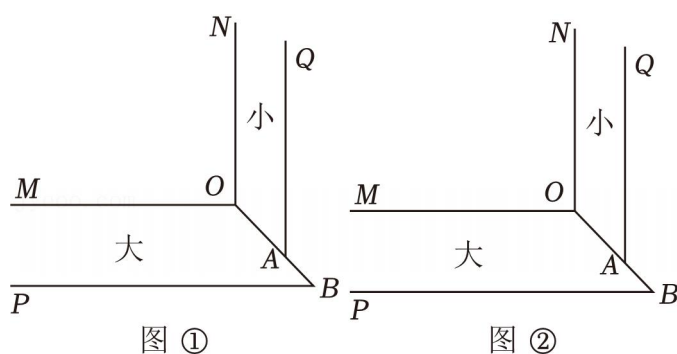
图 1	图 2	图 3	图 4	图 5
【操作说明】将一大一小两根条形边角料拼在直角地砖的外边.	【操作说明】画出 QA 的延长线, 交 BP 于点 C .	【操作说明】联结 OC .	【操作说明】沿着射线 OB 方向, 平移小条形边角料 $NOAQ$, 使点 A 与点 B 重合, 得到四边形 $O'N'Q'B$.	【操作说明】画出 MO 的延长线, 交小条形边角料的边

图 6	图 7	图 8	图 9
【操作说明】联结 BD .		【操作说明】沿着 OC 、 BD 切割.	【操作说明】拼接切割后的两根条形边角料.

(1) 请根据图 2 - 图 6 的操作说明, 在图①中画出操作过程相应的图形, 并按操作过程标注相应的字母;

(2) 如果大条形边角为 $MOBP$ 的宽度为 12cm , 小条形边角为 $NOAQ$ 的宽度为 9cm , 大条形边角料 $MOBP$ 裁剪后的锐角是 $\angle OCP$, 那么 $\tan \angle OCP = \frac{4}{3}$;

(3) 请根据上述探究, 设计一个新裁剪方案, 在图②中画出剪裁方法, 并简单说明理由.



【分析】(1) 依据操作步骤画图即可;

(2) 过 O 作 $OL \perp BP$ 于点 L , 作 $OK \perp BQ$ 于点 K , 易得 $CL = OK = 9\text{cm}$, $OL = 12\text{cm}$, 据此求解即可;

(3) 延长 QA 与 PB 交于点 E , 连接 OE , 过点 A 作 OE 平行线, 交 NO 于点 F , 沿着 OE 、 AF 切割, 易证四边形 $AEOF$ 是平行四边形, 即可得解.

【解答】解: (1) 操作图形如图所示;


$$\therefore \tan \angle OCP = \frac{OL}{CL} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3},$$

(3) 延长 QA 与 PB 交于点 E , 连接 OE , 过点 A 作 OE 平行线, 交 NO 于点 F , 沿着 OE 、 AF 切割.


$$\therefore OE = AF, \quad \angle AFN + \angle MOE = \angle AON + \angle OAF + \angle MOB - \angle AOE = \angle AON + \angle MOB = 270^\circ,$$

【点评】本题主要考查了锐角三角形比、矩形的判定和性质、复杂作图等内容，熟练掌握相关知识是解题的关键.

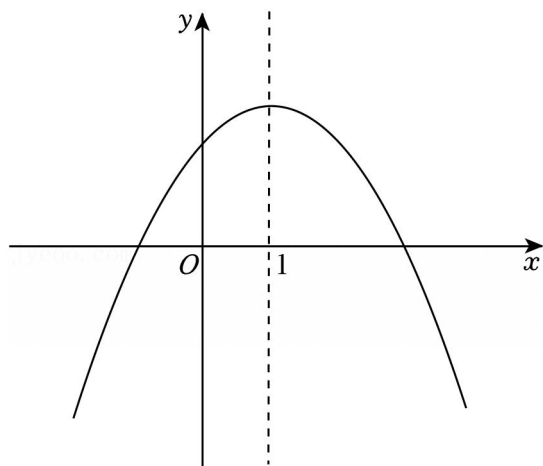
24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 是常数) 经过点 $A(5, -6)$, 对称轴为直线 $x = 1$, 顶点为 B .

(1) 求抛物线 C_1 的函数表达式及点 B 的坐标.

(2) 点 M 为抛物线 C_1 上的动点, 过点 M 作直线 $x = m$.

①当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分 (包含交点) 的最高点的纵坐标为 $2 - m$, 求 m 的值;

②当点 M 不在坐标轴上时, 直线 $x = m$ 交抛物线 $C_2: y = x^2 - 2x - 3$ 于点 P , 过点 P 作 y 轴垂线, 垂足为点 D , 在线段 PD 的延长线上截取 $DQ = 2PD$, 联结 MQ , 当抛物线 C_1 的顶点 B 在 $\triangle PQM$ 内部时, 直接写出 m 的取值范围.



【分析】 (1) 由对称轴可得 $b = 1$, 进而再将 $(5, -6)$ 代入求出 c 值即可求出抛物线解析式, 进而求出顶点坐标;

(2) ①当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分是 y 随 x 增大而减小, M 点即为最高点, 据此求解即可;

②分两种情况画出图形, 当点 B 在线段 PQ 上时以及点 P 在 MQ 上为临界点, 据此求解即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore b = 1,$$

$$\because \text{抛物线 } C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + c \text{ 经过点 } A(5, -6),$$

$$\therefore -\frac{25}{2} + 5 + c = -6,$$

$$\text{解得 } c = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}.$$

当 $x = 1$ 时, $y = 2$,

$\therefore B(1, 2)$;

(2) ①由题可知 $M(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2})$,

当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分是 y 随 x 增大而减小,

$\therefore M$ 点即为最高点,

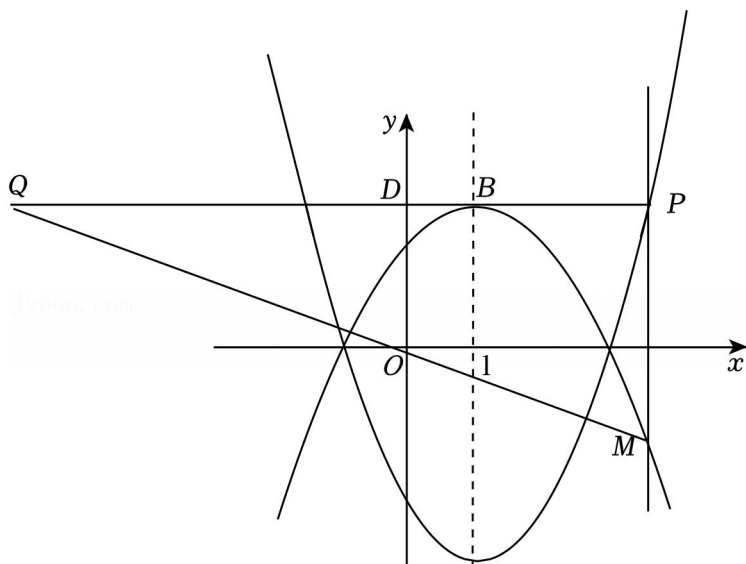
此时 $-\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} = 2 - m$,

解得 $m = 2 \pm \sqrt{3}$,

$\therefore M$ 在对称轴右侧, 即 $m > 1$,

$\therefore m = 2 + \sqrt{3}$;

②当点 M 在点 B 右侧时, 此时 $m > 1$, 如图,



此时要满足题意则点 P 需在点 B 右上方, 找出临界值, 即点 B 在 PQ 上时,

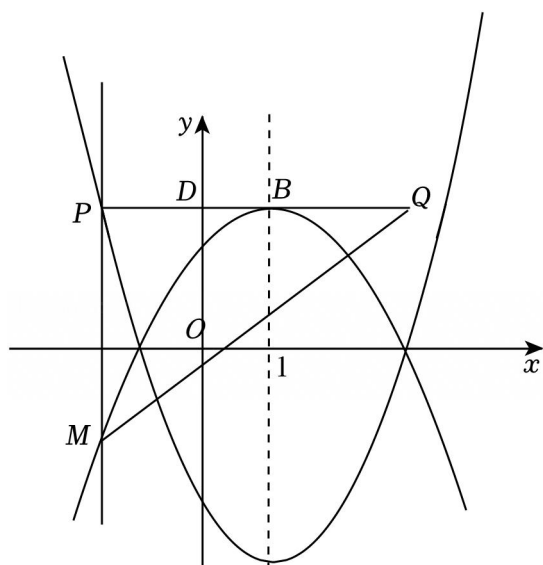
由题可知 $P(m, m^2 - 2m - 3)$,

$\therefore m^2 - 2m - 3 = 2$,

解得 $m = 1 + \sqrt{6}$ 或 $m = 1 - \sqrt{6}$ (舍去),

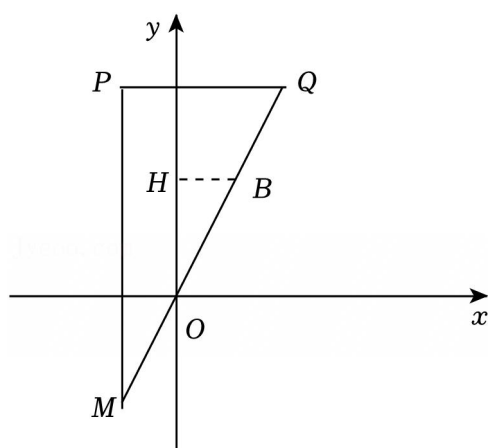
$\therefore m > 1 + \sqrt{6}$;

当点 M 在点 B 左侧时, 即 $m < 1$, 如图,



同理可得 $m < 1 - \sqrt{6}$;

当点 B 在 MQ 上时, 此时 $m < 0$,



此时 $\tan \angle BOH = \tan \angle PMQ$, 即 $\frac{BH}{OH} = \frac{PQ}{PM}$,

$$\text{则 } \frac{1}{2} = \frac{-3m}{m^2 - 2m - 3 - (-\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2})},$$

解得 $m = -3$,

$$\therefore -3 < m < 1 - \sqrt{6},$$

综上, $m > 1 + \sqrt{6}$ 或 $-3 < m < 1 - \sqrt{6}$.

【点评】 本题主要考查了二次函数解析式、顶点坐标、二次函数与 x 轴交点问题、二次函数点的坐标特征等 e 内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

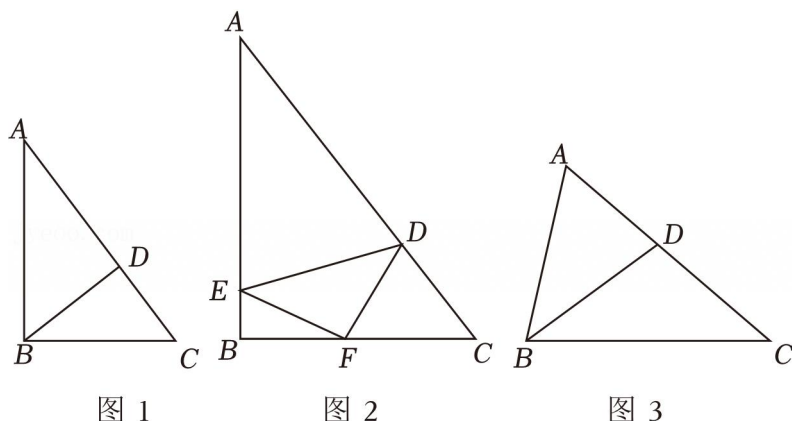
25. (14 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AC 上的一点.

(1) 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时.

①如图 1, BD 是边 AC 上的高, 求证: $BD^2 = AD \cdot CD$;

②如图 2, $AD = AE$, 点 F 在边 BC 上, 且 $CF = CD$, 顺次联结 DE 、 EF 、 FD . 如果 $EF = DF$, $\tan \angle EFB = \frac{1}{2}$, 求 $\cot C$ 的值.

(2) 如图 3, 如果点 D 是边 AC 的中点, $\angle ABD = \angle ACB$, 点 G 在线段 DB 延长线上, 且 $BG = BC$, 联结 CG , 取 CG 中点 H , 分别延长 HB 、 CA 交于点 O , 求 $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COH}}$ 的值.



【分析】(1) ①易证 $\triangle ABD \sim \triangle BCD$, 即可得证;

②设 $EF = 1$, 则 $BF = 2$, 先证 $\triangle DEF$ 为等腰直角三角形, 再构造三垂直全等: 过 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M , 易证 $\triangle BEF \cong \triangle MFD$ (AAS), $FM = BE = 1$, $BF = DM = 2$, 再设 $CM = x$, 在 $Rt\triangle CDM$ 中, 利用勾股定理求解即可;

(2) 易证 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, 可得 $\frac{BD}{BG} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设 $S_{\triangle BOD} = S$, 则 $S_{\triangle BOG} = \sqrt{2}S = S_{\triangle BOC}$, 则 $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BOC} - S_{\triangle BOD} = (\sqrt{2} - 1)S$, $S_{\triangle CBG} = \sqrt{2}S_{\triangle CBD} = (2 - \sqrt{2})S$, 再求 $S_{\triangle BCH} = \frac{1}{2}S_{\triangle CBG} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}S$, 即可得解.

【解答】(1) ①证明: $\because BD \perp AC$,

$$\therefore \angle BDC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BCD = 90^\circ - \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot CD;$$

②解: $\because AE = AD$,

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\because CF = CD,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CFD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C,$$

$$\therefore \angle EDF = 180^\circ - \angle ADE - \angle CDF = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 45^\circ,$$

$$\because DE = DF,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 90^\circ,$$

$$\because \tan \angle EFB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2},$$

设 $EF = 1$, 则 $BF = 2$,

如图, 过 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M ,

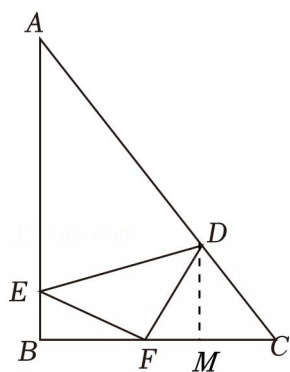


图 2

则 $\angle B = \angle EFD = \angle DMF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EFB = \angle FDM = 90^\circ - \angle DFM,$$

$$\because EF = DF,$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle MFD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore FM = BE = 1, BF = DM = 2,$$

设 $CM = x$, 则 $CD = CF = 1 + x$,

在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中, $CM^2 + DM^2 = CD^2$,

$$\text{即 } x^2 + 4 = (x + 1)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2}, \text{ 即 } CM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \cot C = \frac{CM}{DM} = \frac{3}{4};$$

(2) 设 $AD = a$, 则 $AC = 2a$,

$$\because \angle ABD = \angle ACB, \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore AB^2 = AD \cdot AC = 2a,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}a,$$

$$\because BG = BC,$$

$$\therefore \frac{BD}{BG} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

如图，连接 CG ，

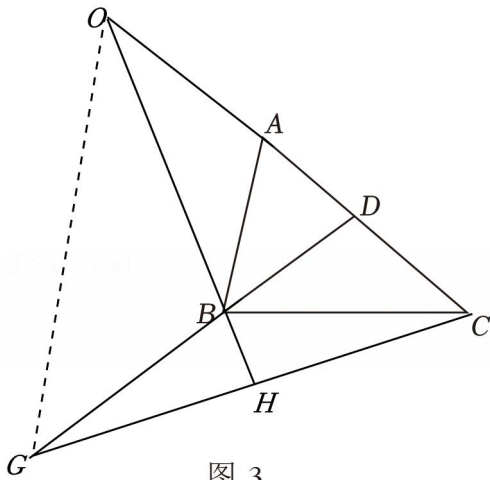


图 3

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle BOG}}{S_{\triangle BOD}} = \frac{BG}{BD} = \sqrt{2},$$

$$\text{设 } S_{\triangle BOD} = S, \text{ 则 } S_{\triangle BOG} = \sqrt{2}S,$$

$$\because BG = BC, H \text{ 为 } CG \text{ 中点},$$

$$\therefore OH \text{ 垂直平分 } CG,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOG} = \sqrt{2}S,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BOC} - S_{\triangle BOD} = (\sqrt{2} - 1)S,$$

$$\because \frac{BG}{BD} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle CBG} = \sqrt{2}S_{\triangle CBD} = (2 - \sqrt{2})S,$$

$$\because H \text{ 为 } CG \text{ 中点},$$

$$\therefore S_{\triangle BCH} = \frac{1}{2}S_{\triangle CBG} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}S,$$

$$\therefore S_{\triangle COH} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle BCH} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}S,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COH}} = \frac{S}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}S} = 2 - \sqrt{2}.$$

【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质、等腰直角三角形的判定、勾股定理等内容，熟练掌握相关知识是解题的关键．