

2025-2026 学年第一学期九年级质量调研

数学样卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列 y 关于 x 的函数中二次函数是 ()

A. $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = (x-2)^2 - x^2$

D. $y = 3x - 9$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查二次函数的概念, 熟练掌握二次项系数不为零, 最高次项的次数是 2 是解题的关键. 形如 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的函数即为二次函数, 据此进行判断即可.

【详解】解: A. $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 符合二次函数定义, 则 A 符合题意;

B. $y = \frac{2}{x}$ 不是二次函数, 则 B 不符合题意;

C. $y = (x-2)^2 - x^2 = -4x + 4$, 最高次项系数不是 2, 故不是二次函数, 则 C 不符合题意;

D. $y = 3x - 9$ 最高次项系数不是 2, 故不是二次函数, 则 D 不符合题意;

故选: A.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 2$, 那么下列各式中正确的是 ()

A. $\tan A = \frac{1}{2}$

B. $\cot A = \frac{1}{2}$

C. $\sin A = \frac{1}{2}$

D. $\cos A = \frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了锐角三角函数，勾股定理，利用勾股定理求出 AC 的长，再根据正切，余切，正弦和余弦的定义求解即可.

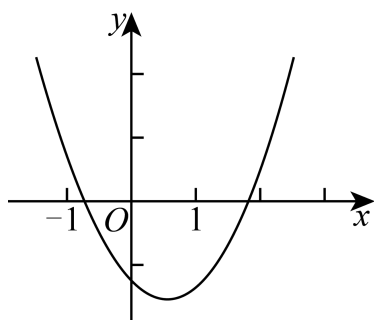
【详解】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 2$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故选：C.

3. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 如图所示，那么下列各式中不成立的是 ()



A. $a > 0$

B. $b > 0$

C. $c < 0$

D. $a + b + c < 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象与系数的关系. 根据对称轴和函数图像判断 a 、 b 、 c 的符号是解题的关键.

由抛物线的开口方向判断 a 的大小，由抛物线与 y 轴的交点判断 c 的大小，根据对称轴与 x 轴交点情况、抛物线与 x 轴交点情况进行推理，进而对所得结论进行判断.

【详解】解：A. $\because$ 抛物线开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

$\therefore$ A 成立，不符合题意；

$$\text{B. } \because \text{抛物线的对称轴, } -\frac{b}{2a} > 0, a > 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

$\therefore$ B 不成立，符合题意；

C. $\because$ 抛物线交 y 轴负半轴，

$$\therefore c < 0,$$

$\therefore$ C 成立，不符合题意；

D. 由图象知: 当 $x=1$ 时, $y=a+b+c<0$,

$\therefore$ D 成立, 不符合题意.

故选: B.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 、 N 分别是边 AB 、 AC 上的点, 那么下列条件中不能推得 $MN \parallel BC$ 的是 ()

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$ B. $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ C. $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$ D. $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的性质与判定, 平行线的判定, 根据 $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$ 可推出 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, 则可证明 $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ 得到 $\angle AMN = \angle B$, 据此可判断 A; 根据 $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ 和 $\angle A = \angle A$ 可证明 $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ 得到 $\angle AMN = \angle B$, 据此可判断 B; 同理可判断 C; 由 $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ 无法证明 $MN \parallel BC$, 可判断 D.

【详解】解: A、 $\because \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$,

$\therefore$ 可设 $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$,

$\therefore BM = kAM, CN = kAN$,

$\therefore AB = AM + BM = (1+k)AM, AC = AN + CN = (1+k)AN$

$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{1}{1+k} = \frac{AN}{AC}$,

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABC$,

$\therefore \angle AMN = \angle B$,

$\therefore MN \parallel BC$, 故 A 选项不符合题意,

B、 $\because \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}, \angle A = \angle A$

$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABC$,

$\therefore \angle AMN = \angle B$,

$\therefore MN \parallel BC$, 故 B 选项不符合题意,

C、同理由 $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$ 可得 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$,

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABC$,

$\therefore \angle AMN = \angle B$,

$\therefore MN \parallel BC$, 故 C 选项不符合题意,

D、由 $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ 无法证明 $MN \parallel BC$, 故 D 选项符合题意;

故选: D.

5. 下列说法中不正确的是 ()

A. 如果 k 是一个实数, $\vec{a}$ 是向量, 那么 $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相同:

B. 如果 $\vec{b}$ 与非零 $\vec{a}$ 平行, 那么存在唯一的实数 m , 使 $\vec{b} = m\vec{a}$:

C. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$;

D. 如果 m, n 是实数, 那么 $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了向量的相关知识, 当 $k < 0$ 时, $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反, 据此可判断 A; $\vec{b}$ 与非零 $\vec{a}$ 平行, 若它们的方向相同, 则 m 等于 $\vec{b}$ 的模长除以 $\vec{a}$ 的模长, 若方向相反, 则 m 等于 $\vec{b}$ 的模长除以 $\vec{a}$ 的模长的相反数, 据此可判断 B; 单位向量的模长为 1, 据此可判断 C; 根据向量与实数的运算法则可判断 D.

【详解】解: A、如果 k 是一个实数, $\vec{a}$ 是向量, 那么当 $k < 0$ 时, $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反, 原说法错误, 符合题意;

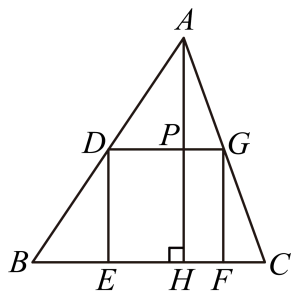
B、如果向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 平行, 那么存在唯一的实数 m , 使 $\vec{b} = m\vec{a}$, 原说法正确, 不符合题意;

C、如果 $\vec{e}$ 是单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$, 原说法正确, 不符合题意;

D、如果 m, n 是实数, 那么 $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, 原说法正确, 不符合题意;

故选: A.

6. 如图, 正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 D, G 分别在边 AB, AC 上, 作 $AH \perp BC$ 于 H , 交 DG 于 P , 已知 $BC = AH$. 下列结论中不正确的是 ()



A. $\triangle ABC \sim \triangle ADG$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AH}$ C. $S_{\triangle ADG} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABC}$ D. $AP = PH$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，正方形的性质，平行四边形的判定与性质，根据正方形的性质得出 $DG \parallel BC$ ， $DG = DE$ ， $\angle DEF = \angle GDE = 90^\circ$ ，则可证明 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质得出 $\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AH} = \frac{DG}{BC}$ ，结合 $BC = AH$ ，可得 $AP = DG = DE$ ，证明四边形 $DEHP$ 是平行四边形，

得出 $DE = PH = AP$ ，然后根据相似三角形的性质可得出 $\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AP}{AH}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，即可判断。

【详解】解：∵ 四边形 $DEFG$ 是正方形，

∴ $DG \parallel BC$ ， $DG = DE$ ， $\angle DEF = \angle GDE = 90^\circ$ ，

∴ $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，即 $\triangle ABC \sim \triangle ADG$ ，故选项 A 正确；

∵ $DG \parallel BC$ ， $AH \perp BC$

∴ $AH \perp DG$ ，

∴ $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，

∴ $\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AH} = \frac{DG}{BC}$ ，故选项 B 正确；

∵ $BC = AH$ ，

∴ $AP = DG = DE$ ，

∵ $AH \perp DG$ ， $\angle DEF = 90^\circ$ ，

∴ $DE \parallel AH$ ，

又 $DG \parallel BC$ ，

∴ 四边形 $DEHP$ 是平行四边形，

∴ $DE = PH$ ，

∴ $AP = PH$ ，故选项 D 正确；

∴ $\frac{AP}{AH} = \frac{1}{2}$ ，

∴ $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，

∴ $\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AP}{AH}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，

∴ $S_{\triangle ADG} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$ ，故选项 C 错误，

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ ，那么 $\frac{x+y}{y} =$ _____.

【答案】 $\frac{7}{2}$ 3.5

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的性质，掌握内项之积等于外项之积成为解题的关键.

依据 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ 可得 $x = \frac{5}{2}y$ ，再代入代数式化简即可.

【详解】 解： $\because \frac{x}{y} = \frac{5}{2}$,

$$\therefore x = \frac{5}{2}y,$$

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{\frac{5}{2}y+y}{y} = \frac{\frac{7}{2}y}{y} = \frac{7}{2}.$$

故答案为： $\frac{7}{2}$.

8. 已知抛物线 $y = (m+1)x^2 + 4x - 4$ 有最高点，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的图象与性质，抛物线有最高点，则抛物线开口向下，故二次项系数小于零，即 $m+1 < 0$ ，据此可得答案.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = (m+1)x^2 + 4x - 4$ 有最高点，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$$\therefore m+1 < 0,$$

$$\therefore m < -1,$$

故答案为： $m < -1$.

9. 二次函数 $y = 3x^2 - 2x + 1$ 的图象在其对称轴右侧的部分是_____的（填“上升”或“下降”）.

【答案】 上升

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的增减性，根据解析式可知函数图象开口向上，则在对称轴右侧 y 随 x 的

增大而增大，据此可得答案.

【详解】解：∵二次函数解析式为 $y = 3x^2 - 2x + 1$ ， $a = 3 > 0$ ，

∴二次函数图象开口向上，

∴在对称轴右侧， y 随 x 的增大而增大，二次函数 $y = 3x^2 - 2x + 1$ 的图象在其对称轴右侧的部分是上升的.

故答案为：上升

10. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像经过 $(-1, 1)$ 和 $(3, 1)$ ，那么此二次函数图像的对称轴为直线_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】本题考查求二次函数的对称轴，由题意得，点 $(-1, 1)$ 和 $(3, 1)$ 是对称点，根据二次函数对称的性质求解即可.

【详解】解：由题意得，点 $(-1, 1)$ 和 $(3, 1)$ 关于对称轴对称，

∴二次函数图像的对称轴为直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ，

故答案为： $x = 1$.

11. 把一个三角形放大为与它相似的三角形，如果它的面积扩大为原来的 9 倍，那么它的周长扩大为原来的____倍.

【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的性质，理解并掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键. 根据题意，由相似三角形的面积比等于相似比的平方，周长比等于相似比即可求解.

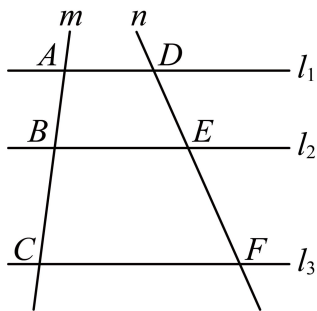
【详解】解：三角形放大为与它相似的三角形，如果它的面积扩大为原来的 9 倍，

∴相似比为 $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ，

∴周长扩大为原来的 3 倍，

故答案为： 3 .

12. 如图，已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别与直线 m 交于点 A 、 B 、 C ，与直线 n 交于点 D 、 E 、 F ，如果 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $3AB = 2BC$ ， $DE = 6$ ，那么 $DF =$ _____.



【答案】 15

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例，掌握平行线分线段成比例的计算方法，找准线段的比是解题的关键. 根据 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $3AB = 2BC$ ，得到 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3}$ ，结合已知求出 EF 的长度，即可求解.

【详解】 解： $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\because 3AB = 2BC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\because DE = 6,$$

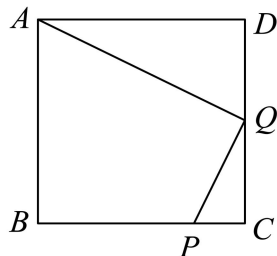
$$\therefore \frac{6}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EF = 9,$$

$$\therefore DF = DE + EF = 15,$$

故答案为：15.

13. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 边 BC 上一点，且 $BP = 3\sqrt{2}$ ， $PC = \sqrt{2}$ ，点 Q 是边 DC 的中点，那么 $\frac{AQ}{QP}$ 的值为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定与性质等，根据 $BP = 3\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{2}$ 和 Q 是 CD 的

中点，可以求得 $\frac{CP}{DQ} = \frac{CQ}{AD}$ ，即可求证 $\triangle ADQ \sim \triangle QCP$ ，所以根据该相似三角形的对应边成比例得到

$$\frac{AQ}{QP} = \frac{AD}{QC} = \frac{AD}{\frac{1}{2}AD} = 2.$$

【详解】 解：在正方形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = AD$ ， $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，

$$\because BP = 3\sqrt{2}, PC = \sqrt{2},$$

$$\therefore BP = 3PC,$$

$$\therefore BC = CD = AD = 4CP,$$

又 Q 是 CD 的中点，

$$\therefore CQ = DQ = 2CP,$$

$$\therefore \frac{CP}{DQ} = \frac{CQ}{AD} = \frac{1}{2}.$$

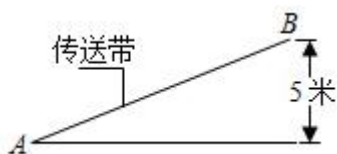
$$\text{又} \because \angle ADQ = \angle QCP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADQ \sim \triangle QCP,$$

$$\therefore \frac{AQ}{QP} = \frac{AD}{QC} = \frac{AD}{\frac{1}{2}AD} = 2,$$

故答案为： 2 .

14. 如图，某传送带与地面所成斜坡的坡度为 $i = 1:2.4$ ，它把物品从地面 A 送到离地面 5 米高的 B 处，则物体从 A 到 B 所经过的路程为_____.

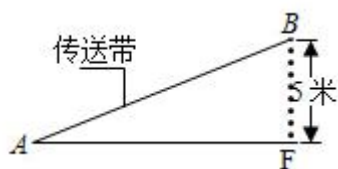


【答案】 13m##13 米

【解析】

【分析】 根据坡度的概念求出 AF ，然后根据勾股定理计算即可.

【详解】 解：如图，过 B 作 $BF \perp AF$ 于 F ，



由题意得， $BF = 5$ 米，

$\therefore$ 斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$ ，

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{1}{2.4}, \text{ 即 } \frac{5}{AF} = \frac{1}{2.4},$$

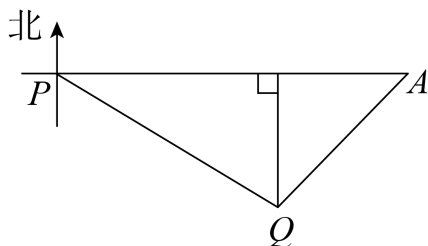
解得： $AF = 12$ (米)，

由勾股定理得， $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (米)。

故答案是：13 米。

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形、坡比的计算、勾股定理等知识点，将坡度问题转化为解直角三角形的问题成为解答本题的关键。

15. 如图，在港口 P 的南偏东 60° 方向有一座小岛 Q ，一艘船从港口 P 出发沿正东方向行驶 24 海里后到达 A 处，在 A 处测得小岛 Q 恰在其西南方向，那么小岛 Q 与港口 P 相距_____海里。（结果保留根号）



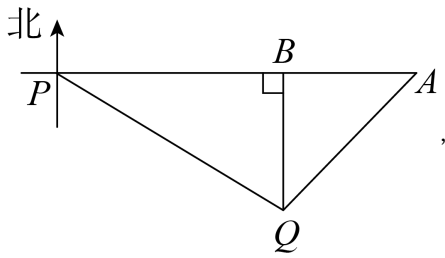
【答案】 $(24\sqrt{3} - 24)$

【解析】

【分析】 本题考查的是解直角三角形的应用-方向角问题，正确标注方向角、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键。过 Q 作 $QB \perp PA$ 于 B ，在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 和 $\text{Rt}\triangle PBQ$ 中，根据正切的定义可得出 $AB = BQ$ ，

$PB = \sqrt{3}BQ$ ，结合 $AP = AB + PB = 24$ ，可求出 $BQ = 12\sqrt{3} - 12$ ，然后根据含 30° 的直角三角形的性质求解即可。

【详解】 解：过 Q 作 $QB \perp PA$ 于 B ，



根据题意，得 $\angle QPB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 中， $\tan A = \frac{BQ}{AB}$ ，

$$\therefore \tan 45^\circ = 1 = \frac{BQ}{AB}，$$

$$\therefore AB = BQ，$$

在 $\text{Rt}\triangle PBQ$ 中， $\tan \angle BPQ = \frac{BQ}{PB}$ ，

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BQ}{PB}，$$

$$\therefore PB = \sqrt{3}BQ，$$

$$\because AP = AB + PB = 24，$$

$$\therefore BQ + \sqrt{3}BQ = 24，$$

$$\therefore BQ = 12\sqrt{3} - 12，$$

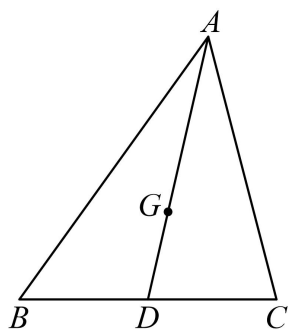
$$\therefore PQ = 2BQ = 24\sqrt{3} - 24，$$

即小岛 Q 与港口 P 相距 $(24\sqrt{3} - 24)$ 海里，

故答案为： $(24\sqrt{3} - 24)$ 。

16. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AG 并延长交边 BC 于点 D 。如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么

$\overrightarrow{AG} =$ _____ (用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了重心的性质，向量的线性运算，根据重心的定义和性质得到 $DB = \frac{1}{2}BC$, $AG = \frac{2}{3}AD$ ，求出 $\overrightarrow{CB}$ ，则可求出 $\overrightarrow{DB}$ ，进而求出 $\overrightarrow{AD}$ ，据此可得答案.

【详解】 解：∵点 G 是 ABC 的重心，

$$\therefore DB = \frac{1}{2}BC, AG = \frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

17. 在平面直角坐标系中，我们规定一种变换：将平面内任意一点 P ，绕原点 O 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) 得到对应点 P_1 ，点 P_2 在射线 OP_1 上，且 $OP_2 = kOP_1$ ($k > 0$)，得到最终的对应点 P_2 ，称点 P_2 为点 P 经过 $[\alpha, k]$ 变换后的对应点. 例如，点 $A(1,1)$ 经过 $[45^\circ, \sqrt{2}]$ 变换后的对应点为 $A_2(2,0)$ ，那么点 $A_2(2,0)$ 经过 $\left[30^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 变换后的对应点坐标为_____.

【答案】 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了坐标与图形变换—旋转，含 30° 度角的直角三角形的性质，勾股定理，根据变换规则可求出 $OA_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}OA_2 = \sqrt{3}$ ，且 $\angle A_3OA_2 = 30^\circ$ ，过点 A_3 作 $A_3B \perp x$ 轴于点 B ，求出 A_3B 和 OB 的长即可得到答案.

【详解】 解：设点 $A_2(2,0)$ 经过 $\left[30^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 变换后的对应点为 A_3 ,

$$\therefore A_2(2,0),$$

$$\therefore OA_2 = 2,$$

$$\therefore OA_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} OA_2 = \sqrt{3}, \text{ 且 } \angle A_3OA_2 = 30^\circ,$$

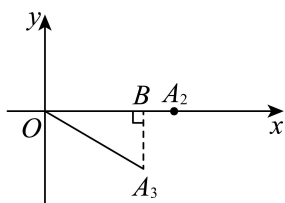
如图所示, 过点 A_3 作 $A_3B \perp x$ 轴于点 B ,

$$\therefore A_3B = \frac{1}{2} OA_3 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

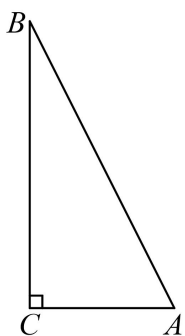
$$\therefore OB = \sqrt{OA_3^2 - A_3B^2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } A_3 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$



18. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 4$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 $\triangle AB'C'$, 点 B 、 C 的对应点分别为 B' 、 C' , 连接 $B'C$. 如果直线 $B'C$ 垂直于 AB , 连接 $B'B$, 那么此时 $\triangle AB'B$ 的面积是_____.



【答案】 $4\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理等知识, 先根据勾股定理求出

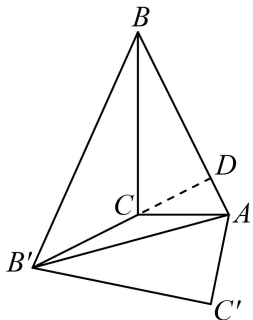
$AB = 2\sqrt{5}$, 延长 $B'C$ 交 AB 于 D , 则 $CD \perp AB$, 证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 求出 $AD = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle AB'D$

中, 根据勾股定理求出 $B'D = \frac{4}{5}\sqrt{30}$, 最后根据三角形的面积公式求解即可.

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ, AC = 2, BC = 4$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5},$$

延长 $B'C$ 交 AB 于 D , 则 $CD \perp AB$,



$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ABC = 90^\circ - \angle BAC,$$

$$\text{又 } \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}, \text{ 即 } \frac{AD}{2} = \frac{2}{2\sqrt{5}},$$

$$\text{解得 } AD = \frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$\therefore$ 旋转,

$$\therefore AB' = AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore B'D = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = \frac{4}{5}\sqrt{30},$$

$$\therefore S_{\triangle AB'B} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{4}{5}\sqrt{30} = 4\sqrt{6},$$

故答案为: $4\sqrt{6}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\tan^2 60^\circ - \cot 45^\circ}{2\sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ}.$

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了特殊角三角函数值的混合运算, 先计算特殊角三角函数值, 再根据二次根式的运算法则求解即可.

【详解】解： $\frac{\tan^2 60^\circ - \cot 45^\circ}{2\sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ}$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}$$

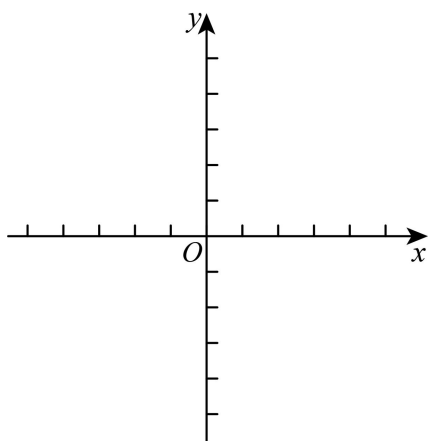
$$= \frac{3-1}{2 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{1}$$

$$= 2.$$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 2 个单位，再向下平移 1 个单位后得到的新抛物线 L 与 x 轴交于点 A 和 B （点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C ，新抛物线 L 的顶点为 D ，连接 BC ， CD 。



(1) 请求出平移后新抛物线 L 的表达式及点 C 的坐标；

(2) 求 $\angle BCD$ 的正切值。

【答案】(1) $y = (x-2)^2 - 1$ ， $C(0,3)$

(2) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的平移，二次函数的图象与性质，勾股定理，等面积法求线段的长度等知识，解题的关键是：

(1) 根据平移的规律：“左加右减，上加下减”即可求出新抛物线的表达式，然后令 $x=0$ 求出 y 的值，即可得出点 C 的坐标；

(2) 先求出 D 、 A 、 B 的坐标，连接 BD ，过点 B 作 $BE \perp CD$ 于 E ，然后根据割补法求出 $\triangle BCD$ 的面积，根据勾股定理求出 CD 、 BC 的长度，根据等面积法求出 BE 的长度，根据勾股定理求出 CE 的长度，最后根据正切的定义求解即可。

【小问 1 详解】

解：抛物线 $y = x^2$ 向右平移 2 个单位，再向下平移 1 个单位后得到的新抛物线 L 为 $y = (x-2)^2 - 1$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$\therefore C(0, 3)$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because y = (x-2)^2 - 1$ ，

$\therefore D(2, -1)$ ，

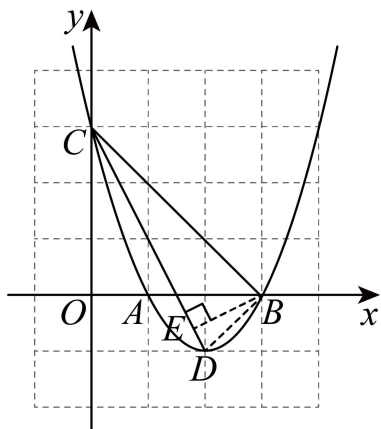
令 $y = 0$ ，则 $(x-2)^2 - 1 = 0$ ，

解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 3$ ，

$\therefore$ 点 A 在点 B 左侧，

$\therefore A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

连接 BD ，过点 B 作 $BE \perp CD$ 于 E ，



$\therefore S_{\triangle BCD} = 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 3$ ， $CD = \sqrt{(0-2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$ ， $BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \cdot BE = 3$ ，

$\therefore BE = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ ，

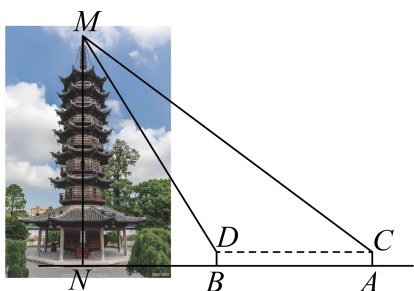
$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \frac{9}{5}\sqrt{5}$ ，

$$\therefore \tan \angle BCE = \frac{BE}{CE} = \frac{\frac{3}{5}\sqrt{5}}{\frac{9}{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{3},$$

即 $\angle BCD$ 的正切值为 $\frac{1}{3}$.

21. 上海市嘉定区法华塔被列为上海市文物保护单位，是“教化嘉定”的重要象征. 小海想利用所学知识测量法华塔的高度，由于法华塔被防护栏保护起来，小海只能在防护栏外进行测量. 如图，小海在 A 处用测角仪测得塔顶 M 的仰角为 37° ，再往塔的方向前进 30 米至 B 处（点 N 为塔底中心，且点 A 、 B 、 N 在同一水平线上），测得此时塔顶 M 的仰角为 60° ，已知测角仪的高度为 1.5 米. 请估算法华塔的高度.

(参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, 结果精确到 0.1 米).

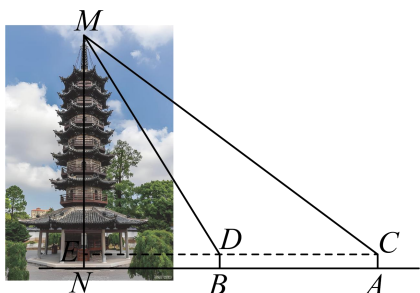


【答案】 约为 41.1 米

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用；连接 CD 并延长交 AN 于 E ，证明四边形 $ABDC$ 、 $BDEN$ 是矩形，可得出 $CD = 30$ ， $NE = 1.5$ ，在 $\text{Rt}\triangle MDE$ 中， $\tan \angle MDE = \frac{ME}{DE}$ ，根据正切的定义求出 $ME = \sqrt{3}DE$ ，在 $\text{Rt}\triangle MCE$ 中，根据正切的定义得出 $\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}DE}{30 + DE}$ ，求出 DE 的长度，即可求解.

【详解】 解：连接 CD 并延长交 AN 于 E ，



根据题意，得 $AC = BD = 1.5$ ， $AC \perp AB$ ， $BD \perp AC$ ， $AB = 30$ ， $\angle MCD = 37^\circ$ ， $\angle MDE = 60^\circ$ ，

$\therefore AC \parallel BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是平行四边形，

又 $BD \perp AB$ ，

∴ 平行四边形 $ABDC$ 是矩形,

∴ $CD = AB = 30$, $CD \parallel DE$,

同理 $BD \parallel EN$,

∴ 四边形 $BDEN$ 是平行四边形,

又 $MN \perp AN$,

∴ 平行四边形 $BDEN$ 是矩形,

∴ $EN = BD = 1.5$, $\angle NED = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle MDE$ 中, $\tan \angle MDE = \frac{ME}{DE}$,

∴ $\frac{ME}{DE} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

∴ $ME = \sqrt{3}DE$,

在 $\text{Rt}\triangle MCE$ 中, $\tan \angle MCE = \frac{ME}{CE}$,

∴ $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}DE}{30 + DE}$,

解得 $DE = \frac{30\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$,

∴ $ME = \sqrt{3}DE = \frac{90}{4 - \sqrt{3}} \approx 39.647$,

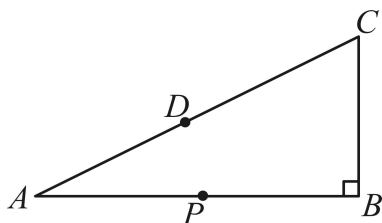
∴ $MN = ME + NE = 39.647 + 1.5 = 41.147 \approx 41.1$,

答: 法华塔的高度约为 41.1 米.

22. 如何用尺规把一条线段进行黄金分割呢? 教材 54 页的阅读材料给出了一种方法, 请阅读材料并回答问题:

怎样用尺规把线段 AB 黄金分割呢? 下面给出一种方法.

作法: 如图



1. 过点 B 作 $BC \perp AB$, 使 $BC = \frac{1}{2}AB$.

2. 连接 AC , 在线段 AC 上截取 $CD = CB$.

3. 在线段 AB 上截取 $AP = AD$.

则 $AP^2 = AB \cdot PB$.

(1) 请写出图中 $\frac{AP}{AB}$ 的值是_____;

(2) 我们把顶角为 36° 的等腰三角形称为黄金三角形, 它的底边与腰的比是黄金分割数. 请利用无刻度直尺和圆规, 作出以线段 EF 为底边的黄金三角形 EFG (不必写出作法, 保留作图痕迹并写出结论).



【答案】(1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了黄金分割比, 勾股定理, 尺规作图等知识, 解题的关键是:

(1) 设 $BC = a$, 根据作图知 $AB = 2BC = 2a$, 根据勾股定理求出 $AC = \sqrt{5}a$, 则 $AD = AP = (\sqrt{5}-1)a$, 然后代入 $\frac{AP}{AB}$ 计算即可求解;

(2) 作线段 EF 的垂直平分线 MN , 交于点 O , 过 F 作 $DC \perp EF$, 在 FD 上截取 $FC = FO$, 连接 EC , 并延长, 在延长线上截取 $CB = FC$, 以 E 、 F 为圆心, EB 为半径画弧, 两弧相交于 A , 连接 AE 、 AF 即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $BC = a$,

由作图知 $AB = 2BC = 2a$, $BC \perp AB$, $CD = BC = a$, $AP = AD$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a,$$

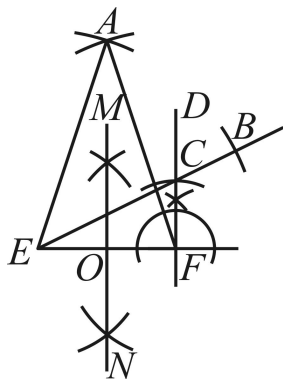
$$\therefore AP = AD = AC - CD = (\sqrt{5}-1)a,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, $\triangle AEF$ 即为所求,



理由:

设 $FO = a$,

由作图知: $EF = 2a$, $FC = CB = a$, $\angle EFC = 90^\circ$, $AE = AF = EB$,

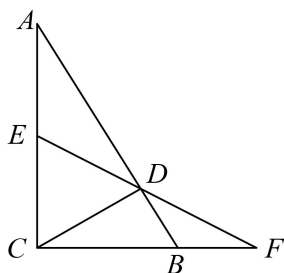
$$\therefore EC = \sqrt{EF^2 + FC^2} = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore AE = AF = EB = EC + CB = (\sqrt{5} + 1)a,$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{2a}{(\sqrt{5} + 1)a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

$\therefore \triangle AEF$ 是黄金三角形.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 上一点, 满足 $AC^2 = AD \cdot AB$, 点 E 是 AC 的中点, 连接 ED 并延长交 CB 的延长线于点 F . 求证:



(1) $CD \perp AB$;

(2) $BC \cdot CF = AC \cdot DF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质, 直角三角形的性质, 余角的性质等知识, 熟练掌握相关知识是解题的关键;

(1) 证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 然后根据相似三角形的性质和垂直的定义即可得证;

(2) 证明 $\triangle FCD \sim \triangle BDF$, 得出 $\frac{FC}{DF} = \frac{CD}{DB}$, 证明 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, 得出 $\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BD}$, 则 $\frac{AC}{CB} = \frac{FC}{DF}$, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because AC^2 = AD \cdot AB$,

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

又 $\angle A = \angle A$,

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp AB;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because CD \perp AB$, 点 E 是 AC 的中点,

$$\therefore DE = AE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADE,$$

又 $\angle ADE = \angle BDF$,

$$\therefore \angle A = \angle BDF,$$

$$\because CD \perp AB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 90^\circ - \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BDF, \text{ 即 } \angle FCD = \angle BDF,$$

又 $\angle F = \angle F$,

$$\therefore \triangle FCD \sim \triangle FDB,$$

$$\therefore \frac{FC}{DF} = \frac{CD}{DB},$$

$$\because \angle A = \angle BCD, \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ,$$

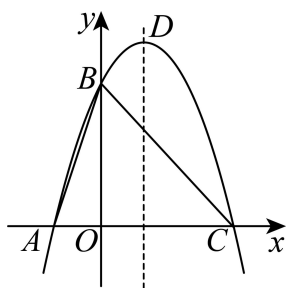
$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{FC}{DF},$$

$$\therefore BC \cdot CF = AC \cdot DF.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和 C , 与 y 轴交于点 $B(0, 3)$, 顶点为 D , 连接 AB 、 BC .



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 是抛物线上对称轴右侧的点.

①当点 P 在 x 轴上方时, 连接 PB 、 PC , 如果 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, 求点 P 的坐标;

②如果点 E 在对称轴上, 且使 $\triangle PDE$ 与 $\triangle AOB$ 相似, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) ① $P(2, 3)$; ② $P(4, -5)$ 或 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{35}{9}\right)$

【解析】

【分析】(1) 把 A 、 B 的坐标代入 $y = -x^2 + bx + c$, 求出 b 、 c 即可;

(2) ①先求出直线 BC 的表达式为 $y = -x + 3$, 过 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q , 设 $P(x, -x^2 + 2x + 3)$, 则 $Q(x, -x + 3)$, $PQ = -x^2 + 3x$, 结合 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, 得出方程 $\frac{1}{2} \times 3(-x^2 + 3x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(3+1) \times 3$, 解方程即可;

②先求出 $\frac{AO}{BO} = \frac{1}{3}$, 根据 $\triangle PDE$ 与 $\triangle AOB$ 相似, 且 $\angle PDE < 90^\circ$, 则分两种情况讨论: 当 $PE \perp DE$ 时,

$$\frac{PE}{DE} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{DE}{PE} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3}, \text{ 设 } P(x, -x^2 + 2x + 3), \text{ 则 } \frac{x-1}{4-(-x^2+2x+3)} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{4-(-x^2+2x+3)}{x-1} = \frac{1}{3},$$

分别解方程求出 x , 即可求出 P 的坐标; 当 $PE \perp DP$ 时, 过 P 作 $PH \perp DE$ 于 H , 证明 $\triangle DHP \sim \triangle DPE$,

进而判断出 $\triangle DHP$ 与 $\triangle AOB$ 相似, $\angle DHP = \angle AOB = 90^\circ$, 则 $\frac{PH}{DH} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{DH}{PH} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3}$, 然后同理可

求出点 P 的坐标即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和 C , 与 y 轴交于点 $B(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} -(-1)^2 - b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: ①令 } y = -x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ 解得 } x_1 = -1, x_2 = 3,$$

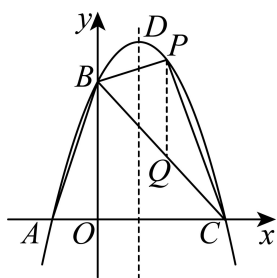
$$\therefore C(3, 0),$$

设直线 BC 的表达式为 $y = mx + n$,

$$\text{则} \begin{cases} 3m + n = 0 \\ n = 3 \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 3,$$

过 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q ,



$$\text{设 } P(x, -x^2 + 2x + 3), \text{ 则 } Q(x, -x + 3),$$

$$\therefore PQ = -x^2 + 2x + 3 - (-x + 3) = -x^2 + 3x,$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3(-x^2 + 3x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (3+1) \times 3,$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 \text{ (不符合题意舍去)}, x_2 = 2,$$

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = -2^2 + 2 \times 2 + 3 = 3,$$

$$\therefore P(2, 3);$$

$$\text{②} \because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$$\therefore D(1, 4),$$

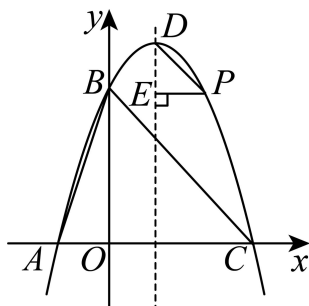
$$\therefore A(-1, 0), B(0, 3),$$

$$\therefore AO=1, \quad BO=3,$$

$$\therefore \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 点 E 在对称轴上, 且 $\triangle PDE$ 与 AOB 相似,

$\therefore$ 当 $PE \perp DE$ 时,



$$\frac{PE}{DE} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{DE}{PE} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3},$$

$$\text{设 } P(x, -x^2 + 2x + 3),$$

$$\text{则 } \frac{x-1}{4-(-x^2+2x+3)} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{4-(-x^2+2x+3)}{x-1} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解方程 } \frac{x-1}{4-(-x^2+2x+3)} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } x_1=1, \quad x_2=4,$$

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = -4^2 + 2 \times 4 + 3 = -5,$$

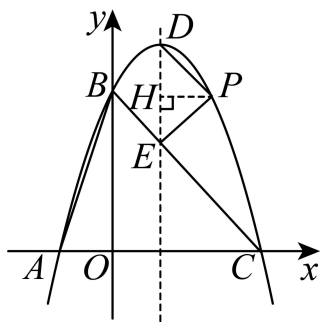
$$\therefore P(4, -5),$$

$$\text{解 } \frac{4-(-x^2+2x+3)}{x-1} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } x_1=1, \quad x_2=\frac{4}{3},$$

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = -\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{4}{3}\right) + 3 = \frac{35}{9},$$

$$\therefore P\left(\frac{4}{3}, \frac{35}{9}\right),$$

当 $PE \perp DP$ 时,



过 P 作 $PH \perp DE$ 于 H ,

则 $\angle DPE = \angle DEP = 90^\circ - \angle PDE$,

又 $\angle DHP = \angle DPE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DHP \sim \triangle DPE$,

又 $\triangle PDE$ 与 $\triangle AOB$ 相似,

$\therefore \triangle DHP$ 与 $\triangle AOB$ 相似, $\angle DHP = \angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore \frac{PH}{DH} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{DH}{PH} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{3},$$

同理可求 $P(4, -5)$ 或 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{35}{9}\right)$,

综上: $P(4, -5)$ 或 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{35}{9}\right)$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数表达式, 二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质等知识, 利用分类讨论的思想和添加合适的辅助线是解答类似题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, 点 E 在 $\triangle ABC$ 内, $BA = BC, DA = DE$, $\angle ADE = \angle ABC$, 连接 EC , EB 和 BD , DE 与 AB 相交于点 O .

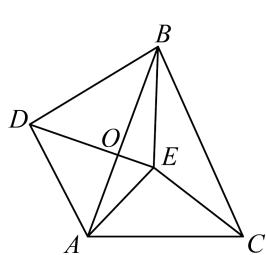


图1

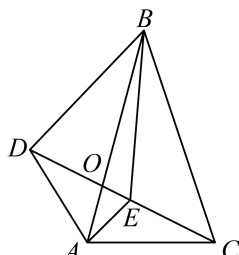


图2

(1) 求证: $\triangle DBA \sim \triangle ECA$;

(2) 已知 $AE = 2$, $AC = 4$, 如图 2, 当 D, E, C 三点共线时,

①求 $\frac{OB}{OD}$ 的值:

②如果 $EC = 3$, 求 $\angle ABC$ 的正弦值.

【答案】(1) 见解析 (2) ①2; ② $\frac{\sqrt{15}}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，勾股定理，正弦的定义等知识，解题的关键是：

(1) 先证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，得出 $\angle BAC = \angle DAE$ ， $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{DE}$ ，则 $\angle EAC = \angle DAB$ ， $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$ ，然后根据相似三角形的判定即可得证；

(2) ①证明 $\triangle AOC \sim \triangle DOB$ ，得出 $\frac{CO}{AO} = \frac{BO}{DO}$ ，证明 $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ ，得出 $\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{DA}$ ，根据 (1) 中 $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$ ，

$AB = CB$ ，得出 $\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{AD}$ ，得出 $\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{DA} = \frac{AC}{AE}$ ，即可求解；

②过 A 作 $AH \perp CD$ 于 H ，在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 和 $\text{Rt}\triangle AEH$ 中，根据勾股定理可得出

$AH^2 = 4^2 - (3 + EH)^2 = 2^2 - EH^2$ ，则可求出 $EH = \frac{1}{2}$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 和 $\text{Rt}\triangle AEH$ 中，根据勾股定理可

得出 $AH^2 = AD^2 - \left(AD - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ，则可求出 $AD = 4$ ， $AH = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中，根据正切的定义求出 $\sin \angle ADH = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ，然后结合 $\angle ADH = \angle ABC$ 即可求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because BA = BC, DA = DE$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{DE}，$$

又 $\angle ADE = \angle ABC$ ，

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE，$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE，\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{DE}，$$

$$\therefore \angle EAC = \angle DAB，\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}，$$

$$\therefore \triangle EAC \sim \triangle DAB，\text{即 } \triangle DBA \sim \triangle ECA；$$

【小问 2 详解】

解： ① $\because \triangle EAC \sim \triangle DAB$ ，

$$\therefore \angle ACE = \angle ABD，$$

又 $\angle AOC = \angle DOB$ ，

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle DOB，$$

$$\therefore \frac{CO}{AO} = \frac{BO}{DO}，$$

又 $\angle BOC = \angle DOA$,

$\therefore \triangle BOC \sim \triangle DOA$,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{DA},$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}, \quad AB = CB,$$

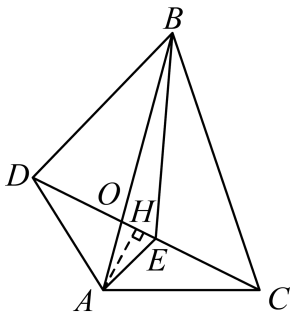
$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{CB}{AD},$$

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{DA} = \frac{AC}{AE},$$

又 $AE = 2$, $AC = 4$,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{4}{2} = 2;$$

②过 A 作 $AH \perp CD$ 于 H ,



$$\text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } AH^2 = AC^2 - CH^2 = 4^2 - (3 + EH)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEH \text{ 中, } AH^2 = AE^2 - EH^2 = 2^2 - EH^2,$$

$$\therefore 4^2 - (3 + EH)^2 = 2^2 - EH^2,$$

$$\text{解得 } EH = \frac{1}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADH \text{ 中, } AH^2 = AD^2 - DH^2 = AD^2 - \left(AD - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEH \text{ 中, } AH^2 = AE^2 - EH^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\therefore AD^2 - \left(AD - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad AH = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

解得 $AD = 4$,

$$\therefore \sin \angle ADH = \frac{AH}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8},$$

$$\because \angle ADH = \angle ABC$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \sin \angle ADH = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫