

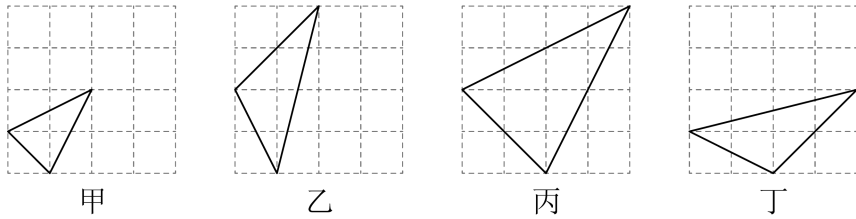
2025-2026 学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷

初三数学试卷 2026.1

(时间: 100 分钟 满分: 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的

1. 下列网格中各个小正方形的边长均为 1, 阴影部分图形分别记作甲、乙、丙、丁, 其中互为相似形的是 ()



- A. 甲和乙 B. 甲和丙 C. 甲和丁 D. 丙和丁

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了相似图形, 根据对应角相等, 对应边对应成比例的图形是相似图形, 据此进行判断即可.

【详解】解: 由图可知, 只有甲和丙中的对应角相等, 且对应边对应成比例, 即 $\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{2}$,

$\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{2}$, 它们的形状相同, 大小不同, 是相似形,

故选: B.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 那么 $\angle B$ 的余切值为 ()

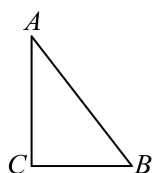
- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形, 利用勾股定理求 AC , 再根据余切定义求 $\angle B$ 的余切值即可.

【详解】解: 如图,



$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \cot \angle B = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4},$$

故选：C.

3. 已知 $\vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$, 且 $\vec{c}$ 是非零向量, 那么下列说法中不正确的是 ()

A. $\vec{b} \parallel \vec{c}$

B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

C. $|\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$

D. $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了平行向量的定义, 向量的模长, 向量的线性运算, $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个非零向量, 若满足 $\vec{a} = k\vec{b} (k \neq 0)$, 那么这两个向量平行, 且 $|\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{b}|$, 据此逐一判断即可.

【详解】解: A、 $\because \vec{b} = -2\vec{c}$, 且 $\vec{c}$ 是非零向量,

$\therefore \vec{b} \parallel \vec{c}$, 原说法正确, 不符合题意;

B、 $\because \vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$, 且 $\vec{c}$ 是非零向量,

$\therefore \vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$,

$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$, 原说法正确, 不符合题意;

C、 $\because \vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$,

$$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b},$$

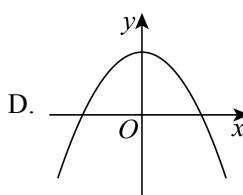
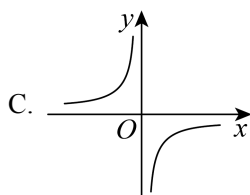
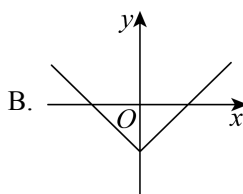
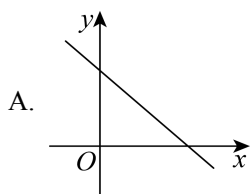
$\therefore |\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$, 原说法正确, 不符合题意;

D、 $\because \vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$,

$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$, 原说法错误, 符合题意;

故选: D.

4. 已知点 $A(-2, m)$ 、 $B(2, m)$ 、 $C(4, m+1)$ 在同一个函数的图像上, 这个函数图像可能是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了函数图象，根据点 $A(-2, m)$ 、 $B(2, m)$ 得到点 A 和点 B 关于 y 轴对称，排除 A，C 选项；根据点 $B(2, m)$ 、 $C(4, m+1)$ 得到当 $x=2$ 时的函数值小于当 $x=4$ 时的函数值，进而求解即可.

【详解】解：∵ 点 $A(-2, m)$ 、 $B(2, m)$ 在同一个函数的图像上，且点 A 和点 B 关于 y 轴对称，

∴ 排除 A，C 选项；

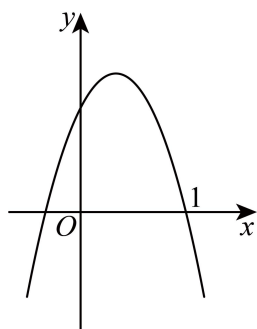
∵ 点 $B(2, m)$ 、 $C(4, m+1)$ 在同一个函数的图像上，

∴ 当 $x=2$ 时， $y=m$ ，当 $x=4$ 时， $y=m+1$ ，且 $m+1 > m$

∴ 当 $x=2$ 时的函数值小于当 $x=4$ 时的函数值，排除 D 选项，只有 B 选项符合题意.

故选：B.

5. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，那么下列各式中成立的是 ()



A. $a > 0$

B. $c < 0$

C. $b < 0$

D. $a + b + c = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次函数图象的性质，由图象得 $a < 0$ ， $c > 0$ ， $-\frac{b}{2a} > 0$ ，当 $x=1$ 时，进行判断即可求解.

【详解】解：如图可知： $a < 0, c > 0, -\frac{b}{2a} > 0$,

$\therefore b > 0$,

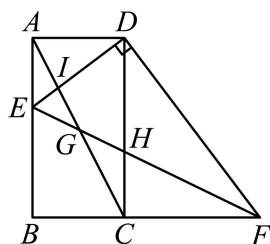
$\therefore$ A、B、C 都错误,

当 $x = 1$ 时, $a + b + c = 0$,

$\therefore$ D 正确;

故选：D.

6. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 的延长线上, $DF \perp DE$, DE 与对角线 AC 交于点 I , EF 与对角线 AC 交于点 G , 与边 DC 交于点 H . 则下列结论不一定成立的是 ()



A. $\triangle DFH \sim \triangle GAE$

B. $\triangle ADE \sim \triangle DCA$

C. $\triangle DAI \sim \triangle GEI$

D. $\triangle DFH \sim \triangle GCH$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质, 直角三角形两锐角互余及相似三角形的判定与性质, 利用相似三角形的判定与性质并根据已知条件逐一分析各选项的三角形是否相似即可.

【详解】解：在矩形 $ABCD$ 中,

$AD \parallel BF$, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = \angle ADC = \angle B = \angle DCF = 90^\circ$,

$\therefore \angle EDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADE + \angle EDH = \angle EDH + \angle CDF$,

$\therefore \angle ADE = \angle CDF$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CDF$,

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DF}$,

$\therefore \tan \angle ACD = \tan \angle EFD$,

$\therefore \angle ACD = \angle EFD$,

$\therefore \angle CHG = \angle DHF$

$\therefore \triangle DFH \sim \triangle GCH$, 故 D 项成立,

$$\therefore \angle CGF = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle CGF = \angle AGE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AGE,$$

$$\therefore \triangle DAI \sim \triangle GEI, \text{ 故 C 项成立,}$$

$$\therefore \angle AEG = \angle DHF, \quad \angle CDF = \angle AGE,$$

$$\therefore \triangle DFH \sim \triangle GAE, \text{ 故 A 项成立,}$$

$$\therefore \text{不一定成立的是 } \triangle ADE \sim \triangle DCA,$$

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{2a}{3a-b}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{6}{7}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的性质, 可设 $a = 3k$, $b = 2k (k \neq 0)$, 代入所求表达式中进行化简即可得到答案.

【详解】 解: $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{2},$

$$\therefore \text{可设 } a = 3k, \quad b = 2k (k \neq 0),$$

$$\therefore \frac{2a}{3a-b} = \frac{2 \cdot 3k}{3 \cdot 3k - 2k} = \frac{6k}{9k - 2k} = \frac{6k}{7k} = \frac{6}{7},$$

故答案为: $\frac{6}{7}.$

8. $\sin 45^\circ \cdot \tan 60^\circ =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值代入得出答案.

【详解】 解: 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】此题主要考查了特殊角的三角函数值, 正确记忆相关数据是解题关键.

9. 如果两个相似三角形的对应角平分线之比为 1: 4, 那么它们的周长之比是_____

【答案】 1:4

【解析】

【分析】直接根据相似三角形的性质进行解答.

【详解】 $\because$ 两个相似三角形的对应角平分线之比为 1: 4,

$\therefore$ 那么它们的周长之比是 1: 4. 故答案为: 1: 4.

【点睛】本题考查相似三角形的性质, 解题的关键是知道相似三角形对应边的比、对应角平分线的比、周长的比等于相似比.

10. 将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 3 个单位, 向下平移 1 个单位后的抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = (x - 3)^2 - 1$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象的平移问题, 根据“上加下减, 左加右减”的平移规律求解即可.

【详解】解: 将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 3 个单位, 向下平移 1 个单位后的抛物线的表达式是 $y = (x - 3)^2 - 1$,

故答案为: $y = (x - 3)^2 - 1$.

11. 已知 $A(-1, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 (填“>”、“=”或“<”).

【答案】 <

【解析】

【分析】本题主要考查了比较二次函数值的大小, 根据解析式可得开口方向向上, 对称轴为直线 $x = 1$, 则离对称轴越远, 函数值越大, 求出两个点到对称轴的距离, 比较即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x + c = (x - 1)^2 + c - 1$, $a = 1 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x = 1$,

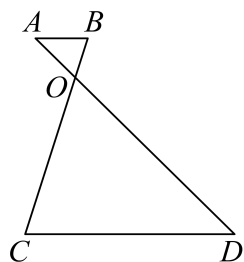
$\therefore$ 离对称轴越远, 函数值越大,

$\because A(-1, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 上的两点, 且 $|-1 - 1| = 2 < |4 - 1| = 3$,

$\therefore y_1 < y_2$,

故答案为：<.

12. 如图，线段 AD 与 BC 相交于点 O ，已知 $\frac{AO}{AD} = \frac{1}{4}$ ，已知 $BO = 2$ ，当 $OC = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $AB \parallel CD$.



【答案】 6

【解析】

【详解】 本题考查了相似三角形的判定与性质，根据已知条件可推断出 $\frac{AO}{AD} = \frac{BO}{BC} = \frac{1}{4}$ ，证得

$\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，利用相似三角形的性质得出 $\angle B = \angle C$ ，进而证得 $AB \parallel CD$ ，再根据相似三角形对应边成比例求得 BC 的值，最终求得结果.

解：当 $\frac{AO}{AD} = \frac{BO}{BC} = \frac{1}{4}$ ， $\angle AOB = \angle DOC$ 时，

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

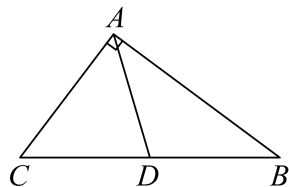
$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{2}{BC} = \frac{1}{4}, \text{ 解得 } BC = 8,$$

$$\therefore OC = BC - BO = 8 - 2 = 6,$$

故答案为：6.

13. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $AB = 4$ ， AD 为斜边 BC 上的中线，则 $\cos \angle CAD$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3}{5}$ ## 0.6

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，直角三角形斜边中线定理，等腰三角形的性质及余弦的定义，根据已知条

件利用勾股定理求得 BC 的值，再由直角三角形斜边中线定理可得 $AD = CD = BD = \frac{5}{2}$ ，根据等腰三角形的性质得出 $\angle CAD = \angle C$ ，进而求得结果.

【详解】解： $\because \angle CAB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $AB = 4$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 5,$$

又 $\because AD$ 为斜边 BC 上的中线，

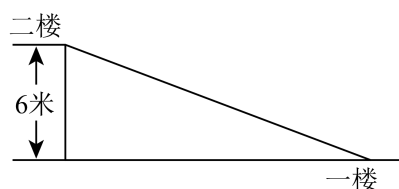
$$\therefore AD = CD = BD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \angle CAD = \angle C,$$

$$\therefore \cos \angle CAD = \frac{3}{5},$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

14. 如图，顾客站在某商场内的自动扶梯上从一楼移动到二楼，已知商场第一层楼的高度大约为 6 米，那么此自动扶梯斜坡的坡比是_____.



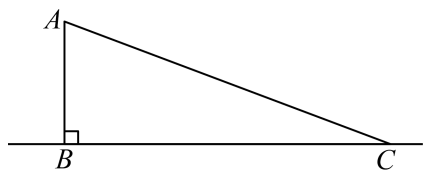
【答案】 1:2.4

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理和坡比的计算，正确掌握勾股定理和坡比的计算方法是解题的关键.

先根据勾股定理，计算出水平距离 BC 的长，再计算坡比即可求解.

【详解】解：如图，



在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = 6$ 米， $AC = 15.6$ 米，

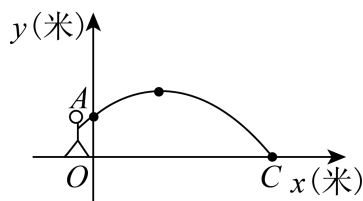
$$\text{则 } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{15.6^2 - 6^2} = \frac{72}{5} \text{ (米)},$$

$$\text{所以坡比 } i = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{\frac{72}{5}} = 1:2.4.$$

故答案为： 1:2.4.

15. 如图，小明推铅球，已知铅球运行时离地面的高度 y (米) 关于水平距离 x (米) 的函数解析式为

$y = -\frac{1}{8}x^2 + bx + c$ ，如果小明铅球出手的高度为1.5米，成绩为6米，那么可以推断铅球在运行中的高度最高大约为_____米.



【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了待定系数法求二次函数解析式，投球问题(实际问题与二次函数)， $y = ax^2 + bx + c$ 的最值等知识点，解题关键是掌握上述知识点并能运用来求解. 先根据题意得出函数过 $(0, 1.5)$ ， $(6, 0)$ ，从而可求得待定系数，求得函数表达式，代入 $x = 2$ 求得函数值即可.

【详解】解： $\because$ 小明铅球出手的高度为1.5米，成绩为6米，

$$\therefore y = -\frac{1}{8}x^2 + bx + c \text{ 过 } (0, 1.5), (6, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} 1.5 = c \\ 0 = -\frac{1}{8} \times 6^2 + 6b + c \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 铅球运行时离地面的高度 y （米）关于水平距离 x （米）的函数解析式为

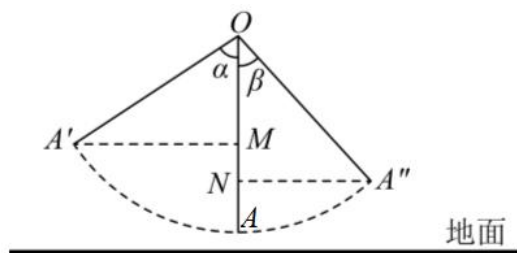
$$y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 2,$$

当 $x = 2$ 时，函数 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 有最大值为 $y = 2$ ，

$\therefore$ 铅球在运行中的高度最高大约为2米，

故答案为：2.

16. 某公园有一秋千，如图所示，将秋千从与竖直方向夹角为 α 的位置 OA' 处释放，秋千摆动到另一侧与竖直方向夹角为 β 的地方 OA'' ，在某次秋千释放的过程中，已知 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = \frac{3}{4}$ ，且两侧位置的高度差 MN 为0.6米，根据信息可求出秋千 OA 的长度为_____米.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查解直角三角形，掌握解直角三角形的计算是关键.

根据题意， $ON = OA' \cos \beta = \frac{4}{5}OA'$ ， $OM = OA' \cos \alpha = \frac{1}{2}OA'$ ， 由 $MN = ON - OM = 0.6$ ， 代入计算即可求解.

【详解】 解： 由题知： $OA = OA' = OA''$ ，

在 $Rt\triangle ONA''$ 中， $\tan \beta = \frac{NA''}{ON} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore$ 设 $NA'' = 3x$, $ON = 4x$ ， 则 $OA'' = \sqrt{(NA'')^2 + ON^2} = 5x$ ，

$\therefore \cos \beta = \frac{ON}{OA''} = \frac{4}{5}$ ，

$\therefore ON = OA' \cos \beta = \frac{4}{5}OA'$ ，

在 $Rt\triangle OMA'$ 中， $\cos \alpha = \frac{OM}{OA'} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore OM = OA' \cos \alpha = \frac{1}{2}OA'$ ，

$\therefore MN = ON - OM = 0.6$ ，

$\therefore ON - OM = \frac{4}{5}OA' - \frac{1}{2}OA' = 0.6$ ，

解得， $OA' = OA = 2$ ，

故答案为： 2.

17. 我们将宽和长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约为 0.618) 的矩形称为“黄金矩形”， 它可以通过折纸获得. 如图 1

所示， 将长方形纸片第一次沿 MC 折叠， 使点 N 和点 B 重合， 展开后再将纸片沿 AG 对折叠， 使点 M 和点 B 重合； 如图 2 所示， 展开后连接 AB ， 再将纸片第三次沿 AF 折叠， 使得 AB 落在长方形纸片的边上且点 B 落在点 D 处， 再次展开， 过点 D 作 MB 的垂线， 垂足为点 E . 请在阅读理解的基础上写出图中的“黄金矩形”： _____.

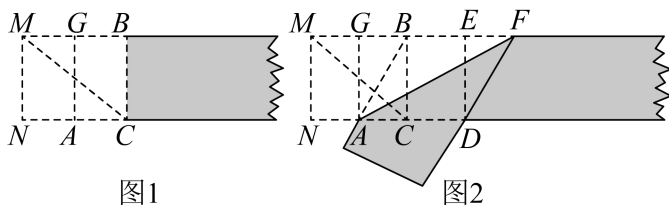


图1

图2

【答案】矩形 $BCDE$ ，矩形 $MNDE$

【解析】

【分析】由折叠可得四边形 $MNCB$ 为正方形， $MG = BG$ ，设 $MG = BG = NA = AC = 1$ ，则 $MN = NC = 2$ ，由勾股定理可得 $AB = \sqrt{5}$ ，第三次折叠可得 $AD = AB = \sqrt{5}$ ，从而 $CD = \sqrt{5} - 1$ ，进而可得 $\frac{CD}{DE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，故可得答案.

【详解】解：由第一次沿 MC 折叠可知四边形 $MNCB$ 为正方形，
则 $MB = BC = MN = NC$ ，

再将纸片沿 AG 对折，则可知 $MG = BG, NA = AC$ ，

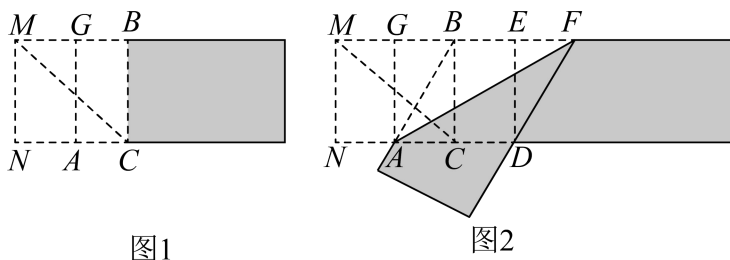


图1

图2

设 $MG = BG = NA = AC = 1$ ，则 $MN = NC = 2$ ，

连接 AB ，则 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ，

再将纸片第三次沿 AF 折叠， AB 落在长方形纸片的边上且点 B 落在点 D 处，

$$\therefore AD = AB = \sqrt{5},$$

$$\therefore CD = AD - AC = \sqrt{5} - 1,$$

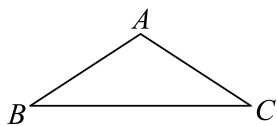
$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \frac{MN}{ND} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

即图中的“黄金矩形”为矩形 $BCDE$ ，矩形 $MNDE$ 。

故答案为：矩形 $BCDE$ ，矩形 $MNDE$ 。

【点睛】本题考查了正方形的判定，矩形的性质，轴对称的性质，勾股定理，黄金分割，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解题关键。

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, \cos C = \frac{4}{5}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$, 点 B, C 分别与点 D, E 对应, 边 AD, DE 分别与原三角形底边 BC 交于点 F, G . 当 $\triangle DFG$ 是等腰三角形时, FG 的长为_____.



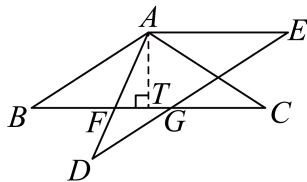
【答案】 $\frac{15}{8}$ 或 $\sqrt{10}-2$

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AT \perp BC$ 于点 T , 先解 $\triangle ABC$ 求出 $BC = 8$, 由旋转得,

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E, AB = AC = AD = AE = 5$, ①当 $DF = GF$ 时, 过点 F 作 $FH \perp AB$ 于点 H , 可得 $FB = FA$, 由 $\cos B = \cos C = \frac{BH}{BF} = \frac{4}{5}$, 求出 $BF = \frac{25}{8} = AF$, 则 $FG = FD = AD - AF = \frac{15}{8}$; ②当 $DF = GD$ 时, 设 $FG = x$, 可证明 $\triangle ABF \sim \triangle GDF \sim \triangle GCH \sim \triangle AEH$, 再由 $AB = AE$, 可得 $AF = AH$, $DF = HC$, 继而得到 $GF = GH$, 最后由 $\triangle AEH \sim \triangle GCH$ 列式计算求解即可.

【详解】 解: 过点 A 作 $AT \perp BC$ 于点 T ,



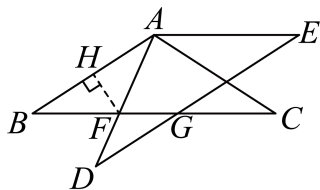
$$\because AB = AC = 5, \cos C = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BC = 2CT = 2 \times AC \times \cos C = 2 \times 5 \times \frac{4}{5} = 8, \quad \angle B = \angle C,$$

$\therefore$ 旋转,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle D = \angle E, AB = AC = AD = AE = 5,$$

①当 $DF = GF$ 时, 过点 F 作 $FH \perp AB$ 于点 H ,

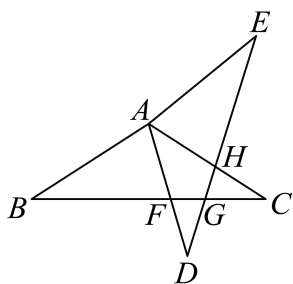


$$\therefore \angle D = \angle FGD,$$

$$\therefore \angle FGD = \angle B$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AB \parallel DE, \\
&\therefore \angle BAD = \angle D, \\
&\therefore \angle B = \angle BAD, \\
&\therefore FB = FA, \\
&\therefore FH \perp AB, \\
&\therefore BH = \frac{1}{2} AB = \frac{5}{2}, \\
&\therefore \cos B = \cos C = \frac{BH}{BF} = \frac{4}{5}, \\
&\therefore \frac{\frac{5}{2}}{BF} = \frac{4}{5}, \\
&\therefore BF = \frac{25}{8} = AF, \\
&\therefore FG = FD = AD - AF = 5 - \frac{25}{8} = \frac{15}{8};
\end{aligned}$$

②当 $DF = GD$ 时;



$$\begin{aligned}
&\therefore \angle B = \angle C = \angle D = \angle E, \quad \angle BFA = \angle DFG, \quad \angle FGD = \angle HGC \\
&\therefore \triangle BFA \sim \triangle DFG, \quad \triangle FGD \sim \triangle HGC, \\
&\therefore DF = GD \\
&\therefore BF = AB = 5, \quad CG = CH \\
&\text{设 } FG = x, \text{ 则 } CG = BC - BF - FG = 8 - 5 - x = 3 - x \\
&\therefore HC = 3 - x, \\
&\therefore AH = AC - CH = 5 - (3 - x) = 2 + x \\
&\therefore \angle E = \angle C, \angle AHE = \angle GHC \\
&\therefore \triangle AEH \sim \triangle GCH, \\
&\therefore \triangle ABF \sim \triangle AEH, \\
&\therefore AB = AE,
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AH} = 1,$$

$$\therefore AF = AH = 2 + x,$$

$$\therefore AD - AF = AC - AH,$$

$$\therefore FD = HC = 3 - x,$$

$$\because \triangle FGD \sim \triangle HGC,$$

$$\therefore \frac{FD}{HC} = \frac{FG}{HG} = 1,$$

$$\therefore FG = HG = x$$

$$\because \triangle AEH \sim \triangle GCH$$

$$\therefore \frac{AE}{CG} = \frac{AB}{CG} = \frac{AH}{HG},$$

$$\therefore \frac{5}{3-x} = \frac{2+x}{x}$$

解得: $x = \sqrt{10} - 2$ 或 $x = -\sqrt{10} - 2$ (舍)

③当 $FG = GD$ 时,

$$\because \triangle BFA \sim \triangle DFG,$$

$$\therefore AF = AB, \text{ 此时不成立,}$$

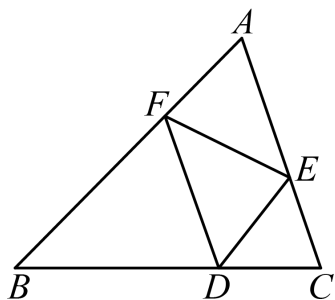
综上: $FG = \frac{15}{8}$ 或 $\sqrt{10} - 2$.

故答案为: $\sqrt{10} - 2$ 或 $\frac{15}{8}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质, 解直角三角形, 等腰三角形的性质, 旋转的性质, 难度大, 解题的关键是熟练运用相似三角形的判定与性质求解.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 分别是边 BC 、 AC 、 AB 上的点, 已知 $BD = 2CD$, 且四边形 $AEDF$ 是平行四边形. 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 分别表示下列向量:

$$\overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \overrightarrow{EF} = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 连接 BE 交 DF 于点 G ，在图中求作 $\overrightarrow{BG}$ 分别在 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向上的分向量（不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的分向量）

【答案】 (1) $\frac{2}{3}\vec{b}, -\vec{a}+\vec{b}, \frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

(2) 见详解

【解析】

【分析】 本题考查线性向量的计算和平行四边形的性质，正确掌握向量的基本运算是解题的关键.

(1) 根据平行四边形的性质和向量的和差关系即可求解；

(2) 利用平行四边形法则分解向量即可.

【小问 1 详解】

解: $\because BD = 2CD, \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$

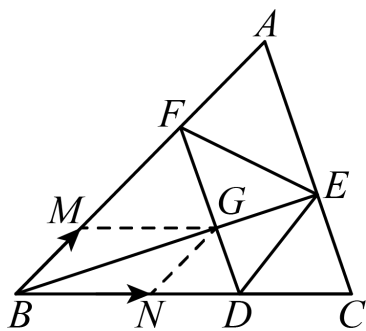
$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$\because$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(-\vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b};$$

【小问 2 详解】

解: 如图所示, $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ 即为 $\overrightarrow{BG}$ 在 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向上的分向量.



20. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表所示.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	0	m	4	4.5	4	2.5	0	...

(1) 求 m 的值和二次函数的解析式;

(2) 将该二次函数的图像上下或左右平移后得到新的抛物线, 如果新抛物线经过原点, 请直接写出三种平移的方式;

(3) 选择 (2) 中一种平移方式说明你是如何获得解题思路的.

【答案】 (1) $m = 2.5$, $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2}$

(2) 向下平移 4 个单位; 向右移 1 个单位, 下移 $\frac{9}{2}$ 个单位; 向左移 2 个单位

(3) 见详解

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式及二次函数的平移问题.

(1) 利用二次函数对称性, $x = -4$ 和 $x = 2$ 的 y 值相等, 得对称轴 $x = -1$, $x = -4$ 和 $x = 2$ 关于对称轴对称, 故 m 等于 $x = 1$ 时的 y 值, 再用交点式设解析式, 代入已知点求系数 a , 展开得一般式;

(2) 上下平移改变常数项, 左右平移改变顶点坐标, 据此得出二次函数的平移过程;

(3) 选择上下平移方式, 说明平移对解析式的影响, 再将原抛物线顶点式展开得一般式, 由上下平移改变常数项即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: 由表可知, 抛物线对称轴为 $x = \frac{-4+2}{2} = -1$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1, 4.5)$,

$\therefore x = -3$ 与 $x = 1$ 时的 y 值相等,

$\therefore m = 2.5$,

设 $y = a(x+1)^2 + 4.5$,

将 $(0, 4)$ 代入 $4 = a(0+1)^2 + 4.5$,

$$\therefore a = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2}.$$

【小问 2 详解】

解: 向下平移 4 个单位, $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$;

向右移 1 个单位, 再向下移 $\frac{9}{2}$ 个单位, $y = -\frac{1}{2}x^2$;

向左移 2 个单位, $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{9}{2}$.

【小问 3 详解】

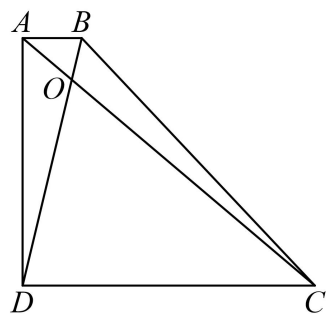
解：向下平移 4 个单位：

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4,$$

$\because$ 抛物线过原点时常数项为 0,

$\therefore$ 向下平移 4 个单位即可过 $(0,0)$.

21. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。已知 $AB = 2$ ， $AD = 8$ ， $BC = 10$ 。



(1) 求 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的面积之比；

(2) 求 $\angle DBC$ 的正弦值.

【答案】 (1) 1:16

(2) $\frac{16\sqrt{17}}{85}$

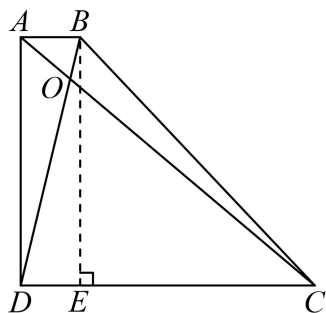
【解析】

【分析】 (1) 先证明四边形 $ABED$ 是矩形，从而可得 $DE = AB = 2$ ， $BE = AD = 8$ ，再利用勾股定理求得 CE ，从而可求得 CD ，再求得 $\frac{AB}{CD}$ ，然后证明 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ ，从而可求得 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的面积之比；

(2) 先得出 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CL = \frac{1}{2}CD \cdot BE$ ，再求得 BD ， $CD = BE = 8$ ，从而可求得 CL ，再求得 $\sin \angle DBC$ 即可.

【小问 1 详解】

解：作 $BE \perp CD$ 于点 E ，则 $\angle BED = \angle BEC = 90^\circ$ ，



$$\because AB \parallel CD, \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形,

$$\therefore DE = AB = 2, \quad BE = AD = 8,$$

$$\because BC = 10,$$

$$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore CD = CE + DE = 6 + 2 = 8,$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\because AB \parallel CD,$$

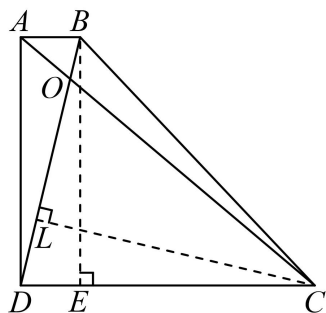
$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$\therefore \triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的面积之比为 $1:16$;

【小问 2 详解】

解: 作 $CL \perp BD$ 于点 L , 则 $\angle BLC = 90^\circ$,



$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CL = \frac{1}{2} CD \cdot BE,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17},$$

又由 (1) 得 $CD = BE = 8$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{17} \cdot CL = \frac{1}{2} \times 8 \times 8,$$

$$\therefore CL = \frac{32\sqrt{17}}{17},$$

$$\therefore \sin \angle DBC = \frac{CL}{BC} = \frac{\frac{32\sqrt{17}}{17}}{10} = \frac{16\sqrt{17}}{85},$$

$$\therefore \angle DBC \text{ 的正弦值为 } \frac{16\sqrt{17}}{85}.$$

【点睛】本题考查了几何问题(一元一次方程的应用), 用勾股定理解三角形, 根据矩形的性质与判定求线段长, 利用相似三角形的性质求解, 解直角三角形的相关计算等知识点, 解题关键是掌握上述知识点并能运用来求解.

22. 某餐厅在门外走廊安装了遮阳棚, 通过实地测得相关数据, 并画出了侧面示意图 (如图 1), 遮阳棚 AB 长为 3.9m, 其与墙面的夹角为 α ($\cos \alpha = \frac{5}{13}$), 靠墙端离地面高 AD 为 5m.

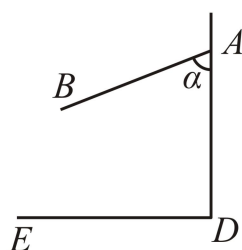


图1

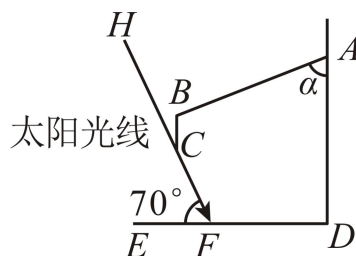


图2

- (1) 求出遮阳棚前端 B 到墙面 AD 的距离;
- (2) 到了旺季客流激增, 走廊也要摆放餐桌加大供应量. 为了加强遮阳效果, 要在遮阳棚前端加装一块挡板 BC (竖直方向), 示意图如图 2 所示, 已知旺季当地正午的太阳高度角 (太阳光线与地面夹角) 为 70° , 为了走廊用餐的顾客不受阳光照射, 走廊的遮阳宽度 DF 至少要 2.6m. 根据以上信息, 请你计算挡板 BC 至少要多长才能确保遮阳效果. (结果精确到 0.01m, 参考数据: $\sin 70^\circ \approx 0.940$, $\cos 70^\circ \approx 0.342$, $\tan 70^\circ \approx 2.747$)

【答案】(1) 3.6 米

(2) 0.75 米

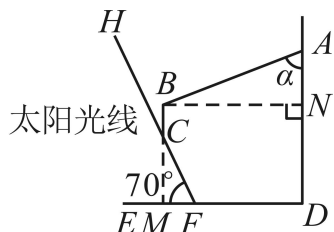
【解析】

【分析】(1) 过点 B 作 $BN \perp AD$ ，先利用余弦求得 $AN = 1.5$ ，再利用勾股定理求得 BN 即可；

(2) 先证明四边形 $BNDM$ 是矩形，从而可得 $MD = BN = 3.6$ ，进而可求得 ND ，根据走廊的遮阳宽度 DF 至少要 2.6m ，可求得 MF ，再利用正切求得 CM ，从而可求得 BC 。

【小问 1 详解】

解：如图所示：过点 B 作 $BN \perp AD$ ，



$$\because \cos \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{AN}{AB}, \quad AB = 3.9\text{m},$$

$$\therefore \frac{5}{13} = \frac{AN}{3.9},$$

$$\therefore AN = 1.5,$$

$$\therefore BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{3.9^2 - 1.5^2} = \sqrt{0.3^2 \times (13^2 - 5^2)} = 0.3 \times 12 = 3.6,$$

$\therefore$ 遮阳棚前端 B 到墙面 AD 的距离为 3.6 米；

【小问 2 详解】

解：如图，延长 BC 交 DE 于点 M ，则 $BM \perp DE$ ，

$$\therefore \angle BMD = 90^\circ,$$

又 $BN \perp AD$ ， $AD \perp DE$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle BND = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BMD = \angle ADE = \angle BND = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BNDM$ 是矩形，

$$\therefore MD = BN = 3.6,$$

又 $AD = 5$ ，由 (1) 得 $AN = 1.5$ ，

$$\therefore HD = AD - AN = 5 - 1.5 = 3.5,$$

又走廊的遮阳宽度 DF 至少要 2.6m ，

$$\therefore MF = MD - FD = 3.6 - 2.6 = 1,$$

$$\text{又 } \tan \angle CFM = \frac{CM}{MF},$$

$$\therefore \tan 70^\circ = \frac{CM}{1},$$

$$\therefore CM = \tan 70^\circ \approx 2.747,$$

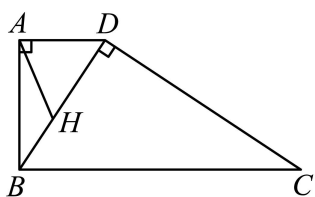
$$\therefore BC = ND - CM = 3.5 - 2.747 \approx 0.75,$$

$\therefore$ 挡板 BC 至少要 0.75 米长才能确保遮阳效果.

【点睛】 本题考查了用勾股定理解三角形，根据矩形的性质与判定求线段长，解直角三角形的相关计算等知识点，解题关键是掌握上述知识点并能运用来求解.

23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $CD \perp BD$ ， $BD^2 = AD \cdot BC$ ，点 H 在边 BD 上，且

$$\angle DBC = \angle C + \angle BAH.$$



(1) 求证: $AH = AD$;

(2) 过点 B 作射线 BE 交边 CD 于点 F ，交 AD 的延长线于点 E 。若 $\angle DBE = \angle ABD$ ，求证:

$$BD \cdot DE = EF \cdot CD.$$

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，等角对等边，熟知相似三角形的性质与判定定理是解题的关键.

(1) 可证明 $\angle BAD = \angle BDC = 90^\circ$ ，则可证明 $\triangle BAD \sim \triangle CDB$ ，得到 $\angle DBC = \angle ADB$ ， $\angle C = \angle ABD$ ，可证明 $\angle AHD = \angle DBC = \angle ADH$ ，则可证明 $AH = AD$ ；

(2) 证明 $AE \parallel BC$ ，则可证明 $\triangle DEF \sim \triangle CBF$ ，推出 $\frac{DE}{EF} = \frac{BC}{BF}$ ，证明 $\triangle BDF \sim \triangle CDB$ ，得到

$$\frac{BC}{BF} = \frac{CD}{BD}, \text{ 则 } \frac{DE}{EF} = \frac{CD}{BD}, \text{ 即可证明 } BD \cdot DE = EF \cdot CD.$$

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAD = 90^\circ$ ， $CD \perp BD$ ，

$$\therefore \angle BAD = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\because BD^2 = AD \cdot BC, \text{ 即 } \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ADB, \quad \angle C = \angle ABD,$$

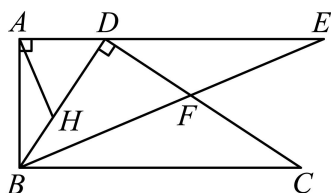
$$\therefore \angle DBC = \angle C + \angle BAH, \angle AHD = \angle ABH + \angle BAH,$$

$$\therefore \angle AHD = \angle DBC = \angle ADH,$$

$$\therefore AH = AD;$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，



由 (1) 知 $\angle DBC = \angle ADB$

$$\therefore AE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{EF}{BF},$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{BC}{BF},$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABD, \quad \angle C = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle C,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle CDB,$$

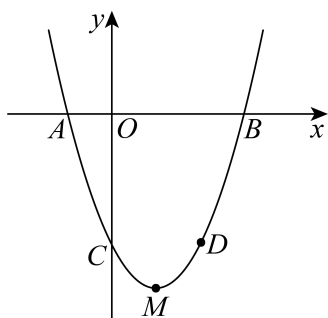
$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{BC}{BF} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{CD}{BD}$$

$$\therefore BD \cdot DE = EF \cdot CD.$$

24. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C 。已知 $A(-2, 0)$ 、 $D(4, -6)$ 。



(1) 求抛物线的表达式及顶点 M 的坐标;

(2) 将抛物线向上平移, 设点 D 的对应点为点 E , 射线 BE 交线段 AD 于点 F .

①如果 AD 恰好平分 $\angle CAE$, 求平移之后的抛物线的表达式;

②如果 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABD$ 相似, 求平移的距离.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$, 顶点 $M(2, -8)$

(2) ① $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$; ② $DE = \frac{16}{3}$ 或 5

【解析】

【分析】 (1) 将点 $A(-2, 0), D(4, -6)$ 代入抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, 求出 b, c , 进而再求顶点坐标即可;

(2) ①由题易得 $CD \parallel x$ 轴, $\angle ADC = 45^\circ$, 证 $\triangle ACD \cong \triangle AED$, 可得 $DE = CD = 4$, 即可得解;

②设抛物线向上平移了 t 个单位, 则 $E(4, -6+t)$, 先求出 $B(6, 0)$, 直线 AD 表达式, 直线 BE 表达式, 联

立求出点 F , 则 $AB = 8, AD = 6\sqrt{2}, DE = t, DF = \frac{2\sqrt{2}t}{8-t}$, 分两种情况讨论: 当 $\triangle ABD \sim \triangle DFE$ 时, 当

$\triangle ABD \sim \triangle DEF$ 时, 然后分类求解即可.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(-2, 0), D(4, -6)$ 代入抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times 4 - 2b + c = 0 \\ \frac{1}{2} \times 16 + 4b + c = -6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 2$,

当 $x = 2$ 时, $y = \frac{1}{2} \times 4 - 4 - 6 = -8$,

$\therefore$ 顶点 $M(2, -8)$;

【小问 2 详解】

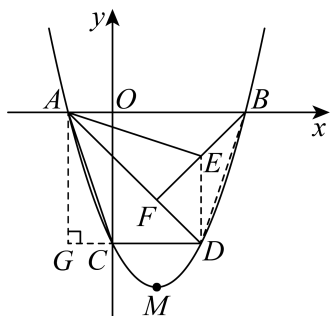
解: ①对于抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$, 令 $x = 0$, 得 $y = -6$,

$\therefore C(0, -6)$,

$$\therefore D(4, -6),$$

则 $CD \parallel x$ 轴, 且 $CD = 4$,

过 A 作 $AG \perp DC$, 交 DC 延长线于点 G ,



$$\therefore A(-2, 0), D(4, -6),$$

$$\therefore AG = DG = 6,$$

$$\therefore \angle ADG = 45^\circ,$$

由题可知点 D 向上平移到点 E ,

则 $DE \parallel y$ 轴, 即 $DE \perp CD$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle ADC = 45^\circ,$$

$\therefore AD$ 平分 $\angle CAE$,

$$\therefore \angle CAD = \angle EAD,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle EAD \\ AD = AD \\ \angle ADC = \angle ADE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED (ASA),$$

$$\therefore CD = DE = 4,$$

$\therefore$ 点 D 向上平移 4 个单位到点 E , 即抛物线向上平移 4 个单位,

$$\therefore \text{平移之后的抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 + 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2;$$

②解: 设抛物线向上平移了 t 个单位,

$$\therefore E(4, -6 + t),$$

$$\text{令 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0, \text{ 得 } x = -2 \text{ 或 } 6,$$

$$\therefore B(6, 0),$$

设直线 AD 的表达式为 $y = mx + n$,

代入 $A(-2, 0), D(4, -6)$ 可得 $\begin{cases} 0 = -2m + n \\ -6 = 4m + n \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}$,

故直线 AD 的表达式为 $y = -x - 2$,

设直线 BE 的表达式为 $y = cx + d$,

代入 $B(6, 0), E(4, -6+t)$ 可得 $\begin{cases} 0 = 6c + d \\ -6+t = 4c + d \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} c = \frac{6-t}{2} \\ n = 3t-18 \end{cases}$,

故直线 BE 的表达式为 $y = \frac{6-t}{2}(x-6)$,

联立 $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = \frac{6-t}{2}(x-6) \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = \frac{32-6t}{8-t} \\ y = \frac{-48+8t}{8-t} \end{cases}$,

即 $F\left(\frac{32-6t}{8-t}, \frac{-48+8t}{8-t}\right)$,

$$\therefore AB = 8, AD = \sqrt{(-2-4)^2 + (0+6)^2} = 6\sqrt{2}, DE = t, DF = \sqrt{\left(4 - \frac{32-6t}{8-t}\right)^2 + \left(-6 - \frac{-48+8t}{8-t}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}t}{8-t},$$

$\therefore \angle ADG = \angle DAG = 45^\circ$, $DE \parallel y$ 轴, $CD \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle FDE = \angle BAD = 45^\circ$,

$\therefore$ 分两种情况讨论:

当 $\triangle ABD \sim \triangle DFE$ 时,

$$\text{则 } \frac{AB}{DF} = \frac{AD}{DE}, \text{ 即 } \frac{8}{\frac{2\sqrt{2}t}{8-t}} = \frac{6\sqrt{2}}{t},$$

解得 $t = 5$;

当 $\triangle ABD \sim \triangle DEF$ 时,

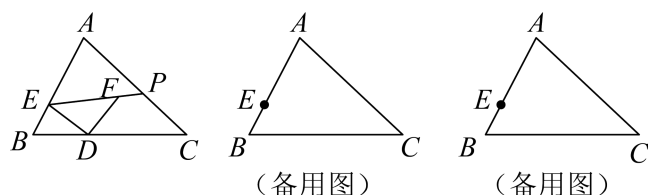
$$\text{则 } \frac{AB}{DE} = \frac{AD}{DF}, \text{ 即 } \frac{8}{t} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}t}{8-t}},$$

解得 $t = \frac{16}{3}$;

综上, 平移的距离为 5 或 $\frac{16}{3}$ 个单位.

【点睛】 本题主要考查了抛物线解析式、抛物线的几何变换、全等三角形的判定和性质、相似三角形的性质等内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 4\sqrt{2}$, $BC = 6$, $\angle C = 45^\circ$, 点 E 在边 AB 上且 $AE = 2BE$, 点 D 是边 BC 上的动点, 以 D 为直角顶点; DE 为腰在其右侧作等腰直角三角形 DEF , 射线 EF 与边 AC 交于点 P .



- (1) 当 $EF \parallel BC$ 时, 求 $\triangle DEF$ 的面积;
- (2) 当点 F 落在 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界) 时, 求 BD 的取值范围;
- (3) 连接 CF , 如果 $\triangle DFC$ 是直角三角形, 请直接写出 DP 的长.

【答案】 (1) $\frac{16}{9}$

(2) $\frac{22}{15} \leq BD < \frac{8}{3}$

(3) $DP = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ 或 $3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{26}}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形, 得出 $\angle DFE = \angle DEF = 45^\circ$, $DE = DF$, $\angle EDF = 90^\circ$, 根据 $EF \parallel BC$, 得出 $\angle BDE = \angle DEF = 45^\circ$, 结合 $\angle C = 45^\circ$, 得 $\angle C = \angle BDE = 45^\circ$, 则 $DE \parallel AC$, 证出 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$, 则 $\frac{BE}{BA} = \frac{ED}{AC}$, 结合 $AC = 4\sqrt{2}$, $BC = 6$, $AE = 2BE$, 即可求出 $ED = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 即可解答;

(2) 由题知: P 不可能在 AB 上, P 可能在 AC, BC 上;

当 P 在 AC 上且与 F 重合时, 如图所示: 过点 A 作 $AH \perp BC$, 过点 E 作 $EN \perp BC$, 过点 F 作 $FM \perp BC$, 则 $\angle C = \angle CAH = 45^\circ$, 得出 $AH = CH = 4$, $BH = 2$, 勾股定理求出 $AB = 2\sqrt{5}$, 则

$\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{EN}{BN} = 2$, 结合 $AE = 2BE$, 求出 $BE = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, 证明 $\triangle BEN \sim \triangle BAH$, 求出

$BN = \frac{1}{3}BH = \frac{2}{3}, EN = \frac{1}{3}AH = \frac{4}{3}$, 证明 $\triangle END \cong \triangle DMF$, 得出 $DM = EN = \frac{4}{3}$, $ND = FM = CM$,

则 $ND = CM = 2$, 此时 $BD = \frac{8}{3}$, 当 P 在 BC 上且与 C 重合时, 如图所示: 由上得 $AB = 2\sqrt{5}$,

$BN = \frac{2}{3}, EN = DM = \frac{4}{3}$, 设 $ND = n$, 则 $FM = n$, 则 $MC = 4 - n$, 根据 $\frac{EN}{NC} = \frac{FM}{MC}$, 求出 $n = \frac{4}{5}$, 此

时 $BD = \frac{22}{15}$, 根据 F 落在 ABC 内部 (不含边界), 即可求解;

(3) 当 $\angle DCF = 90^\circ$ 时, 如图所示: 由上得 $BN = \frac{2}{3}, EN = DC = \frac{4}{3}$, 则 $ND = CF = 4$, $ED = \frac{4}{3}\sqrt{10}$,

证明 $\triangle PSF \sim \triangle DSC$, 则 $\frac{PS}{DS} = \frac{SF}{CS}$, 证明 $\triangle PSD \sim \triangle FSC$, 则 $\angle PDF = \angle FCP = 45^\circ$,

$\angle EDP = \angle DEP = 45^\circ$, 得出 $EP = DP$, $\angle EPD = 90^\circ$, 则 $DP = \frac{\sqrt{2}}{2}DE = \frac{4\sqrt{5}}{3}$, 当 $\angle DFC = 90^\circ$ 时,

如图所示: 由上得 $BN = \frac{2}{3}, EN = DM = \frac{4}{3}$, 设 $ND = m$, 则 $FM = m, MC = 4 - m$, 证明 $\triangle CMF \sim \triangle FMD$,

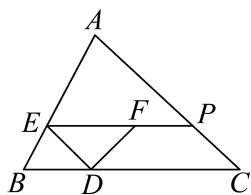
得出 $FM^2 = DM \cdot CM$, 列方程 $m^2 = \frac{4}{3}(4 - m)$, 求出 $m = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{3}$, 即可得 ND , CD 的长, 由题知:

$\angle PFD = 135^\circ, \angle PCD = 45^\circ$, 则 P, F, D, C 四点共圆, 得出 $\angle PFC = \angle PDC = 45^\circ$, 求出

$DP = \frac{\sqrt{2}}{2}CD = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{26}}{3}$; 当 $\angle FDC = 90^\circ$ 时, 不符合;

【小问 1 详解】

解: 如图所示:



$\because \triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DFE = \angle DEF = 45^\circ, DE = DF, \angle EDF = 90^\circ$,

$\because EF \parallel BC$,

$\therefore \angle BDE = \angle DEF = 45^\circ$,

$\because \angle C = 45^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle BDE = 45^\circ$,

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BE}{BA} = \frac{ED}{AC},$$

$$\because AC = 4\sqrt{2}, BC = 6, AE = 2BE,$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{ED}{4\sqrt{2}},$$

$$\therefore ED = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}ED^2 = \frac{1}{2} \times \frac{32}{9} = \frac{16}{9};$$

【小问 2 详解】

解：由题知：P 不可能在 AB 上，

$\therefore$ P 可能在 AC, BC 上；

当 P 在 AC 上且与 F 重合时，

如图所示：过点 A 作 $AH \perp BC$ ，过点 E 作 $EN \perp BC$ ，过点 F 作 $FM \perp BC$ ，

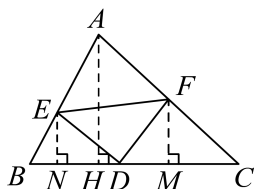
$$\because \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle CAH = 45^\circ,$$

$$\therefore AH = CH = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sqrt{2} = 4,$$

$$\therefore BH = BC - CH = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$



$$\therefore \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{EN}{BN} = 2,$$

$$\therefore AE = 2BE,$$

$$\therefore BE = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore EN \parallel AH,$$

$$\therefore \triangle BEN \sim \triangle BAH,$$

$$\therefore \frac{AH}{EN} = \frac{AB}{BE} = \frac{BH}{BN} = 3,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{3}BH = \frac{2}{3}, EN = \frac{1}{3}AH = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \angle END = \angle FMD = 90^\circ, \angle EDN = \angle DFM = 90^\circ - \angle FDM, DE = DF,$$

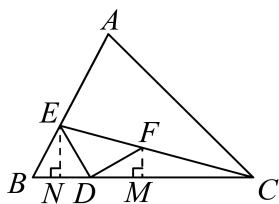
$$\therefore \triangle END \cong \triangle DMF (AAS),$$

$$\therefore DM = EN = \frac{4}{3}, ND = FM = CM,$$

$$\therefore ND = CM = \left(6 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) \div 2 = 2,$$

$$\text{此时 } BD = \frac{8}{3},$$

当 P 在 BC 上且与 C 重合时, 如图所示: 由上得 $AB = 2\sqrt{5}$,



$$\therefore BN = \frac{2}{3}, EN = DM = \frac{4}{3},$$

设 $ND = n$, 则 $FM = n$,

$$\therefore MC = 6 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - n = 4 - n,$$

$$\therefore \frac{EN}{NC} = \frac{FM}{MC},$$

$$\therefore \frac{\frac{4}{3}}{6 - \frac{2}{3}} = \frac{n}{4 - n},$$

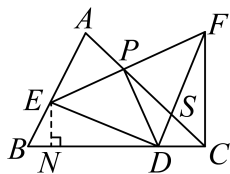
$$\therefore n = \frac{4}{5},$$

$$\text{此时 } BD = \frac{22}{15},$$

$\because F$ 落在 ABC 内部 (不含边界), $\therefore \frac{22}{15} \leq BD < \frac{8}{3}$;

【小问 3 详解】

解: 当 $\angle DCF = 90^\circ$ 时, 如图所示:



由上得 $BN = \frac{2}{3}$, $EN = DC = \frac{4}{3}$,

$\therefore ND = CF = 4$,

$\therefore ED = \sqrt{EN^2 + DN^2} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$,

由题知: $\angle DEF = \angle EFD = \angle ACB = \angle FCA = 45^\circ$,

$\therefore \angle PSF = \angle DSC$,

$\therefore \triangle PSF \sim \triangle DSC$,

$\therefore \frac{PS}{DS} = \frac{SF}{CS}$,

$\therefore \angle PSD = \angle CSF$,

$\therefore \triangle PSD \sim \triangle FSC$,

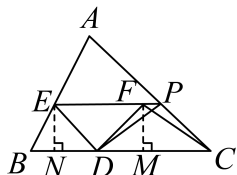
$\therefore \angle PDF = \angle FCP = 45^\circ$,

$\therefore \angle EDP = \angle DEP = 45^\circ$,

$\therefore EP = DP$, $\angle EPD = 90^\circ$,

$\therefore DP = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{3} \sqrt{10} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$,

当 $\angle DFC = 90^\circ$ 时, 如图所示:



由上得 $BN = \frac{2}{3}$, $EN = DM = \frac{4}{3}$,

设 $ND = m$, 则 $FM = m$, $MC = 4 - m$,

$\therefore \angle DFC = \angle FMD = \angle FMC = 90^\circ$, $\angle CFM = \angle FDM = 90^\circ - \angle DFM$,

$$\therefore \triangle CMF \sim \triangle FMD,$$

$$\therefore \frac{FM}{DM} = \frac{CM}{FM},$$

$$\therefore FM^2 = DM \cdot CM,$$

$$\therefore m^2 = \frac{4}{3}(4-m),$$

$$\therefore m = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{3},$$

$$\therefore ND = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3},$$

$$\therefore CD = 6 - BN - DN = 6 - \frac{2\sqrt{13}}{3},$$

由题知: $\angle PFD = 135^\circ, \angle PCD = 45^\circ$,

$\therefore P, F, D, C$ 四点共圆,

$$\therefore \angle PFC = 180^\circ - \angle EFD - \angle DFC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PFC = \angle PDC = 45^\circ,$$

$$\therefore DP = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(6 - \frac{2\sqrt{13}}{3} \right) = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{26}}{3},$$

当 $\angle FDC = 90^\circ$ 时, 不符合;

$$\text{综上: } DP = \frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ 或 } 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{26}}{3}.$$

【点睛】该题考查了相似三角形的性质和判定, 解直角三角形, 圆周角定理, 四点共圆, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质和判定等知识点, 解题的关键是掌握以上知识点, 利用分类讨论思想解答.

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺: 优尖升教育

客服微信: DEM2008

淘宝店铺网址: shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫