

静安区 2024 学年度第二学期期中教学质量调研

九年级数学试卷

(满分 150 分, 用卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分, 下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.)

1. 单项式 $\frac{-x^3y}{3}$ 的系数是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. 4 C. $\frac{1}{3}$ D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了单项式的知识, 单项式中的数字因数叫做单项式的系数, 一个单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数.

根据单项式的系数的概念求解.

【详解】解: 单项式 $\frac{-x^3y}{3}$ 的系数是 $-\frac{1}{3}$,

故选: A.

2. 下列运算的结果等于 x^5 的是 ()

- A. $x^2 + x^3$ B. $x^2 \cdot x^3$ C. $(x^3)^2$ D. $x^{10} \div x^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了合并同类项、同底数幂相乘、幂的乘方、同底数幂除法等知识点, 灵活运用相关运算法则成为解题的关键.

根据合并同类项、同底数幂相乘、幂的乘方、同底数幂除法法则逐项判断即可.

【详解】解：A. x^2 和 x^3 不是同类项，不能合并，故该选项错误，不符合题意；

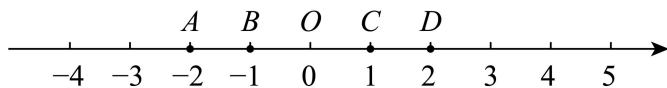
B. $x^2 \times x^3 = x^5$ ，故该选项正确，符合题意；

C. $(x^3)^2 = x^6$ ，故该选项错误，不符合题意；

D. $x^{10} \div x^2 = x^8$ ，故该选项错误，不符合题意。

故选 B.

3. 如图，数轴上的点 A 、 B 、 O 、 C 、 D 分别表示数 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 ，那么表示数 $\sqrt{3}-2$ 的点应落在 ()



A. 线段 AB 上

B. 线段 BO 上

C. 线段 OC 上

D. 线段 CD 上

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查实数与数轴、无理数的估算等知识点，掌握无理数的估算方法成为解题的关键。

先估算出无理数 $\sqrt{3}-2$ 的范围，再进行判断即可。

【详解】解：∵ $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ ，

∴ $1 < \sqrt{3} < 2$ ，

∴ $-1 < \sqrt{3}-2 < 0$ ，即表示数 $\sqrt{3}-2$ 的点应落在 BO 上。

故选 B.

4. 下列命题中，真命题是 ()

A. 对角线相等的四边形是平行四边形

B. 对角线互相垂直的四边形是矩形

C. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形

D. 对角线平分一组对角的平行四边形是正方形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形、菱形和正方形的判定等知识点，熟练掌握相关判定定理是解题的关键。

根据矩形、菱形和正方形的判定定理逐项判断即可。

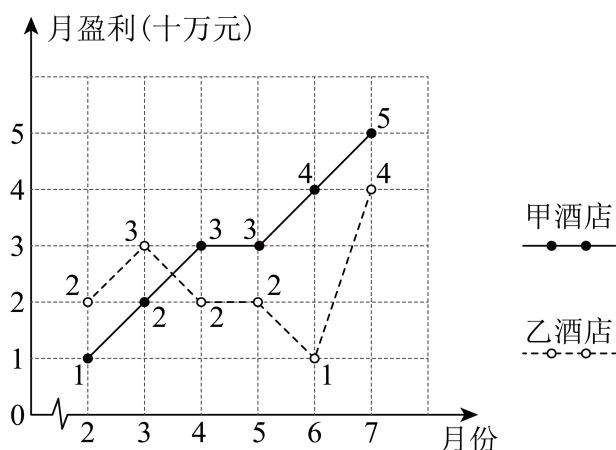
【详解】解：A、对角线相等的平行四边形是矩形或等腰梯形，故该命题为假命题，不符合题意；

- B、对角线互相垂直的四边形可以是正方形、菱形、以及一般四边形，故该命题为假命题，不符合题意；
- C、对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故为真命题，符合题意；
- D、对角线平分一组对角的平行四边形是菱形，故该命题为假命题，不符合题意。

故选：C.

5. 甲、乙两家酒店规模相当，去年2~7月的月盈利折线统计图如图所示. 下列说法中，不正确的是（ ）

甲、乙两家酒店2~7月的月盈利折线统计图



- A. 甲酒店每月盈利呈现不断增长的趋势
- B. 乙酒店经营状况有可能很快超过甲酒店
- C. 甲酒店月盈利的平均数大于乙酒店月盈利的平均数
- D. 甲酒店月盈利的方差小于乙酒店月盈利的方差

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了折线统计图、方差、平均数等知识点，灵活运用相关知识成为解题的关键。

根据折线统计图、方差、平均数逐项分析计算即可解答.

【详解】解：A. 观察甲酒店折线统计图，从2月到7月，其盈利数值依次为1, 2, 3, 3, 4, 5（单位：十万元），呈现不断增长的趋势，该选项正确，不符合题意；

B. 乙酒店在7月盈利为4（十万元），且之前盈利有波动变化，若后续经营策略调整得当，盈利持续增长，是有可能很快超过甲酒店的，该选项正确，不符合题意；

C. 甲酒店月盈利平均数为 $\frac{1+2+3+3+4+5}{6} = \frac{18}{6} = 3$ ；乙酒店月盈利平均数为 $\frac{2+3+2+2+1+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \approx 2.33$ ；由 $3 > 2.33$ ，则甲酒店月盈利的平均数大于乙酒店月盈利的平均数，该选项正确，不符合题意；

D. 甲酒店月盈利方差为 $\frac{1}{6}[(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2] = \frac{5}{3}$ ，乙酒店月盈

利方差为 $\frac{1}{6} \left[\left(2 - \frac{7}{3} \right)^2 + \left(3 - \frac{7}{3} \right)^2 + \left(2 - \frac{7}{3} \right)^2 + \left(2 - \frac{7}{3} \right)^2 + \left(1 - \frac{7}{3} \right)^2 + \left(4 - \frac{7}{3} \right)^2 \right] = \frac{8}{9}$; 由 $\frac{5}{3} > \frac{8}{9}$, 则甲酒店

月盈利的方差大于乙酒店月盈利的方差, 该选项错误, 符合题意.

故选 D.

6. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别是 5 和 7, 那么下列说法中正确的是 ()

- A. 当 $O_1O_2 = 2$ 时, 两圆没有公共点
- B. 当 $O_1O_2 = 5$ 时, 两圆有一个公共点
- C. 当 $O_1O_2 = 0$ 时, 两圆有公共点
- D. 当 $O_1O_2 = 7$ 时, 两圆有两个公共点

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了两圆位置关系, 掌握两圆半径、圆心距的关系以及两圆不同位置关系时的公共点数成为解题的关键.

根据圆和圆的位置与两圆的圆心距、半径的数量之间的关系逐项判断即可.

【详解】解: $\because \odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别是 5 和 7,

$$\therefore 7 - 5 = 2, 5 + 7 = 12.$$

A、 $O_1O_2 = 2$, 则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切, 有一个公共点, 故该选项错误;

B、 $O_1O_2 = 5$, 且 $2 < 5 < 12$, 则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, 有两个公共点, 故选项错误;

C、 $O_1O_2 = 0$, 当 $O_1O_2 < 2$ 时, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内含, 没有公共点, 故选项错误;

D、 $O_1O_2 = 7$ 时, $2 < 7 < 12$, 则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, 有两个公共点, 故选项正确.

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $|-3| - 3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】0

【解析】

【分析】本题主要考查了有理数的减法、绝对值等知识点, 掌握去绝对值符号的法则以及有理数减法运算法则是解题的关键.

根据负数的绝对值是它的相反数，据此去绝对值，然后根据有理数的减法运算法则计算即可.

【详解】解： $|-3|-3=3-3=0$,

故答案为：0.

8. 在比例尺为1:1000000的地图上甲地到乙地的距离是5厘米，则甲乙两地的实际距离是_____千米.

【答案】50

【解析】

【分析】根据实际距离=图上距离÷比例尺，列式计算即可.

本题考查了比例尺的应用，熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解：根据题意，得实际距离为： $5 \div (1:1000000) = 5000000\text{cm} = 50\text{km}$.

故答案为：50.

9. 若代数式 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义. 根据被开方数大于等于0，分母不等于0列式计算即可得解.

【详解】解：由题意得， $x-1 \geq 0$ ，且 $x-1 \neq 0$ ，

解得 $x > 1$.

故答案为： $x > 1$.

10. 分解因式： $a^2 - 5 =$ _____.

【答案】 $(a + \sqrt{5})(a - \sqrt{5})$

【解析】

【分析】本题主要考查了分解因式，直接利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解： $a^2 - 5 = (a + \sqrt{5})(a - \sqrt{5})$,

故答案为： $(a + \sqrt{5})(a - \sqrt{5})$.

11. 方程 $\sqrt{x-12} = 2$ 的解是_____.

【答案】 $x = 16$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，掌握解无理方程的步骤是解题的关键.

先两边同时平方化为整式方程求解，再检验是否有增根即可.

【详解】 解： $\sqrt{x-12}=2$

$$x-12=4,$$

解得： $x=16$,

经检验： $x=16$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x=16$,

故答案为： $x=16$.

12. 某件商品进行促销活动，打八折后的售价为 120 元，那么原价是_____元.

【答案】 150

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程的应用，找准等量关系、正确列出一元一次方程是解题的关键.

设这件商品的原价是 x 元，利用售价 = 原价 $\times 0.8$ ，列出关于 x 的一元一次方程求解即可.

【详解】 解： 设这件商品的原价是 x 元，

根据题意得： $0.8x=120$ ，解得： $x=150$ ，

$\therefore$ 这件商品的原价是 150 元.

故答案为： 150.

13. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在双曲线 $y = -\frac{\sqrt{6}}{x}$ 上，如果 $x_1 < 0 < x_2$ ，那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、

“<” 或 “=”)

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

根据反比例函数图象上点的坐标特征解答即可.

【详解】 解： $\because$ 反比例函数 $k = -\sqrt{6}$ ，

$\therefore$ 反比例函数图象分布在第二、四象限，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

$$\because x_1 < 0 < x_2,$$

$$\therefore y_1 > 0 > y_2.$$

故答案为： > .

14. 数学老师在统计一个班 35 人的数学考试成绩时, 算出中位数是 80 分, 但后来发现其中一位同学的成绩记录有误, 将 75 分写成了 55 分, 那么实际这次考试成绩的中位数是_____分.

【答案】 80

【解析】

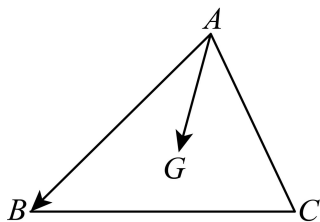
【分析】 本题主要考查了中位数的定义, 中位数是将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数为这组数据的中位数; 如果数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数为这组数据的中位数成为解题的关键.

根据中位数的定义即可解答.

【详解】 解: 由于该班有 35 人参加考试, 35 是奇数. 将 35 个学生的成绩按从小到大排序后, 中位数是第 $\frac{35+1}{2} = 18$ 个数. 把 75 分写成 55 分, 两个数都比中位数小, 那么第 18 个数不会改变. 因为原来的中位数是 80 分, 即原来排序后第 18 个数是 80 分, 所以修改成绩后, 第 18 个数依然是 80 分, 即实际这次考试成绩的中位数还是 80 分.

答案为: 80.

15. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{BC} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



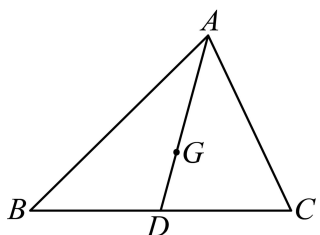
【答案】 $3\vec{b} - 2\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量的线性运算、三角形法则、三角形重心的性质等知识点, 掌握向量的运算法则成为解题的关键.

如图: 延长 AG 交 BC 于点 D , 则 $AG = 2GD$, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b}$, 再利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BD}$, 然后利用三角形重心的性质求解即可.

【详解】 解: 如图: 延长 AG 交 BC 于点 D ,



∵ 点 G 是 ABC 的重心,

$$\therefore AG = 2GD, \quad \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 2\left(\frac{3}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = 3\vec{b} - 2\vec{a}.$$

故答案为: $3\vec{b} - 2\vec{a}$.

16. 有一斜坡的坡度 $i = 1:0.75$, 斜坡上最高点到地面的距离为 2.4 米, 那么这个斜坡的长度为_____米.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用—坡度坡角问题, 熟练掌握坡度的定义是解题的关键.

根据坡度的定义求解即可.

【详解】 解: 设这个斜坡的水平距离为 x 米,

根据题意得: $\frac{2.4}{x} = \frac{1}{0.75}$, 解得: $x = 1.8$,

$$\therefore \text{这个斜坡的长度} = \sqrt{2.4^2 + 1.8^2} = 3 \text{ (米)},$$

答: 这个斜坡的长度为 3 米.

故答案为: 3.

17. 同时抛掷红、绿两枚六面编号分别是 1~6 (整数) 的质地均匀的正方体骰子, 如果将红色骰子正面朝上的编号作为方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的一次项系数 m 的值, 绿色骰子正面朝上的编号作为常数项 n 的值, 那么得到的方程有两个相等的实数根的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{18}$

【解析】

【分析】 本题考查用列表法或画树状图法求概率以及一元二次方程的性质. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比. 根据题意列出表格, 然后由表格即可求得所有等可能的结果和得到的方程有两个相等的实数根的结果数, 再用概率公式可得答案.

【详解】 解: 列表得:

	1	2	3	4	5	6
1	$x^2 + x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 + 3x + 1 = 0$	$x^2 + 4x + 1 = 0$	$x^2 + 5x + 1 = 0$	$x^2 + 6x + 1 = 0$
2	$x^2 + x + 2 = 0$	$x^2 + 2x + 2 = 0$	$x^2 + 3x + 2 = 0$	$x^2 + 4x + 2 = 0$	$x^2 + 5x + 2 = 0$	$x^2 + 6x + 2 = 0$
3	$x^2 + x + 3 = 0$	$x^2 + 2x + 3 = 0$	$x^2 + 3x + 3 = 0$	$x^2 + 4x + 3 = 0$	$x^2 + 5x + 3 = 0$	$x^2 + 6x + 3 = 0$
4	$x^2 + x + 4 = 0$	$x^2 + 2x + 4 = 0$	$x^2 + 3x + 4 = 0$	$x^2 + 4x + 4 = 0$	$x^2 + 5x + 4 = 0$	$x^2 + 6x + 4 = 0$
5	$x^2 + x + 5 = 0$	$x^2 + 2x + 5 = 0$	$x^2 + 3x + 5 = 0$	$x^2 + 4x + 5 = 0$	$x^2 + 5x + 5 = 0$	$x^2 + 6x + 5 = 0$
6	$x^2 + x + 6 = 0$	$x^2 + 2x + 6 = 0$	$x^2 + 3x + 6 = 0$	$x^2 + 4x + 6 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 + 6x + 6 = 0$

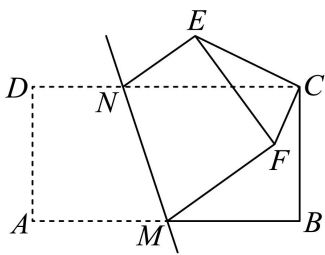
∴ 共可以得到 36 个不同形式的一元二次方程，其中得到的方程有两个相等的实数根的有：

$x^2 + 2x + 1 = 0$, $x^2 + 4x + 4 = 0$ 共 2 种，

∴ 得到的方程有两个相等的实数根的概率为 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,

故答案为: $\frac{1}{18}$.

18. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，点 M 是 AB 的中点，点 N 是 CD 边上的动点（不与端点重合），如果把四边形 $AMND$ 沿直线 MN 翻折，得到四边形 $EFMN$ （点 E 、 F 分别与点 D 、 A 对应），连接 EC 、 FC ，当 $EC \perp FC$ 时， $\triangle ECF$ 的周长为_____.



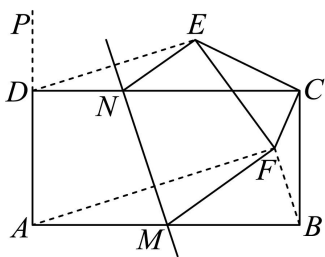
【答案】 $\frac{15+9\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】如图：延长 AD 到任意一点 P ，连接 BF 、 AF 、 DE ，由矩形的性质得 $DC = AB = 6$ ， $AD = BC = 3$ ，由点 M 是 AB 的中点得 $AM = BM$ ，由翻折得 MN 垂直平分 DE ， MN 垂直平分 AF ， $FE = AD = 3$ ，则 $DE \parallel AF$ ，所以 $\angle EDP = \angle FAP$ ，可证明 $\angle CDE = \angle BAF$ ，由 $FM = AM = BM$ ，推导出 $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$ ，而 $\angle CBF + \angle ABF = 90^\circ$ ，所以 $\angle CBF = \angle BAF$ ，则 $\angle CBF = \angle CDE$ ，因为 $\angle FCE = \angle BCD = 90^\circ$ ，所以 $\angle BCF = \angle DCE = 90^\circ - \angle DCF$ ，则 $\triangle BCF \sim \triangle DCE$ ，所以 $\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2}$ ，则 $CE = 2CF$ ，由 $FE = \sqrt{CF^2 + CE^2} = \sqrt{5}CF = 3$ 可得 $CF = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，则 $CE = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ，所以

$FE + CF + CE = \frac{15+9\sqrt{5}}{5}$ ，据此即可解答.

【详解】解：如图：延长 AD 到任意一点 P ，连接 BF 、 AF 、 DE ，



$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，点 M 是 AB 的中点，

$\therefore DC \parallel AB$ ， $DC = AB = 6$ ， $AD = BC = 3$ ， $AM = BM$ ， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 把四边形 $AMND$ 沿直线 MN 翻折，得到四边形 $EFMN$ ，

$\therefore$ 点 E 与点 D 关于直线 MN 对称，点 F 与点 A 关于直线 MN 对称， $FE = AD = 3$ ，

$\therefore MN$ 垂直平分 DE ， MN 垂直平分 AF ，

$\therefore DE \parallel AF$ ，

$\therefore \angle EDP = \angle FAP$ ，

$\therefore \angle CDP = \angle BAP$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle CDP - \angle EDP = \angle BAP - \angle FAP, \\
&\therefore \angle CDE = \angle BAF, \\
&\therefore FM = AM = BM, \\
&\therefore \angle BAF = \angle MFA, \angle ABF = \angle MFB, \\
&\therefore \angle BAF + \angle ABF = \angle MFA + \angle MFB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CBF + \angle ABF = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CBF = \angle BAF, \\
&\therefore \angle CBF = \angle CDE, \\
&\therefore EC \perp FC, \\
&\therefore \angle FCE = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BCF = \angle DCE = 90^\circ - \angle DCF, \\
&\therefore \triangle BCF \sim \triangle DCE, \\
&\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{BC}{DC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\
&\therefore CE = 2CF, \\
&\therefore FE = \sqrt{CF^2 + CE^2} = \sqrt{5}CF = 3, \\
&\therefore CF = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore CE = 2CF = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore FE + CF + CE = 3 + \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{15 + 9\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore \triangle ECF \text{ 的周长为 } \frac{15 + 9\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{15 + 9\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】 本题主要考查矩形的性质、翻折变换的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、三角形的周长等知识点，正确地作出辅助线是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 解不等式组:
$$\begin{cases} (x+2)(x-2) \leq (x-1)^2 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} < 3 + \frac{2x}{3} & \text{②} \end{cases};$$

【答案】 $-21 < x \leq \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式组，乘法公式的应用，先求出每个不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）”求出不等式组的解集即可.

【详解】 解:
$$\begin{cases} (x+2)(x-2) \leq (x-1)^2 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} < 3 + \frac{2x}{3} & \text{②} \end{cases},$$

由①得, $x \leq \frac{5}{2}$,

由②得, $x > -21$.

所以不等式组的解集为 $-21 < x \leq \frac{5}{2}$.

20. 先化简, 再求值: $\left(\frac{x+1}{x} - 1\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-x}$, 其中 $x = \sqrt{3} + 1$.

【答案】 $\frac{1}{x+1}$, $2 - \sqrt{3}$

【解析】

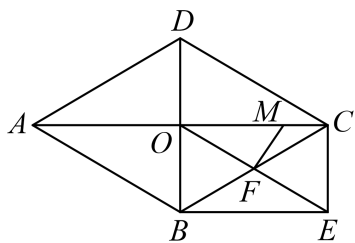
【分析】 本题考查了分式的化简求值, 分母有理化, 掌握运算法则是解题的关键.

先计算括号内分式减法运算, 再将除法化为乘法进行计算, 最后再代入, 分母有理化即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1}{x} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{1}{x+1}.$

把 $x = \sqrt{3} + 1$ 代入, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}.$

21. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 F 是 BC 的中点, 连接 OF 并延长到点 E , 使得 $EF = OF$, 连接 BE, CE .



(1) 求证：四边形 $OBEC$ 是矩形；

(2) 点 M 在 OC 边上，连接 MF ， $\angle OBC = \angle FOC + \angle MFC$ ， $AC = 10$ ， $BD = 6$ ．求 OM 的长．

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{17}{5}$

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的判定与性质、菱形的性质、相似三角形的判定和性质等知识点，灵活运用相关判定和性质定理是解题的关键．

(1) 根据菱形性质得 $AC \perp BD$ ，则 $\angle BOC = 90^\circ$ ，再根据点 F 是 BC 的中点， $EF = OF$ 得四边形 $OBEC$ 是平行四边形，再结合 $\angle BOC = 90^\circ$ 即可证明结论；

(2) 根据菱形性质得 $OC = \frac{1}{2}AC = 5$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = 3$ ，则 $BC = \sqrt{34}$ ，再根据矩形性质得

$OF = BF = CF = EF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{34}}{2}$ ， $OB \parallel CE$ ，证明 $\angle OMF = \angle CEO$ ，进而得 $\triangle OMF$ 和 $\triangle OCE$ 相

似，再利用相似三角形的性质即可求出 OM 的长即可．

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$ ，

$\because$ 点 F 是 BC 的中点，

$\therefore BF = CF$ ，

$\therefore EF = OF$ ，

$\therefore$ 四边形 $OBEC$ 是平行四边形，

又 $\because \angle BOC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $OBEC$ 是矩形；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC = 10$ ， $BD = 6$ ，

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = 5, \quad OB = \frac{1}{2}BD = 3, \quad OE = BC,$$

在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, 由勾股定理得: $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$,

$\therefore$ 四边形 $OBEC$ 是矩形;

$$\therefore OF = BF = CF = EF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{34}}{2}, \quad OB \parallel CE,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle BOE, \quad \angle BOE = \angle CEO,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle CEO,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle FOC + \angle MFC,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle FOC + \angle MFC,$$

$$\therefore OF = CF,$$

$$\therefore \angle FOC = \angle FCO,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle FCO + \angle MFC,$$

$\therefore \angle OMF$ 是 $\triangle MFC$ 的外角,

$$\therefore \angle OMF = \angle FCO + \angle MFC,$$

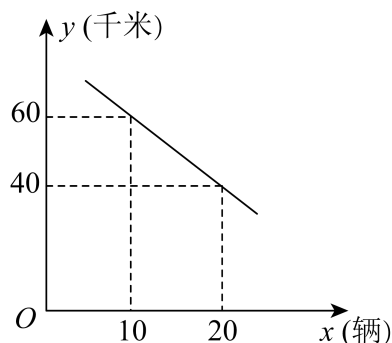
$$\therefore \angle OMF = \angle CEO,$$

又 $\therefore \angle FOM = \angle COB$,

$$\therefore \triangle OMF \sim \triangle OCE,$$

$$\therefore \frac{OM}{OE} = \frac{OF}{OC}, \quad \text{即} \quad \frac{OM}{\frac{\sqrt{34}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{34}}{2}}{5}, \quad \text{解得: } OM = \frac{17}{5}.$$

22. 某地区交通管理部门通过对道路流量的大数据分析可知, 某高架路上车辆的平均速度为 y (千米/时) 与高架路上每百米车的数量 x (辆) 的关系如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的取值范围;

(2) 如果某时刻监测到这一高架路上车辆的平均速度为 30 千米/时.

①求该时刻高架路上每百米车的数量;

②如果车辆的平均速度小于 20 千米/时, 高架路将严重拥堵, 需启动限流措施. 而此刻开始这一高架路上每百米车辆数每 4 分钟增加 1 辆, 为了避免严重拥堵, 那么最晚几分钟需启动限流措施?

【答案】(1) $y = -2x + 80$, $0 < x \leq 40$, 且 x 为整数;

(2) ①25 辆; ②20 分钟

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的实际应用, 一元一次不等式的实际应用, 正确求出对应的函数关系式是解题的关键.

(1) 设出函数解析式, 再根据函数图象利用待定系数法求解即可;

(2) ①根据 (1) 所求函数解析式, 令函数值为 30, 求出 x 的值即可得到答案; ②令函数值小于 20 求出 x 的取值范围, 再根据每百米车辆数每 4 分钟增加 1 辆和现在每百米车的数量为 25 辆列式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$,

把 $(10, 60), (20, 40)$ 代入 $y = kx + b$ 中得:
$$\begin{cases} 10k + b = 60 \\ 20k + b = 40 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} k = -2 \\ b = 80 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = -2x + 80$,

在 $y = -2x + 80$ 中, 当 $y = -2x + 80 = 0$ 时, $x = 40$,

$\therefore 0 < x \leq 40$, 且 x 为整数;

【小问 2 详解】

解: ①在 $y = -2x + 80$ 中, 当 $y = -2x + 80 = 30$ 时, $x = 25$,

$\therefore$ 该时刻高架路上每百米车的数量为 25 辆;

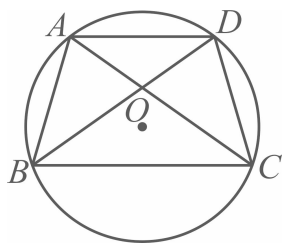
②由题意得, $-2x + 80 < 20$,

解得 $x > 30$,

$(30 - 25) \times 4 = 20$ 分钟,

答: 为了避免严重拥堵, 那么最晚 20 分钟需启动限流措施.

23. 已知, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $AC = BD$.



(1) 求证: $AD \parallel BC$;

(2) 小明说: 四边形 $ABCD$ 一定是等腰梯形, 你认为他的说法正确吗? 为什么?

(3) 如图所示, 已知 $AB = 10$, $AC = BC = 13$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 见解析 (2) 小明的说法不正确, 理由见解析

(3) $\frac{169}{24}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了圆的内接四边形的性质、圆周角定理、全等三角形的判定与性质、矩形的判定与性质等知识点, 灵活运用相关性质定理成为解题的关键.

(1) 根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle BAC = \angle BDC$ 、 $\angle ABC = \angle BCD$, 进而证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (AAS) 可得 $\angle BCA = \angle CBD$, 再根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle CAD = \angle CBD$, 由等量代换可得 $\angle CAD = \angle BCA$, 最后根据平行线的判定定理即可证明结论;

(2) 通过证明四边形 $ABCD$ 是矩形即可证明结论;

(3) 如图: 连接 CO 并延长交 AB 于点 E , 连接 OA . 由等腰三角形三线合一的形状可得 $AE = \frac{1}{2} AB = 5$,

利用勾股定理可得 $CE = 12$, 设该圆的半径为 r , 则 $OA = OC = r$, $OE = 12 - r$, 最后根据勾股定理列方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because BC = BC$, $AC = BD$,

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$, $\angle ABC = \angle BCD$,

$\therefore BC = BC$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$ (AAS),

$\therefore \angle BCA = \angle CBD$,

$\therefore CD = CD$,

$\therefore \angle CAD = \angle CBD$,

$\therefore \angle CAD = \angle BCA$,

$$\therefore AD \parallel BC;$$

【小问 2 详解】

解：小明的说法不正确，理由如下：

$$\because \triangle ABC \cong \triangle DCB,$$

$$\therefore AB = CD,$$

当 $AB \parallel CD$ 时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle BAD = \angle BCA,$$

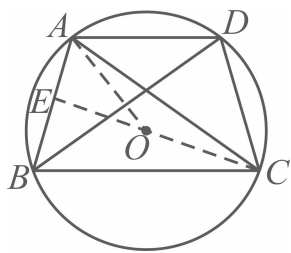
$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle BCA = 180^\circ, \text{ 即 } \angle BCA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，即小明的说法不正确.

【小问 3 详解】

解：如图：连接 CO 并延长交 AB 于点 E ，连接 OA .



$$\because AC = BC = 13,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 5, \quad CE \perp AB,$$

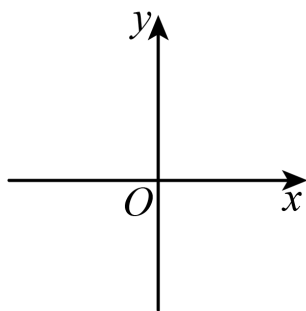
$$\therefore CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 12,$$

设该圆的半径为 r ，则 $OA = OC = r, OE = 12 - r$ ，

$$\because OA^2 = AE^2 + OE^2,$$

$$\therefore r^2 = 5^2 + (12 - r)^2, \text{ 解得: } r = \frac{169}{24}.$$

24. 已知抛物线 $y_1 = 4ax^2 + 8ax + m$ ， $y_2 = ax^2 - 4ax + n$ ($a > 0$) 的顶点分别为 A 、 B ，且它们都经过 y 轴上的点 C 。



- (1) 如果抛物线 y_1 经过点 $(-2, 2)$ ，抛物线 y_2 经过点 $(3, -1)$ ，求这两个抛物线的表达式；
- (2) 已知 $\angle OCB = 45^\circ$ ，求 a 的值；
- (3) 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时，能否确定系数 a 、 m 、 n 的值？如果能，请求出相应的值；如果不能，请简要说明理由。

【答案】(1) $y_1 = 4x^2 + 8x + 2$ ， $y_2 = x^2 - 4x + 2$

(2) $a = \frac{1}{2}$

(3) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ， m 、 n 的值不能确定，理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数综合，相似三角形的性质与判定，等腰直角三角形的性质与判定，利用数形结合的思想求解是解题的关键。

- (1) 先求出两个抛物线与 y 轴的交点坐标，进而得到 $m = n$ ，再利用待定系数法求解即可；
- (2) 先求出 $B(2, n - 4a)$ ， $C(0, n)$ ，再过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于 D ，连接 BC ，可证明 $\triangle BCD$ 是等腰直角三角形，得到 $CD = BD$ ，则 $|n - 4a - n| = 2$ ，据此求解即可；
- (3) 求出 $A(-1, m - 4a)$ ，则可得到 $AB \perp y$ 轴，设 AB 与 y 轴交于 D ，可证明 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ ，则可得到 $CD^2 = AD \cdot BD = 2$ ，据此可求出 a 的值，而 m 、 n 的值为任意实数，据此可得答案。

【小问 1 详解】

解：在 $y_1 = 4ax^2 + 8ax + m$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = m$ ，

在 $y_2 = ax^2 - 4ax + n$ ($a > 0$) 中，当 $x = 0$ 时， $y = n$ ，

$\because$ 两个抛物线都经过 y 轴上的点 C ，

$\therefore m = n$ ，

$\because$ 抛物线 $y_1 = 4ax^2 + 8ax + m$ 经过点 $(-2, 2)$ ，

$$\therefore 16a - 16a + m = 2,$$

$$\therefore m = n = 2,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y_2 = ax^2 - 4ax + n (a > 0) \text{ 经过点 } (3, -1),$$

$$\therefore 9a - 12a + 2 = -1,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore \text{两个抛物线的解析式分别为 } y_1 = 4x^2 + 8x + 2, \quad y_2 = x^2 - 4x + 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because y_2 = ax^2 - 4ax + n = a(x-2)^2 + n - 4a,$$

$$\therefore B(2, n - 4a),$$

$$\text{在 } y_2 = ax^2 - 4ax + n (a > 0) \text{ 中, 当 } x = 0 \text{ 时, } y = n,$$

$$\therefore C(0, n),$$

如图所示, 过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于 D , 连接 BC ,

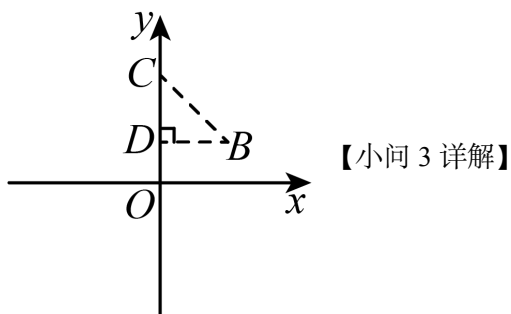
$$\therefore \angle OCB = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BCD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CD = BD,$$

$$\therefore |n - 4a - n| = 2,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{ 或 } a = -\frac{1}{2} \text{ (舍去);}$$



$$\text{解: } a = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ } m、n \text{ 的值不能确定, 理由如下:}$$

$$\therefore y_1 = 4ax^2 + 8ax + m = 4a(x+1)^2 + m - 4a,$$

$$\therefore A(-1, m - 4a),$$

由 (1) 得 $m=n$ ，由 (2) 得 $B(2, n-4a)$ ，

$\therefore$ 点 A 与点 B 的纵坐标相同，

$\therefore AB \perp y$ 轴，

设 AB 与 y 轴交于 D ，

$\therefore \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$ ，

$\therefore AD=1, BD=2, CD=|n-4a-n|=4a$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC + \angle DCA = \angle DCA + \angle DCB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle DCB$ ，

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle CDB$ ，

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore CD^2 = AD \cdot BD = 2,$$

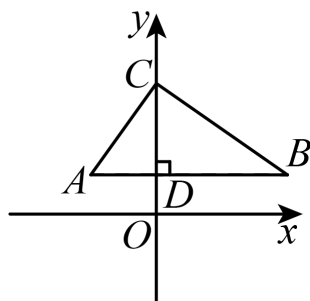
$$\therefore (4a)^2 = 2,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 或 } a = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ (舍去);}$$

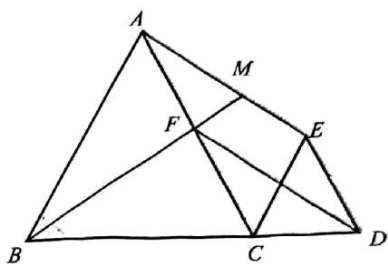
$\therefore$ 当 $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，都能满足 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore m、n$ 为任意实数，

$\therefore m、n$ 的值不能确定.



25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 在 BC 的延长线上， $CE \parallel AB$ ， $DE \parallel AC$ ，点 F 在边 AC 上， $FD \parallel AE$ ， BF 的延长线交线段 AE 于点 M 。



(1) 求证: $\triangle ABF \cong \triangle CAE$;

(2) 当点 M 是 AE 的中点时, 求证: $BF^2 = 4BM \cdot FM$;

(3) 已知 $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC = 2$, 设 $CD = x$, $\frac{EM}{AM} = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的取值范围.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $y = \frac{4-2x-x^2}{2x}$, x 的取值范围为 $0 < x < \sqrt{5} - 1$.

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、解直角三角形等知识点, 灵活运用相似三角形的判定与性质成为解题的关键.

(1) 先证明四边形 $AFDE$ 是平行四边形可得 $AF = DE$, 再根据平行线的性质以及等腰三角形的判定定理可得 $CE = AF$, 再根据平行线的性质可得 $\angle ACE = \angle BAC$, 然后根据“边角边”即可证明结论;

(2) 由中点的定义可得 $AM = EM$, 由 $\triangle ABF \cong \triangle CAE$ (SAS) 可得 $AM = \frac{1}{2}BF$, 再证明 $\triangle AMB \sim \triangle FMA$, 然后根据相似三角形的性质列比例式化简即可证明结论;

(3) 如图, 延长 BM 交 CE 的延长线于点 N , 过 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过 E 作 $EG \perp CD$ 于点 G , 根据题意求出 $CE = AF = DE = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 、 $CF = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}x}{2}$ 根据平行线分线段成比例, 列出比例式, 求出 CE 、 EN

即可得到关系式; 然后再根据 $x > 0, y > 0$ 确定 x 的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解: $\because DE \parallel AC$,

$\therefore DE \parallel AF$,

$\therefore FD \parallel AE$,

$\therefore$ 四边形 $AFDE$ 是平行四边形,

$$\begin{aligned}
&\therefore AF = DE, \\
&\therefore AB = AC, \\
&\therefore \angle ABC = \angle BCA, \\
&\therefore DE \parallel AC, \\
&\therefore \angle EDC = \angle ACB, \\
&\therefore CE \parallel AB, \\
&\therefore \angle DCE = \angle ABC, \\
&\therefore \angle EDC = \angle ECD, \\
&\therefore CE = DE, \text{ 即 } CE = AF, \\
&\therefore CE \parallel AB, \\
&\therefore \angle ACE = \angle BAC,
\end{aligned}$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} AB = CA \\ \angle BAC = \angle ACE, \\ AF = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CAE (\text{SAS}).$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 M 是 AE 的中点,

$$\therefore AM = EM,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CAE, \quad AE = BF, \quad \text{即 } AM = \frac{1}{2}BF,$$

$$\therefore \angle AMF = \angle AMB,$$

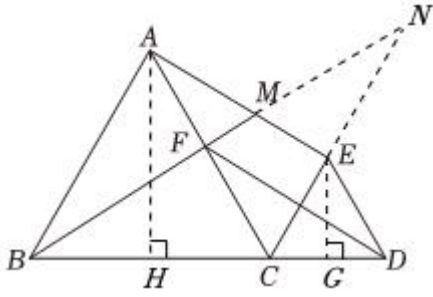
$$\therefore \triangle AMB \sim \triangle FMA,$$

$$\therefore \frac{AM}{FM} = \frac{BM}{MA}, \quad \text{即 } \frac{\frac{1}{2}BF}{FM} = \frac{BM}{\frac{1}{2}BF},$$

$$\therefore \frac{1}{4}BF^2 = BM \cdot FM, \quad \text{即 } BF^2 = 4BM \cdot FM.$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 延长 BM 交 CE 的延长线于点 N , 过 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过 E 作 $EG \perp CD$ 于点 G ,



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\because \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \frac{1}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得: } AC = AB = \sqrt{5},$$

$$\because ED \parallel AC, AB \parallel CE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle EDC, \angle ABC = \angle ECD,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{AC}, \text{ 即 } \frac{x}{2} = \frac{DE}{\sqrt{5}}, \text{ 解得: } DE = \frac{\sqrt{5}}{2}x,$$

$$\therefore CE = AF = DE = \frac{\sqrt{5}}{2}x,$$

$$\therefore CF = AC - AF = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}x}{2},$$

$$\because CN \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CN}{AB} = \frac{CF}{AF}, \text{ 即 } \frac{CN}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}x}{2}}{\frac{\sqrt{5}x}{2}}, \text{ 解得: } CN = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5}x}{x},$$

$$\therefore EN = CN - CE = \frac{\sqrt{5}(2-x)}{x} - \frac{\sqrt{5}x}{2} = \frac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2}{2x},$$

$$\therefore y = \frac{EM}{AM} = \frac{EN}{AB} = \frac{4 - 2x - x^2}{2x},$$

$$\because y > 0 \text{ (比值)}, x > 0$$

$$\therefore \begin{cases} 4 - 2x - x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ 解得: } 0 < x < \sqrt{5} - 1.$$

$$\therefore y = \frac{4 - 2x - x^2}{2x}, x \text{ 的取值范围为 } 0 < x < \sqrt{5} - 1.$$