

黄浦区 2025 年九年级学业水平考试模拟考

数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 单项式 $-\frac{4}{3}x^2y^2$ 的次数是 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了单项式的次数. 单项式的次数是指所有字母的指数之和. 直接利用单项式的次数的定义得出答案.

【详解】解: 单项式 $-\frac{4}{3}x^2y^2$ 的次数是 $2+2=4$.

故选: D.

2. 下列函数图像中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小的是 ()

- A. $y=5x$ B. $y=-x-1$ C. $y=\frac{4}{x}$ D. $y=-3x^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数、二次函数和反比例函数的图象的性质, 解题的关键是根据函数表达式判断出函数的图象性质.

利用函数的表达式 k 值和 a 值, 逐项判断出各函数的图象性质即可.

【详解】解: A. $y=5x$, $k>0$, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 该选项错误, 不符合题意;

B. $y = -x - 1$, $k < 0$, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 该选项正确, 符合题意;

C. $y = \frac{4}{x}$, $k > 0$, 在每个象限内函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 但第一象限内的函数值比第三象限

内的函数值要大, 该选项错误, 不符合题意;

D. $y = -3x^2$, $a < 0$, 开口向下, 当 $x < 0$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 当 $x > 0$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 该选项错误, 不符合题意;

故选: B.

3. 已知点 P 在半径为 5 的 $\odot O$ 内, 那么点 P 到圆心 O 的距离不可能是 ()

A. 0

B. 2

C. 4

D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是点与圆的位置关系, 掌握点 P 到圆心的距离 $OP = d$, 当 $d < r$ 时, 点 P 在圆内是解题的关键.

根据点与圆的位置关系解答即可.

【详解】解: $\because$ 点 P 在半径为 5 的 $\odot O$ 内,

$\therefore OP < 5$,

$\therefore$ 点 P 到圆心 O 的距离不可能是 6.

故选: D.

4. 木盒中装有 4 个红球、3 个黄球和 2 个白球, 这些球只是颜色不同. 从木盒中任意摸出 1 个球, 下列事件发生的概率最小的是 ()

A. 摸出一个红球

B. 摸出一个黄球

C. 摸出一个白球

D. 摸出一个黄球或白球

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了概率公式的应用, 解题的关键是掌握概率等于所求情况数与总情况数之比.

求得所有球的总数, 分别找到每种情况的个数, 然后利用概率公式直接求解即可.

【详解】解: A. 摸出一个红球的概率为 $\frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}$;

B. 摸出一个黄球的概率为 $\frac{3}{4+3+2} = \frac{3}{9}$;

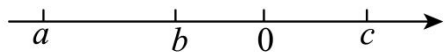
C. 摸出一个白球的概率为 $\frac{2}{4+3+2} = \frac{2}{9}$;

D. 摸出一个黄球或白球的概率为 $\frac{3+2}{4+3+2} = \frac{5}{9}$;

$\therefore$ 摸出一个白球的概率最小,

故选: C.

5. 已知 a 、 b 、 c 三个实数在数轴上的位置如图所示, 下列结论不成立的是 ()



A. $a+b < b+c$

B. $a-c < b-c$

C. $ab < bc$

D. $ac < bc$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了实数与数轴, 不等式的基本性质等知识点, 解题的关键是熟练掌握不等式的基本性质.

利用数轴得出三个实数的大小关系, 利用不等式的基本性质逐项判断即可.

【详解】解: 根据数轴可知 $a < b < 0 < c$,

A、根据不等式的基本性质, 则 $a < c$,

$\therefore a+b < b+c$, 故该选项正确, 不符合题意;

B、根据不等式的基本性质, 则 $a < b$,

$\therefore a-c < b-c$, 故该选项正确, 不符合题意;

C、由数轴可得, $a < c$, $b < 0$,

$\therefore ab > bc$, 故该选项错误, 符合题意;

D、由数轴可知, $a < b$, $c > 0$,

$\therefore ac < bc$, 故该选项正确, 不符合题意;

故选: C.

6. 尺规作图: 已知 $\angle MON$ ($0^\circ < \angle MON < 180^\circ$) 具体步骤如下: ①在射线 OM 、 ON 上分别截取 OA 、 OB , 使 $OA = OB$; ②分别以点 A 、 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的同一长度为半径作弧, 两弧交于 $\angle MON$ 内的一点 P , 作射线 OP ; ③以点 A 为圆心, OA 为半径作弧, 交射线 OP 于点 C , 联结 AC 、 CB . 那么所作的四边形 $AOBC$ 一定是 ()

A. 菱形

B. 矩形

C. 正方形

D. 等腰梯形

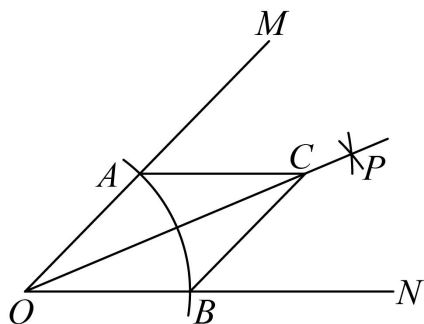
【答案】A

【解析】

【分析】本题考查作图-基本作图, 菱形的判定, 矩形的判定, 正方形的判定, 等腰梯形的判定. 根据要求

作出图形，再根据邻边相等的平行四边形是菱形证明即可．

【详解】解：由作图可知， OC 平分 $\angle MON$ ， $OA = OB = AC$ ，



$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \angle ACO,$$

$$\therefore AC \parallel OB,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBC$ 是平行四边形，

$$\because OA = OB,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBC$ 是菱形．

故选：A．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. -8 的相反数是 _____．

【答案】8

【解析】

【分析】根据“只有符号不同的两个数互为相反数”求解即可．

【详解】解： -8 的相反数是 8，

故答案为：8．

【点睛】本题考查了相反数的定义，掌握相反数的性质是解题的关键．

8. 计算： $(x+2y)(x-2y) =$ _____．

【答案】 $x^2 - 4y^2$

【解析】

【分析】此题考查平方差公式．根据平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 运算即可．

【详解】解： $(x+2y)(x-2y) = x^2 - 4y^2$ ，

故答案为： $x^2 - 4y^2$ ．

9. 已知 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ，那么 $f(-1) =$ _____．

【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】 根据自变量与函数值的对应关系，把 $x = -1$ 代入计算可得答案.

【详解】 解：当 $x = -1$ 时， $f(-1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$

故答案为： $\frac{1}{2}$

【点睛】 本题考查了函数值，把自变量的值代入函数解析式是解题关键.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a , b , c 为常数) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 解题的关键是理解根的判别式对应的根的三种情况. 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根. 对于一元二次方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 有实数根, 可得 $\Delta \geq 0$, 得 $9 + 4m \geq 0$, 即可求解.

【详解】 解：在方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 中, $a = 1$, $b = 3$, $c = -m$,

则 $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 9 + 4m$.

因为方程有实数根, 所以 $\Delta \geq 0$,

即 $9 + 4m \geq 0$,

解不等式 $4m \geq -9$,

得 $m \geq -\frac{9}{4}$.

故答案为： $m \geq -\frac{9}{4}$.

11. 如果一个正多边形的中心角为 45° , 那么这个正多边形的边数是_____.

【答案】 8

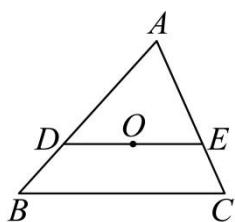
【解析】

【详解】 试题解析：这个多边形的边数是 $360^\circ \div 45^\circ = 8$,

故答案为 8.

12. 如图, 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 O 作 $DE \parallel BC$, 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E , 如果设

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE} =$ _____.

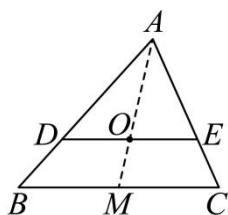


【答案】 $\frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$

【解析】

【分析】 本题考查三角形重心的性质，相似三角形的判定与性质，向量的线性运算. 熟练掌握三角形重心的性质和相似三角形的性质是解题的关键. 连接 CO 并延长交 AB 于点 M ，根据重心的性质可得 $\frac{AO}{AM} = \frac{2}{3}$ ，根据相似三角形的性质可得 $DE = \frac{2}{3}AB$ ，进而根据向量的计算可得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ，即可求解.

【详解】 解：如图，连接 CO 并延长交 AB 于点 M ，



$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore \frac{AO}{AM} = \frac{2}{3}$$

又 $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CO}{AM} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } DE = \frac{2}{3}AB$$

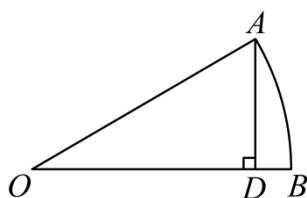
$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}).$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}).$$

13. 如图，已知扇形 AOB ，过点 A 作 $AD \perp OB$ ，垂足为点 D ，如果 $AD = \frac{1}{2}OB = 3$ ，那么扇形 AOB 的面积为_____。（结果保留 π ）



【答案】 3π

【解析】

【分析】 本题主要考查了解三角形和扇形面积的计算，先根据在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中， $\sin \angle O = \frac{AD}{OA} = \frac{1}{2}$ ，得出扇形 AOB 的圆心角度数，进而根据扇形的面积公式 $S = \frac{n}{360} \pi r^2$ 计算即可。

【详解】 解： $\because AO = OB$ ， $AD = \frac{1}{2}OB = 3$ ， $AD \perp OB$ ，

$$\therefore \sin \angle O = \frac{AD}{OA} = \frac{1}{2}, \quad OB = 6,$$

$$\therefore \angle O = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{扇形 } AOB \text{ 的面积} = \frac{30}{360} \pi \cdot 6^2 = 3\pi,$$

故答案为 3π 。

14. 某快递公司收费标准如下：快递费一般分首重和续重计算。快递物品首重不超过 1 千克收费 10 元，续重超过部分每千克收费 8 元。设快递物品的重量为 x 千克 ($x > 1$)，那么快递费 y (元) 关于物品重量 x (千克) 的函数解析式为_____。

【答案】 $y = 8x + 2 (x > 1)$

【解析】

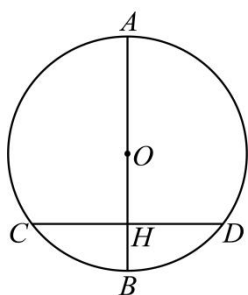
【分析】 本题考查一次函数的应用。根据题意，可以写出 y 与 x 之间的函数关系式。

【详解】 解：当 $x > 1$ 时， $y = 10 + 8(x - 1) = 8x + 2$ ，

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为： } y = 8x + 2 (x > 1).$$

故答案为： $y = 8x + 2 (x > 1)$ 。

15. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， C 、 D 是 $\odot O$ 上的两点，且 $AB \perp CD$ ，垂足为点 H ，如果 $AH = CD = 8$ ，那么 AO 的长为_____。



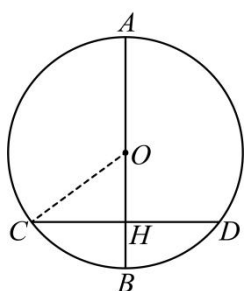
【答案】5

【解析】

【分析】 本题考查垂径定理，勾股定理. 利用垂径定理求出 $CH = \frac{1}{2}CD = 4$ 是解题的关键.

连接 OC ，根据 $AB \perp CD$ ， $AH = CD = 8$ ，得到 $\angle OHC = 90^\circ$ ， $CH = \frac{1}{2}CD = 4$ ，设 $AO = OC = x$ ，则 $OH = AH - AO = 8 - x$ ，再根据勾股定理求解即可.

【详解】 解：如图，连接 OC ，



$$\because AB \perp CD, \quad AH = CD = 8,$$

$$\therefore \angle OHC = 90^\circ, \quad CH = \frac{1}{2}CD = 4,$$

$$\text{设 } AO = OC = x, \text{ 则 } OH = AH - AO = 8 - x,$$

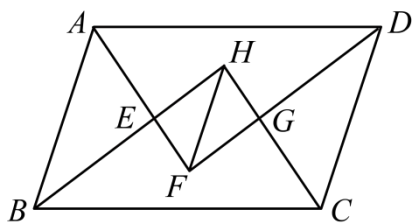
$$\text{由勾股定理, 得 } x^2 = 4^2 + (8 - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = 5,$$

$$\therefore AO = 5$$

故答案为：5.

16. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的四个内角的平分线组成四边形 $EFGH$ ，连接 HF ．如果 $AB = 6$ ， $AD = 9$ ，那么 HF 的长为_____.



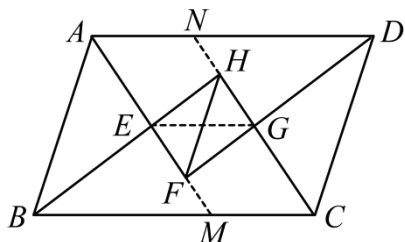
【答案】3

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，角平分线的性质，矩形的判定，等腰三角形的判定和性质等知识点，解题的关键是熟练掌握相关性质，构造辅助线.

利用平行四边形的性质和角平分线的性质得出直角，证明四边形 $EFGH$ 是矩形，然后再利用平行四边形的判定和性质得出 EG 的长，根据矩形的对角线相等即可求出结果.

【详解】解：



如图所示，延长 AF 交 BC 于点 M ，延长 CH 交 AD 于点 N ，连接 EG ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ ，

又 $\because AF$ 平分 $\angle BAD$ ， BH 平分 $\angle ABC$ ，

$$\angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAD, \quad \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$ ， $\angle HEF = 90^\circ$ ，

同理， $\angle EFG = 90^\circ$ ， $\angle FGH = 90^\circ$ ， $\angle EHG = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，

$\therefore HF = EG$ ，

$\because AD \parallel BC$ ， AF 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle BAM = \angle BMA$ ，

$\therefore \triangle ABM$ 是等腰三角形，

$\therefore BM = AM = 6$, BE 垂直平分 AM ,

同理, $DN = DC = 6$, DG 垂直平分 CN ,

$\therefore MC = AN = 3$,

又 $\because MC \parallel AN$,

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形,

$\therefore AM = CN$,

$\because$ 点 E 、 G 分别是 AM 、 CN 的中点,

$\therefore EM = CG$,

又 $\because EM \parallel CG$,

$\therefore$ 四边形 $EMCG$ 是平行四边形,

$\therefore EG = MC = 3$,

$\therefore HF = EG = 3$,

故答案为: 3.

17. 定义: 抛物线 C_1 上的所有点的横、纵坐标都扩大为原来的 k 倍后得到新的抛物线 C_2 , C_2 叫 C_1 的 “ k 倍衍生抛物线”. 例如: 求抛物线 $L_1: y = 3x^2 - 2$ 的 “5 倍衍生抛物线 L_2 ”. 设抛物线 L_2 上一点 $P'(x, y)$,

则点 P' 在抛物线 L_1 上的对应点为因为点 $P\left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5}\right)$, 因为点 P 在抛物线 L_1 上, 所以 $\frac{y}{5} = 3\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 2$, 整理

得到 $y = \frac{3}{5}x^2 - 10$, 即抛物线 L_2 的表达式为 $y = \frac{3}{5}x^2 - 10$. 参考上述方法, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

的 “ k 倍衍生抛物线” 的表达式为_____.

【答案】 $y = \frac{a}{k}x^2 + bx + ck$

【解析】

【分析】 本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数图象上点的坐标特征. 依据题意, 设抛物线 L_2 上一点 $P'(x, y)$, 则点 P' 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上的对应点为 $P\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$, 从而

$\frac{y}{k} = a\left(\frac{x}{k}\right)^2 + b \cdot \frac{x}{k} + c$, 进而计算可以得解.

【详解】 解: 由题意, 设抛物线 L_2 上一点 $P'(x, y)$, 则点 P' 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上的对应点为

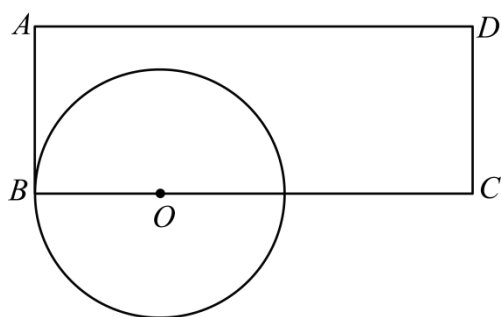
$$P\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right),$$

$$\therefore \frac{y}{k} = a\left(\frac{x}{k}\right)^2 + b \cdot \frac{x}{k} + c,$$

$$\therefore y = \frac{a}{k}x^2 + bx + ck,$$

故答案为: $y = \frac{a}{k}x^2 + bx + ck$,

18. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 8$, 点 O 在边 BC 上, $BO = 2$, 以 BO 为半径作 $\odot O$. 将矩形 $ABCD$ 翻折, 使点 D 落在 $\odot O$ 上, 点 D 的对应点为点 D' , 折痕与边 AD 交于点 M , 如果直线 DD' 经过点 O , 那么 DM 的长为_____.



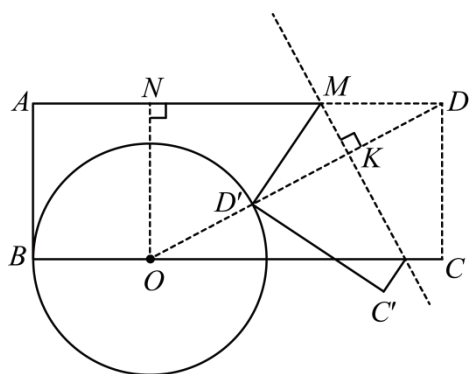
【答案】 $\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{15}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了圆和矩形的综合, 翻折的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质以及分类讨论的数学思想等知识点, 解题的关键是熟练掌握相关性质并灵活应用.

根据题意构造辅助线, 采用分类讨论的数学思想, 利用翻折的性质和勾股定理求出相关线段的长度, 并根据条件得出 $\triangle DMK \sim \triangle DON$ 和 $\triangle DMK \sim \triangle DNA$, 然后根据对应边成比例求出 DM 的长.

【详解】 解:



①如图所示, 过点 O 作 $ON \perp AD$ 于点 N , 对称轴与直线 OD 的交点为 K ,

在 $\text{Rt}\triangle DON$ 中, 由勾股定理得

$$OD = \sqrt{ON^2 + DN^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore DD' = OD - OD' = 3\sqrt{5} - 2$$

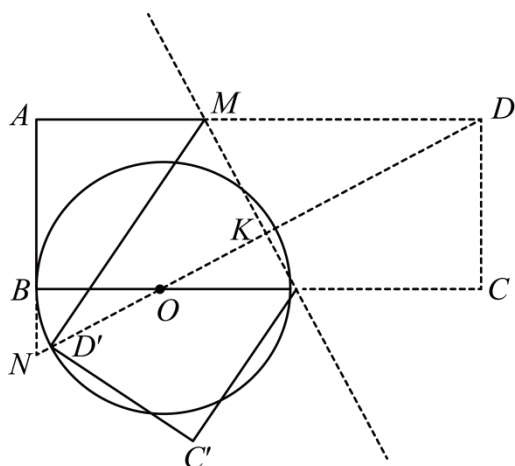
由翻折的性质可得 $DK = \frac{1}{2}DD' = \frac{3}{2}\sqrt{5} - 1$

$$\therefore {}_{\Delta}DMK \sim {}_{\Delta}DON$$

$$\therefore \frac{MD}{OD} = \frac{DK}{DN}$$

$$\text{即 } \frac{MD}{3\sqrt{5}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5} - 1}{6}$$

解得 $MD = \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$;



由①知 $OD = 3\sqrt{5}$,

$$\therefore DD' = 3\sqrt{5} + 2$$

由翻折的性质可得 $DK = \frac{1}{2}DD' = \frac{3}{2}\sqrt{5} + 1$

$$\therefore {}_{\Delta}OBN \sim {}_{\Delta}OCD$$

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{ON}{OD}$$

$$\text{即} \therefore \frac{2}{6} = \frac{ON}{3\sqrt{5}}$$

$$\text{解得 } ON = \sqrt{5},$$

$$\therefore DN = OD + ON = 4\sqrt{5}$$

同理, $\triangle DMK \sim \triangle DNA$

$$\therefore \frac{DM}{DN} = \frac{DK}{AD}$$

$$\text{即} \frac{DM}{4\sqrt{5}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}+1}{8}$$

$$\text{解得 } MD = \frac{15}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2};$$

综上, MD 的长为 $\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{15}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}$,

故答案为: $\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{15}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } |1-\sqrt{2}| + 27^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} + (\pi-3)^0.$$

【答案】 $\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了绝对值, 二次根式, 分数指数幂, 零指数幂等. 先化简绝对值, 二次根式, 分数指数幂, 零指数幂, 再根据实数的运算法则进行计算.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & |1-\sqrt{2}| + 27^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} + (\pi-3)^0 \\ &= \sqrt{2} - 1 + 3\sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 1 \\ &= \sqrt{2} - 1 + 3\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 1 \\ &= \sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

$$20. \text{ 解方程: } \frac{2}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} + 1.$$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 此题考查了解分式方程. 分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】 解: $\frac{2}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} + 1,$

两边都乘以 $(x+3)(x-3),$

得: $2(x-3) + 6 = x+3 + x^2 - 9,$

整理得 $x^2 - x - 6 = 0,$

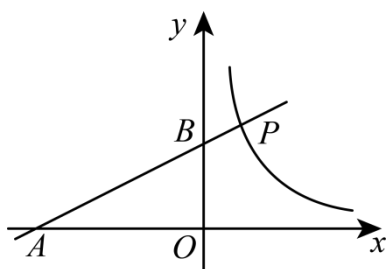
解得: $x = -2$ 或 $x = 3,$

检验: $x = 2$ 是分式方程的根, $x = 3$ 是分式方程的增根,

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x = 2.$

21. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: y = kx + 3 (k \neq 0)$ 与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点, 反比例

函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图像经过直线 l 上的点 $P(2, n).$



(1) 求直线 l 的表达式;

(2) 已知点 C 在反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图像上, 且 $\angle BOC = \angle ABO$, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x + 3$

(2) $(4, 2)$

【解析】

【分析】 (1) 把 $P(2, n)$ 代入反比例函数解析式 $y = \frac{8}{x}$, 求出点 P 坐标, 再把点 P 坐标代入一次函数解析式 $y = kx + 3$, 求出 k 值即可;

(2) 根据 $\angle BOC = \angle ABO$ 得出 $OC \parallel AB$, 利用两直线平行, 比例系数相同, 得求出直线 OC 的表达式

为: $y = \frac{1}{2}x$, 再联立函数解析式, 求出直线 OC 与反比例函数的交点坐标即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $P(2, n)$ 代入 $y = \frac{8}{x}$, 得 $n = 4$,

$\therefore P(2, 4)$,

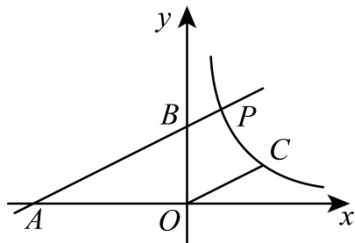
把 $P(2, 4)$ 代入 $y = kx + 3$, 得 $4 = 2k + 3$,

解得: $k = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线 l 的表达式为: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

【小问 2 详解】

解: 如图,



$\therefore \angle BOC = \angle ABO$,

$\therefore OC \parallel AB$,

又 $\therefore$ 直线 AB 的表达式为: $y = \frac{1}{2}x + 3$,

$\therefore$ 直线 OC 的表达式为: $y = \frac{1}{2}x$,

联立, 得
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{8}{x} \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -2 \end{cases}$,

$\therefore x > 0$,

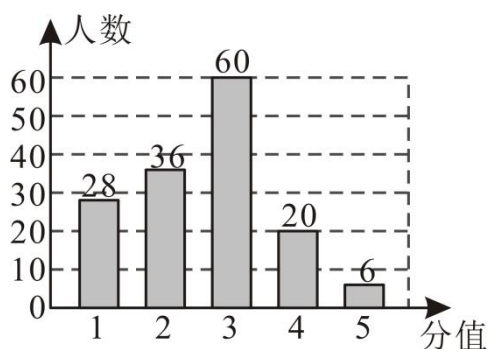
$\therefore C(4, 2)$.

【点睛】 本题考查一次函数与反比例函数图象交点问题, 函数图象上点的坐标特征, 待定系数法求函数解析式, 平行线的判定, 熟练掌握两直线平行, 解析式的比例系数相等是解题的关键.

22. 某校七年级要举行“阅读之星”评选活动，设计评选方案时考虑如下几个指标因素：①书籍的数量 A ；②书籍的总页数 B ；③书籍的类别 C ；④网络评分 D 。根据以上指标因素的重要程度赋以不同的系数，建立“阅读之星”的得分公式 $x = x_1A + x_2B + x_3C + x_4D$ ，其中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 是各项指标因素的系数。假如小海同学一学期读了 4 本书，总页数 1350 页，涉及 3 个类别，4 本书的网络评分的平均分为 5.5 分，那么小海的得分计为 $x = 4x_1 + 1350x_2 + 3x_3 + 5.5x_4$ 。如果各项指标因素的系数一旦确定，那么他的“阅读之星”的得分也就确定。

评选小组通过向七年级学生和教师发放“阅读之星”评选指标因素重要程度的问卷调查，分别对上述四个指标因素打分，每个指标因素的分值范围为 0~10 分，四个指标因素分值的和必须为 10 分，指标因素的分值越高表示该指标因素越重要，然后将得到的每一个指标因素的所有分值取平均数作为该指标因素的系数。

评选小组对调查问卷的数据进行整理，得到“书籍的数量 A ”指标因素的得分情况统计图（如图）及各指标因素的系数表（如表 1）。



指标因素	系数
书籍的数量 A	m
书籍的总页数 B	2.4
书籍的类别 C	3.5
网络评分 D	n

表 1

- (1) 指标因素“书籍的数量 A ”的系数 m 的值为_____；
- (2) 确定各指标因素的系数后，“阅读之星”的得分公式为 $x =$ _____；

(3) 表 2 是该校七年级甲、乙两位同学“阅读之星”各项指标因素的数值.

	A	B	C	D	得分
甲	4	1500	3	7	
乙	3	1800	2	4	

表 2

①请计算甲、乙两人“阅读之星”的得分.

甲得分为_____，乙得分为_____；

②根据两人的得分情况，请提出一条优化“阅读之星”评选方案的建议：_____.

【答案】 (1) 2.6

(2) $2.6x_1 + 2.4x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4$

(3) ①3631.4；4340.8；②见解析

【解析】

【分析】 本题考查了加权平均数.

(1) 利用加权平均数计算即可求解；

(2) 根据“阅读之星”的得分公式计算即可求解；

(3) ①根据“阅读之星”的得分公式计算即可求解；②合理即可

【小问 1 详解】

解： $m = \frac{1 \times 28 + 36 \times 2 + 60 \times 3 + 20 \times 4 + 6 \times 5}{28 + 36 + 60 + 20 + 6} = \frac{390}{150} = 2.6,$

故答案为：2.6；

【小问 2 详解】

解：由题意得 $n = 10 - 2.4 - 3.5 - m = 10 - 2.4 - 3.5 - 2.6 = 1.5,$

$\therefore x = 2.6x_1 + 2.4x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4,$

故答案为： $2.6x_1 + 2.4x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4;$

【小问 3 详解】

解：①甲得分为 $= 2.6 \times 4 + 2.4 \times 1500 + 3.5 \times 3 + 1.5 \times 7 = 3631.4,$

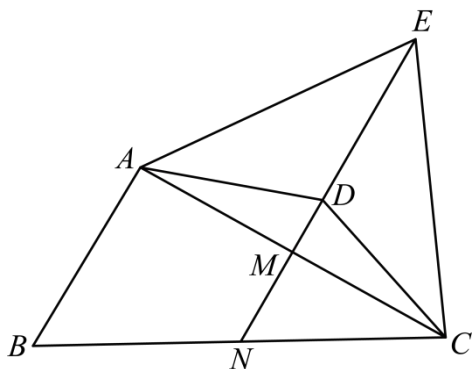
乙得分为 $= 2.6 \times 3 + 2.4 \times 1800 + 3.5 \times 2 + 1.5 \times 4 = 4340.8$;

故答案为: 3631.4; 4340.8;

②可适当调整书籍的总页数的得分公式, 因为这项的分值占比太大,

可调整得分公式为 $x = x_1A + 0.01x_2B + x_3C + x_4D$, 其余要求不变.

23. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 中, $AD = CD$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 E 是四边形 $ABCD$ 外一点, $AE = CE$, 连接 ED 并延长分别交 AC 、 BC 于点 M 、 N .



(1) 求证: $BN = CN$;

(2) $BC^2 = 2AB \cdot NE$, 求证: $\angle ACB = \angle NEC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

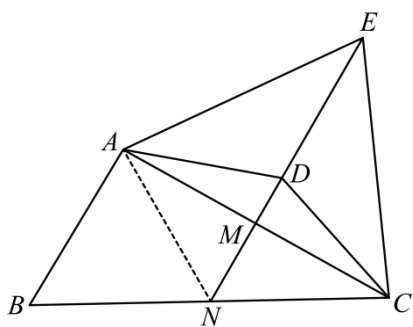
【解析】

【分析】(1) 先证明 DE 垂直平分 AC , 得到 $AN = CN$, 再根据等腰三角形的判定证明 $AB = AN$, 即可得出结论;

(2) 先证明 MN 是 ABC 的中位线, 得到 $AB = 2MN$, 从而可证明 $\triangle CMN \sim \triangle ECN$, 由相似三角形的性质得出结论.

【小问 1 详解】

证明: 连接 AN , 如图,



$\because AD = CD, AE = CE,$

$\therefore DE$ 垂直平分 AC ,

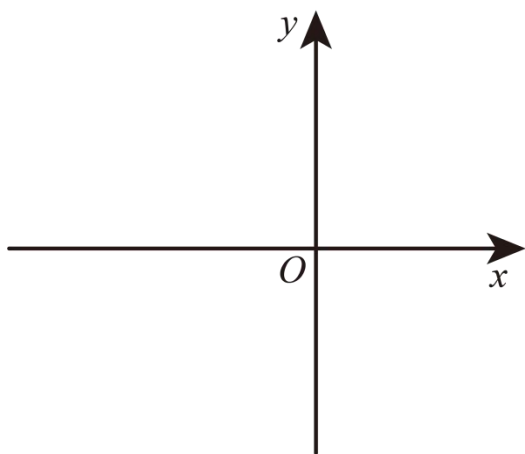
$$\begin{aligned}
&\therefore AN = CN, \\
&\therefore \angle BCA = \angle NAC, \\
&\therefore \angle BAC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BCA + \angle B = 90^\circ, \quad \angle NAC + \angle BAN = 90^\circ, \\
&\therefore \angle B = \angle BAN, \\
&\therefore AB = AN, \\
&\therefore BN = CN.
\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
&\text{证明: } \because BN = CN, \\
&\therefore \text{点 } N \text{ 是 } BC, \quad BC = 2CN, \\
&\text{由 (1) 知 } DE \text{ 垂直平分 } AC, \\
&\therefore \text{点 } M \text{ 是 } AC \text{ 的中点}, \\
&\therefore MN \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线}, \\
&\therefore AB = 2MN, \\
&\therefore BC^2 = 2AB \cdot NE, \\
&\therefore 4CN^2 = 4MN \cdot NE, \\
&\therefore CN^2 = MN \cdot NE, \text{ 即 } \frac{CN}{NE} = \frac{MN}{CN}, \\
&\therefore \angle CNM = \angle ENC, \\
&\therefore \triangle CMN \sim \triangle ECN, \\
&\therefore \angle ACB = \angle NEC.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查线段垂直平分线的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，三角形中位线的性质，余角的性质．解题关键是熟练掌握线段垂直平分线的判定与性质，相似三角形的判定与性质，三角形中位线的性质．

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c (b \neq 0)$ 与 x 轴交于 $A(2, 0)$ 、 B 两点 (点 A 在点 B 右侧), 与 y 轴正半轴交于点 C , 顶点为 P .



- (1) 如果 $AB = 6$ ，求抛物线的表达式；
- (2) 用含 b 的代数式表示点 P 的坐标；
- (3) 联结 BC 、 PC ，直线 PC 交 x 轴于点 E ，如果 $BC = EC$ ，求抛物线的表达式.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$;

(2) 顶点 P 的坐标为 $(2b, b^2 - 2b + 1)$;

(3) $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$.

【解析】

【分析】 (1) 先求得 B 点坐标为 $(-4, 0)$ ，再利用待定系数法求解即可；

(2) 将 $A(2, 0)$ 代入求得 $c = 1 - 2b$ ，得到 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 1 - 2b$ ，配方得到顶点 P 的坐标为 $(2b, b^2 - 2b + 1)$ ；

(3) 先求得点 C 的坐标为 $(0, 1 - 2b)$ ，根据题意求得 $BO = EO$ ，根据对称轴为直线 $x = 2b$ ，求得 B 点坐标为 $(4b - 2, 0)$ ， E 点坐标为 $(2 - 4b, 0)$ ，再利用待定系数法求得直线 CE 的解析式，根据点 P 在直线 CE 上，代入计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：已知抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(2, 0)$ ， $AB = 6$ ，且点 A 在点 B 右侧，

$\therefore B$ 点坐标为 $(-4, 0)$ ，

把 $A(2, 0)$ ， $B(-4, 0)$ 代入抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} \times 2^2 + 2b + c = 0 \\ -\frac{1}{4} \times (-4)^2 - 4b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$;

【小问 2 详解】

解：将 $A(2, 0)$ 代入 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 得，

$$-\frac{1}{4} \times 2^2 + 2b + c = 0,$$

解得 $c = 1 - 2b$,

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 1 - 2b$$

$$= -\frac{1}{4}(x^2 - 4bx) + 1 - 2b$$

$$= -\frac{1}{4}[(x - 2b)^2 - 4b^2] + 1 - 2b$$

$$= -\frac{1}{4}(x - 2b)^2 + b^2 - 2b + 1,$$

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $(2b, b^2 - 2b + 1)$;

【小问 3 详解】

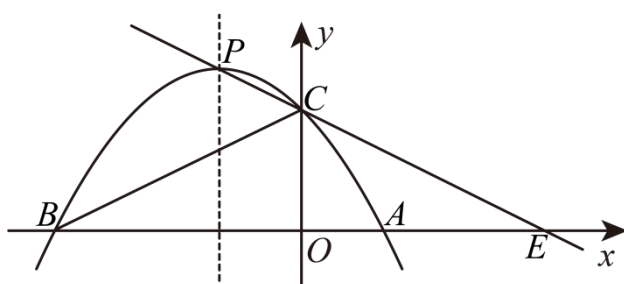
解：由 (2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 1 - 2b$,

令 $x = 0$, 则 $y = 1 - 2b$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 1 - 2b)$,

$\because BC = EC, CO \perp BE$,

$\therefore BO = EO$,



由 (2) 得顶点 P 的坐标为 $(2b, b^2 - 2b + 1)$, 对称轴为直线 $x = 2b$,

$$\therefore \frac{x_B + 2}{2} = 2b,$$

$$\therefore x_B = 4b - 2,$$

$$\therefore B \text{ 点坐标为 } (4b - 2, 0),$$

$$\therefore E \text{ 点坐标为 } (2 - 4b, 0),$$

设直线 CE 的解析式为 $y = mx + 1 - 2b$,

将 $(2 - 4b, 0)$ 代入得 $0 = m(2 - 4b) + 1 - 2b$,

$$\text{解得 } m = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } CE \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 1 - 2b,$$

$\therefore$ 点 P 在直线 CE 上,

$$\therefore b^2 - 2b + 1 = -\frac{1}{2} \times (2b) + 1 - 2b,$$

$$\text{整理得 } b(b + 1) = 0,$$

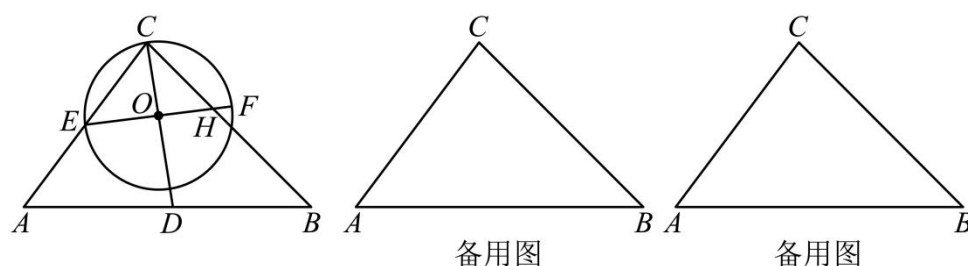
解得 $b = 0$ (舍去) 或 $b = -1$,

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1 - 2 \times (-1), \text{ 即 } y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

【点睛】 本题考查了根据已知条件确定二次函数的解析式, 二次函数的图象性质以及等腰三角形的判定和性质, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

25. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 5, AB = 7, \cos A = \frac{3}{5}$, D 是边 AB 上一动点, 联结 CD . 点 O 在线段 CD

上, 且 $\frac{CO}{OD} = \frac{4}{5}$, 以点 O 为圆心, CO 为半径作 $\odot O$, 交边 AC 于点 E .



(1) 当点 D 与点 A 重合时, 判断 $\odot O$ 与边 AB 的位置关系并说明理由;

(2) 已知点 F 在 $\odot O$ 上, 且 $\widehat{CE} = \widehat{CF}$, EF 与边 BC 交于点 H , 当 EF 经过圆心 O 时 (如图), 求 $\frac{EH}{EF}$ 的

值;

(3) 过点 D 作 $DP \parallel AC$, 交边 BC 于点 P , 当 $\odot O$ 与线段 DP 只有一个交点时, 求 BD 的取值范围.

【答案】(1) 相切, 见解析

(2) $\frac{7}{8}$

(3) $\frac{7}{2} < BD < 7$ 或 $BD = \frac{17}{6}$

【解析】

【分析】(1) 过点 C 作 $CT \perp AB$ 于点 T , 先解 $\triangle ABC$ 求出 $\sin A$, $\angle B$ 的度数, 过点 O 作 $OU \perp AB$ 于点 U , 则当点 D 与点 A 重合时, $CO = \frac{4}{5}AO$, 由 $\sin A = \frac{OU}{AO} = \frac{4}{5}$, 得到 $OU = \frac{4}{5}AO$, 故 $CO = OU$, 即可判断;

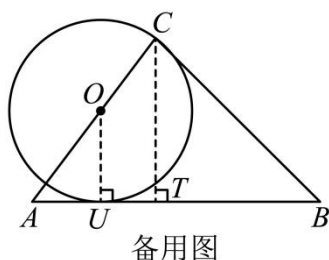
(2) 由垂径定理的推论可得 $CD \perp EF$, 可得 $\triangle OCE$ 为等腰直角三角形, 证明 $\triangle ECH \sim \triangle BCA$, 则 $\angle CHE = \angle A$, 设 $CO = OE = OF = 4k$, 则 $EF = 8k$, 由 $\tan \angle CHE = \tan \angle A = \frac{4}{3} = \frac{OC}{OH}$, 得到 $OH = 3k$, 那么 $\frac{EH}{EF} = \frac{EO + OH}{EF}$, 代入即可求解;

(3) 当 $\odot O$ 与线段 DP 相切时, 过点 O 作 $OR \perp DP$ 于点 R , 过点 D 作 $DK \perp AC$ 于点 K , 导角证明 $AK = KC$, 则 $AD = \frac{AK}{\cos A} = \frac{25}{6}$, 那么 $BD = AB - AD = \frac{17}{6}$; 当 $\odot O$ 经过点 P 时, 过点 O, D 分别作 $OM \perp AB, DN \perp AB$, 垂足分别为 M, N , 由平行线分线段成比例定理得到 $\frac{CO}{OD} = \frac{CM}{MN} = \frac{4}{5}$, 设 $CM = MP = 4x$, 则 $MN = 5x$, 则 $PN = x$, 那么 $BN = 4\sqrt{2} - 9x$, 解 $\text{Rt}\triangle BDN$ 得到 $BD = 8 - 9\sqrt{2}x$, 再由平行线分线段成比例定理得到 $\frac{BP}{BC} = \frac{BD}{BA}$, 即 $\frac{x + 4\sqrt{2} - 9x}{4\sqrt{2}} = \frac{8 - 9\sqrt{2}x}{7}$, 求出 x , 即可求解 BD .

【小问 1 详解】

解: $\odot O$ 与边 AB 相切, 理由如下:

过点 C 作 $CT \perp AB$ 于点 T ,



$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 5$, $AB = 7$, $\cos A = \frac{3}{5}$,

$$\therefore AT = AC \times \cos A = 3,$$

$$\therefore CT = \sqrt{AC^2 - AT^2} = 4,$$

$$\therefore BT = AB - AT = 4, \quad \sin A = \frac{CT}{AC} = \frac{4}{5}, \quad \tan A = \frac{CT}{AT} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BT = CT,$$

$$\therefore BC = \sqrt{CT^2 + BT^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore CT \perp AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle TCB = 45^\circ,$$

过点 O 作 $OU \perp AB$ 于点 U ,

$$\therefore \frac{CO}{OD} = \frac{4}{5}, \quad \text{当点 } D \text{ 与点 } A \text{ 重合时},$$

$$\therefore \frac{CO}{OA} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore CO = \frac{4}{5}AO,$$

$$\therefore \sin A = \frac{OU}{AO} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore OU = \frac{4}{5}AO,$$

$$\therefore CO = OU,$$

而 OC 为半径, OU 为点 O 到边 AB 的距离,

$$\therefore \odot O \text{ 与边 } AB \text{ 相切};$$

【小问 2 详解】

解: $\because \widehat{CE} = \widehat{CF}$, CD 经过圆心,

$$\therefore CD \perp EF,$$

$$\therefore EF \text{ 经过圆心 } O,$$

$$\therefore OE = OF = OC,$$

$$\therefore \triangle OCE \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore \angle CEF = 45^\circ = \angle B,$$

$$\therefore \angle ECH = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle ECH \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \angle CHE = \angle A,$$

设 $CO = OE = OF = 4k$ ，则 $EF = 8k$ ，

$$\therefore \tan \angle CHE = \tan \angle A = \frac{4}{3} = \frac{OC}{OH},$$

$$\therefore OH = 3k,$$

$$\therefore \frac{EH}{EF} = \frac{EO + OH}{EF} = \frac{4k + 3k}{8k} = \frac{7}{8};$$

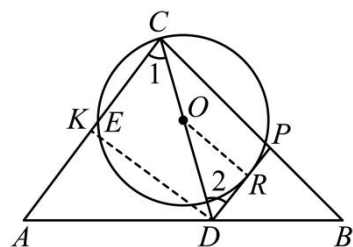
【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because OC \text{ 为半径, } \frac{CO}{OD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore OD > OC,$$

$\therefore \odot O$ 一定不经过点 D ，

当 $\odot O$ 与线段 DP 相切时，如图：



过点 O 作 $OR \perp DP$ 于点 R ，过点 D 作 $DK \perp AC$ 于点 K ，

$$\therefore OR = OC,$$

$$\therefore \frac{OR}{OD} = \frac{4}{5} = \sin \angle 2 = \sin A,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle A,$$

$$\because DP \parallel AC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle A,$$

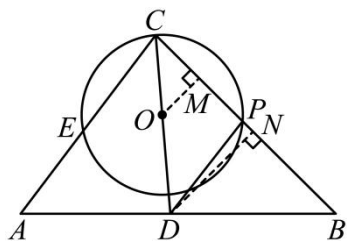
$$\therefore DA = DC,$$

$$\because DK \perp AC,$$

$$\therefore AK = KC,$$

$$\therefore AD = \frac{AK}{\cos A} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\cos A} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{6},$$

$$\therefore BD = AB - AD = 7 - \frac{25}{6} = \frac{17}{6};$$



当 $\odot O$ 经过点 P 时，过点 O, D 分别作 $OM \perp AB, DN \perp AB$ ，垂足分别为 M, N ，

$$\therefore CM = MP, OM \parallel DN,$$

$$\therefore \frac{CO}{OD} = \frac{CM}{MN} = \frac{4}{5},$$

设 $CM = MP = 4x$ ，则 $MN = 5x$ ，

$$\therefore PN = x,$$

$$\therefore BN = BC - CM - MN = 4\sqrt{2} - 9x,$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{BN}{\cos \angle B} = 8 - 9\sqrt{2}x,$$

$$\therefore DP \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{BP}{BC} = \frac{BD}{BA},$$

$$\therefore \frac{x + 4\sqrt{2} - 9x}{4\sqrt{2}} = \frac{8 - 9\sqrt{2}x}{7},$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore BD = 8 - 9\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{当 } \frac{7}{2} < BD < 7 \text{ 时, 符合题意,}$$

综上所述，当 $\odot O$ 与线段 DP 只有一个交点时， $\frac{7}{2} < BD < 7$ 或 $BD = \frac{17}{6}$ 。

【点睛】 本题考查了圆的切线的性质，直线与圆的位置关系，垂径定理及其推论，相似三角形的判定与性质，勾股定理，解直角三角形的相关计算，难度较大，解题的关键在于两个临界情况进行分析。