

2024 学年第二学期九年级学业质量调研

数学试卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

2025. 04

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 代数式 $4ab^2$ 的次数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式次数为所有字母的指数之和解答即可.

此题主要考查了单项式的次数, 根据定义直接判断得出是解题关键.

【详解】解: 代数式 $4ab^2$ 的次数是 3.

故选: C.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3a}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6a}$ B. $\sqrt{9a^3}$ C. $\sqrt{\frac{a}{3}}$ D. $\sqrt{18a^3}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查同类二次根式的判断, 先将各选项化简, 再找到被开方数为 $3a$ 的选项即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{6a}$ 与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同, 故不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{9a^3} = 3a\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同, 故不是同类二次根式;

C、 $\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数相同, 故是同类二次根式;

D、 $\sqrt{18a^3} = 3a\sqrt{2a}$ 与 $3a$ 的被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选 C.

3. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是 ()

A. $m \leq 1$

B. $m \leq -1$

C. $m \geq 1$

D. $m < 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta \geq 0$ ，即可得出关于 m 的一元一次不等式，解之即可得出实数 m 的取值范围.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m \geq 0,$$

解得： $m \leq 1$.

故选：A.

【点睛】本题考查了根的判别式，牢记“当 $\Delta \geq 0$ 时，方程有实数根”是解题的关键.

4. 在一组数据 4, 6, 2, 4 中，如果再添加一个数据 4，那么发生变化的统计量是 ()

A. 平均数

B. 中位数

C. 众数

D. 方差

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查平均数、中位数、众数、方差. 依据的定义和公式分别计算新旧两组数据的平均数、中位数、众数、方差求解即可.

【详解】解：原数据从小到大排列为 2、4、4、6，

$$\text{平均数为 } \frac{2+4+4+6}{4} = 4,$$

$$\text{中位数为 } \frac{4+4}{2} = 4,$$

众数为 4，

$$\text{方差为 } \frac{[(2-4)^2 + 2 \times (4-4)^2 + (6-4)^2]}{4} = 2;$$

新数据从小到大排列为 2、4、4、4、6，

$$\text{平均数为 } \frac{2+4+4+4+6}{5} = 4,$$

中位数为 4，

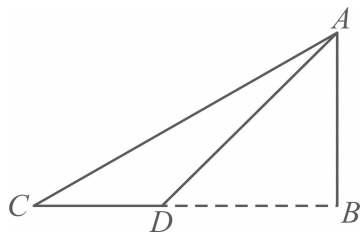
众数为 4,

$$\text{方差为 } \frac{[(2-4)^2 + 3 \times (4-4)^2 + (6-4)^2]}{5} = 1.6;$$

∴ 添加一个数据 4, 方差发生变化.

故选: D.

5. 如图, 河对岸有一座建筑物 AB , 在 C, D (C, D, B 在同一直线上) 处用测角仪器分别测得顶部 A 的仰角为 $30^\circ, 45^\circ$. 已知 $CD = 30$ 米, 建筑物 AB 高是 ()



- A. $(15\sqrt{3} + 15)$ 米 B. $(15\sqrt{3} - 15)$ 米 C. $(9 + 3\sqrt{3})$ 米 D. $(9 - 3\sqrt{3})$ 米

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据题意, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中得到 $BD = AB$, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中表示出 BC , 利用 $CD = BC - BD$, 求得结果.

本题考查了解直角三角形的应用, 熟练掌握解直角三角形是解题的关键.

【详解】 解: 设 $AB = xm$,

∵ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 45^\circ$,

∴ $BD = AB = x(m)$,

∵ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 30^\circ$, $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{x}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore CD = BC - BD, \quad CD = 30\text{cm},$$

$$\therefore \sqrt{3}x - x = 30,$$

解得 $x = 15\sqrt{3} + 15$, 即 $AB = 15\sqrt{3} + 15(m)$,

故选: A.

6. 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 有交点, 圆心距 $O_1O_2 = 2$ 如果 $\odot O_1$ 的半径 $r_1 = 5$, 那么 $\odot O_2$ 的半径为 r_2 的取值范围是 ()

- A. $3 < r_1 < 7$ B. $3 \leq r_2 < 7$ C. $3 < r_2 \leq 7$ D. $3 \leq r_2 \leq 7$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查圆与圆相交时, 圆心距与半径的关系.

根据圆心距与半径之和, 半径之差的关系即可得到答案.

【详解】由题意可知: $5 - 2 \leq r_2 \leq 5 + 2$,

解得: $3 \leq r_2 \leq 7$.

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 计算: $(-3a)^2 =$ _____.

【答案】 $9a^2$

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方, 根据积的乘方法则计算即可.

【详解】解: $(-3a)^2 = (-3)^2 \cdot a^2 = 9a^2$.

故答案为: $9a^2$

8. 分解因式: $2a^2 - 32 =$ _____.

【答案】 $2(a+4)(a-4)$

【解析】

【分析】先提公因式, 再用平方差公式分解即可.

【详解】解: $2a^2 - 32 = 2(a^2 - 16) = 2(a+4)(a-4)$.

故答案为: $2(a+4)(a-4)$.

【点睛】因式分解时, 要牢记“一提二看三检查”步骤.

9. 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 1$.

【解析】

【详解】 试题分析：由题意得， $x - 1 \neq 0$ ，解得 $x \neq 1$ 。故答案为 $x \neq 1$ 。

考点：函数自变量的取值范围。

10. 方程 $\sqrt{x-2} = 2$ 的根是_____。

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，掌握解方程的步骤是解题的关键。

先两边平方，化为整式方程，再求解，注意解无理方程与分式方程一样需要检验。

【详解】 解： $\sqrt{x-2} = 2$

$$x - 2 = 4,$$

解得： $x = 6$,

经检验： $x = 6$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 6$,

故答案为： $x = 6$ 。

11. 不等式 $\frac{1}{2}x - 1 > 2$ 的解集是_____。

【答案】 $x > 6$

【解析】

【分析】 此题考查求不等式的解集，根据解一元一次不等式的步骤求解集即可，熟练掌握一元一次不等式的解法是解题的关键。

【详解】 解：两边都加 1，得 $\frac{1}{2}x > 3$,

不等式两边都乘以 2，得 $x > 6$,

故答案为 $x > 6$ 。

12. 据统计，2025 年清明假期 4 月 4 日至 6 日，蟠龙天地、和睦村等旅游景区共接待游客 76.75 万人次。76.75 万人次用科学记数法表示为 _____ 人次。

【答案】 7.675×10^5

【解析】

【分析】本题考查用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 可以用整数位数减去 1 来确定．用科学记数法表示数，一定要注意 a 的形式，以及指数 n 的确定方法．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数．根据科学记数法的表示方法进行解答即可．

【详解】解：76.75 万用科学记数法表示为 7.675×10^5 ．

故答案为： 7.675×10^5 ．

13. 某工厂今年三月份的产值是 90 万元，调整生产线后，计划五月份的产值要达到 120 万元．如果每月产值的增长率相同，设这个增长率为 x ，那么依题意可列方程为_____．

【答案】 $90(1+x)^2 = 120$

【解析】

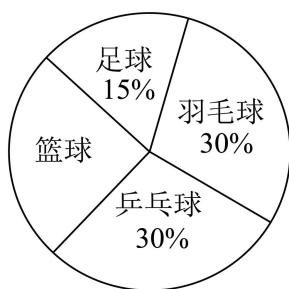
【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，解题的关键是找出题目中的等量关系式．设这个增长率为 x ，那么四月份产值为 $90(1+x)$ ，五月份产值为 $90(1+x)^2$ ，然后根据五月份的产值要达到 120 万元，列出方程即可．

【详解】解：设这个增长率为 x ，那么有

$$90(1+x)^2 = 120$$

故答案为： $90(1+x)^2 = 120$ ．

14. 某学校对学生课余时间经常参加的四种球类运动情况做了调查，并将调查数据整理后绘制成如图所示的不完整的扇形统计图．如果参加篮球运动的人数为 80 人，那么该校参加各种球类运动的学生共有_____人．



【答案】 320

【解析】

【分析】用参加篮球运动的人数除以扇形统计图中篮球的百分比可得答案．

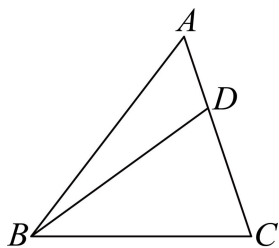
本题考查扇形统计图，能够读懂统计图是解答本题的关键．

【详解】解： $80 \div (1 - 15\% - 30\% - 30\%) = 320$ (人).

$\therefore$ 该校参加各种球类运动的学生共有 320 人.

故答案为：320.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AC = 3AD$. 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BD}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式为_____.



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量，找到向量关系是解题的关键.

首先由向量的知识，得到 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 的值，即可得到 $\overrightarrow{BD}$ 的值.

【详解】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AC = 3AD$.

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\text{故答案为} \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$$

16. 在同圆中，圆内接正三角形的边长与圆内接正六边形的边长的比值是_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

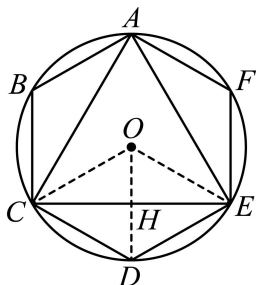
【解析】

【分析】 设六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，则 $\triangle ACE$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，连接 OC ， OD ， OE ，设 OD 交 CE 于点 H ，证明 $\triangle OCD$ 和 $\triangle ODE$ 均为正三角形，则 $\angle OCD = \angle COD = 60^\circ$ ， $CD = OC = OD$ ，根据垂径定理得 $OD \perp CE$ ， $CH = HE$ ，则 $\angle OCH = \frac{1}{2}\angle OCD = 30^\circ$ ，设 $OH = a$ ，则 $OC = CD = 2a$ ，

$CH = \sqrt{3}a$ ，进而得 $CE = 2\sqrt{3}a$ ，据此求出 $\frac{CE}{CD}$ 的值即可得出答案.

此题主要考查了等边三角形的性质，圆内接正多边形的性质，熟练掌握等边三角形的性质，圆内接正多边形的性质是解决问题的关键.

【详解】解：设六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，则 $\triangle ACE$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，连接 OC ， OD ， OE ，设 OD 交 CE 于点 H ，如图所示：



$$\therefore \angle COD = \angle DOE = 360^\circ \div 6 = 60^\circ, \quad CD = DE,$$

$$\therefore OD = OD = OE,$$

$$\therefore \triangle OCD \text{ 和 } \triangle ODE \text{ 均为正三角形},$$

$$\therefore \angle OCD = \angle COD = 60^\circ, \quad CD = OC = OD,$$

$$\therefore CD = DE,$$

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{DE},$$

根据垂径定理得： $OD \perp CE$ ， $CH = HE$ ，

$$\therefore \angle OCH = \frac{1}{2} \angle OCD = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中，设 $OH = a$ ，

$$\therefore OC = CD = 2a,$$

$$\text{由勾股定理得： } CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a,$$

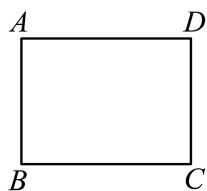
$$\therefore CE = 2CH = 2\sqrt{3}a,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{2\sqrt{3}a}{2a} = \sqrt{3},$$

即在同圆中，圆内接正三角形的边长与圆内接正六边形的边长的比值是 $\sqrt{3}$ 。

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 旋转，点 B 、 C 、 D 落在点 B_1 、 C_1 、 D_1 处、如果点 B_1 落在直线 AC 上，那么 $BB_1 =$ _____.



【答案】 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】作 $BE \perp AC$ 于点 E ，由 $\angle ABC = 90^\circ, AB = 3, BC = 4$ ，求得 $AC = 5$ ，由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5BE = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ ，求得 $BE = \frac{12}{5}$ ，则 $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \frac{9}{5}$ ，再分两种情况讨论，一是点 B_1

落在线段 AC 上，由旋转得 $AB_1 = AB = 3$ ，则 $EB_1 = AB_1 - AE = \frac{6}{5}$ ，求得 $BB_1 = \sqrt{BE^2 + EB_1^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ；

二是点 B_1 落在线段 AC 延长线上，则 $EB_1 = AB_1 + AE = \frac{24}{5}$ ，求得 $BB_1 = \sqrt{BE^2 + EB_1^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，于是得

到问题的答案.

【详解】解：作 $BE \perp AC$ 于点 E ，则 $\angle AEB = \angle BEC = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 3, BC = 4$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5BE = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ ，

$\therefore BE = \frac{12}{5}$ ，

$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \frac{9}{5}$ ，

如图 1，点 B_1 落在线段 AC 上，

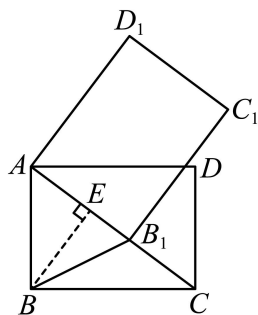


图1

由旋转得 $AB_1 = AB = 3$,

$$\therefore EB_1 = AB_1 - AE = \frac{6}{5},$$

$$\therefore BB_1 = \sqrt{BE^2 + EB_1^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5};$$

如图 2, 点 B_1 落在线段 AC 延长线上,

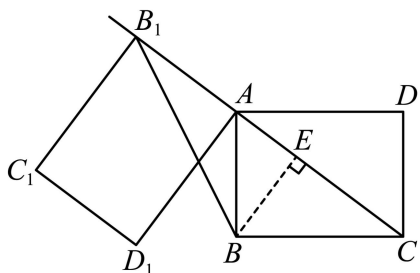


图2

由旋转得 $AB_1 = AB = 3$,

$$\therefore EB_1 = AB_1 + AE = \frac{24}{5},$$

$$\therefore BB_1 = \sqrt{BE^2 + EB_1^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

综上所述, BB_1 的长为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$,

故答案为: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】此题重点考查矩形的性质、勾股定理、旋转的性质、根据面积等式求线段的长度、分类讨论数学思想的运用等知识与方法, 正确地进行分类讨论并且画出相应的图形是解题的关键.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 - 4x + t$ ($t < 0$) 及点 $A(0, 1)$ 、 $B(2t + 5, t)$. 如果线段 AB 与抛物线有交点, 那么 t 的取值范围是_____.

【答案】 $t \leq -\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq t < 0$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图像与性质, 二次函数点的坐标特征, 一元二次方程, 熟练掌握以上知识点并数形结合是解题的关键. 由 $y = x^2 - 4x + t = (x - 2)^2 + t - 4$, 那么该抛物线开口向上, 对称轴为 $x = 2$, 交 y 轴负半轴, 当该抛物线过点 $B(2t + 5, t)$ 时, 可算得 $t = -\frac{1}{2}$, $t = -\frac{5}{2}$, 那么当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $B(4, -\frac{1}{2})$;

当 $t = -\frac{5}{2}$ 时, $B(0, -\frac{5}{2})$, 由线段 AB 与抛物线有交点, 那么 B 点在 $(4, -\frac{1}{2})$ 的右侧, 或者 B 点在 $(0, -\frac{5}{2})$ 的左侧时均满足条件, 然后列出不等式, 即可得到答案.

【详解】解: $\because y = x^2 - 4x + t = (x - 2)^2 + t - 4$ ($t < 0$)

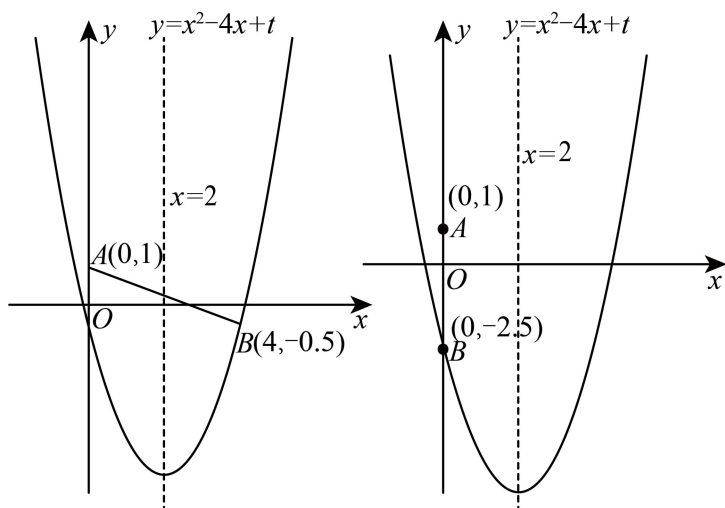
$\therefore$ 该抛物线开口向上, 对称轴为 $x = 2$, 交 y 轴负半轴,

当该抛物线过点 $B(2t + 5, t)$ 时,

$$\therefore t = (2t + 5 - 2)^2 + t - 4,$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2}, \quad t = -\frac{5}{2},$$

当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $B(4, -\frac{1}{2})$; 当 $t = -\frac{5}{2}$ 时, $B(0, -\frac{5}{2})$, 如图所示,



$\because$ 线段 AB 与抛物线有交点,

$\therefore B$ 点在 $(4, -\frac{1}{2})$ 的右侧, 或者 B 点在 $(0, -\frac{5}{2})$ 的左侧时均满足条件,

$$\therefore 2t + 5 \leq 0 \text{ 或 } 2t + 5 \geq 4,$$

$$\therefore t \leq -\frac{5}{2} \text{ 或 } t \geq -\frac{1}{2},$$

$\because t < 0$,

$$\therefore t \leq -\frac{5}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq t < 0.$$

故答案为: $t \leq -\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq t < 0$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |\sqrt{3} - 2| + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - 27^{\frac{1}{2}}$.

【答案】 $3 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，根据负整数指数幂，绝对值，分数指数幂及二次根式的运算法则计算，再合并同类二次根式即可.

【详解】 解: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |\sqrt{3} - 2| + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - 27^{\frac{1}{2}}$

$$= 4 - (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3}$$

$$= 4 - 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3}$$

$$= 3 - \sqrt{3}.$$

20. 解方程组: $\begin{cases} x^2 + 2y - 2 = 0 \text{ ①} \\ x - y + 1 = 0 \text{ ②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，变形组中的方程②代入①，得一元二次方程，求解得出一个未知数的值，再代入变形后的方程求得另一个未知数的值.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 + 2y - 2 = 0 \text{ ①} \\ x - y + 1 = 0 \text{ ②} \end{cases},$

由②得, $x = y - 1$ ③,

把③代入①, 得 $(y - 1)^2 + 2y - 2 = 0,$

整理, 得 $y^2 = 1.$

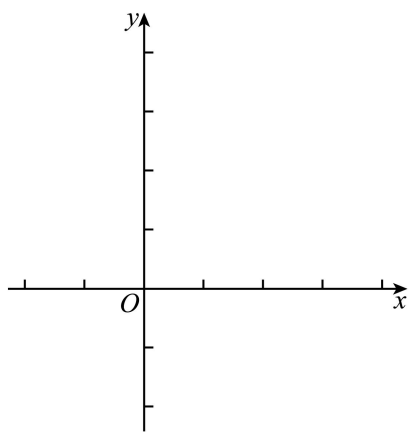
解得 $y_1 = 1, y_2 = -1,$

将 $y_1 = 1$ 代入③, 得 $x_1 = 0;$

将 $y_2 = -1$ 代入③, 得 $x_2 = -2.$

所以，原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$.

21. 已知：在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = k_1x + b$ ($k_1 \neq 0$) 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$) 的图像交于 $A(-2, 4)$ 、 $B(4, n)$ 两点.



(1) 求一次函数的表达式;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】 (1) $y = -x + 2$

(2) 6

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式，待定系数法求一次函数解析式，一次函数与坐标轴的交点，三角形的面积求解，熟练掌握以上知识点是解题的关键.

(1) 利用待定系数法可求得反比例函数解析式，将点 $B(4, n)$ 代入反比例函数，得到 B 点坐标，然后将点 $A(-2, 4)$ 、 $B(4, -2)$ 分别代入一次函数 $y = k_1x + b$ ，解方程组即可；

(2) 先求得一次函数 $y = -x + 2$ 的图像与 x 轴交点为 $C(2, 0)$ ，然后利用 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ ，即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：将点 $A(-2, 4)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ ，得 $4 = \frac{k_2}{-2}$ ，解得 $k_2 = -8$ ，

$$\therefore y = -\frac{8}{x},$$

将点 $B(4, n)$ 代入反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ ，得 $n = -\frac{8}{4} = -2$ ，

$$\therefore B(4, -2),$$

将点 $A(-2, 4)$ 、 $B(4, -2)$ 分别代入一次函数 $y = k_1x + b$ ，得 $\begin{cases} -2k_1 + b = 4 \\ 4k_1 + b = -2 \end{cases}$.

解这个方程组，得 $\begin{cases} k_1 = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = -x + 2$;

【小问 2 详解】

解：当 $y = 0$ 时，代入 $y = -x + 2$ ，得到 $x = 2$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = -x + 2$ 的图像与 x 轴交点 $C(2, 0)$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 6.$$

22. 已知：图 1、图 2 中的网格均为边长相同的小正方形组成. 点 A 、 B 、 C 、 E 、 F 、 G 是网格的格点.

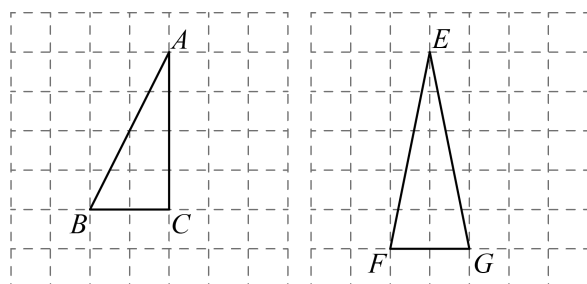


图1

图2

(1) 请利用网格，仅用无刻度的直尺完成下面的作图：(不写作法，保留作图痕迹，写出作图结果)

①在图 1 中，作出 $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ；

②在图 2 中，作出 $\triangle EFG$ 的重心 O ；

(2) 利用②的作图结果，求 $\sin \angle OFG$ 的值.

【答案】 (1) ①见详解；②见详解

$$(2) \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

【解析】

【分析】 (1) ①利用网格直接画图即可.

②结合三角形的重心的定义，取 FG 的中点 M ， EG 的中点 H ，连接 EM ， FH 相交于点 O ，则点 O 即为所求.

(2) 由图可得, $\sin \angle OFG = \sin \angle NFK = \frac{NK}{FN}$, 结合勾股定理求出 FN 的长, 进而可得答案.

【小问 1 详解】

解: ①如图 1, CD 即为所求.

②如图 2, 取 FG 的中点 M , EG 的中点 H , 连接 EM , FH 相交于点 O ,

则点 O 即为所求.

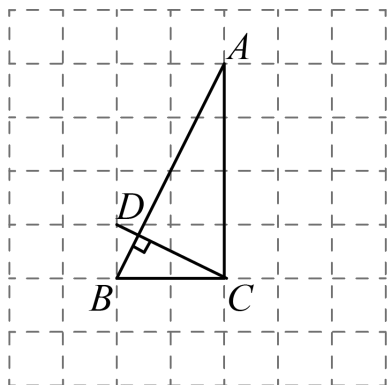


图1

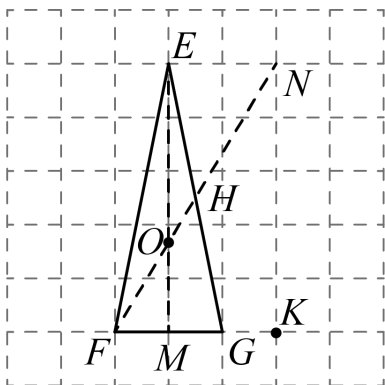


图2

【小问 2 详解】

由图可得, $\sin \angle OFG = \sin \angle NFK = \frac{NK}{FN}$.

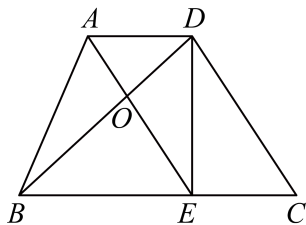
由勾股定理得, $FN = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$,

$$\therefore \frac{NK}{FN} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34},$$

$$\therefore \sin \angle OFG \text{ 的值为 } \frac{5\sqrt{34}}{34}.$$

【点睛】 本题考查作图—应用与设计作图、三角形的重心、解直角三角形, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

23. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 是 BC 上一点, 且 $OA \cdot BE = OE \cdot CE$.



(1) 求证: 四边形 $AECD$ 是平行四边形;

(2) 如果 $\angle BDE = \angle DAE$, 求证: $OB \cdot CD = BE \cdot DE$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定与性质，三角形相似的判定与性质，平行的判定与性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键.

(1) 通过 $AD \parallel BC$ ，证明 $\triangle ADO \sim \triangle EBO$ ，得到 $\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB}$ ，结合 $OA \cdot BE = OE \cdot CE$ ，即 $\frac{OA}{OE} = \frac{CE}{BE}$ ，

推出 $\frac{OD}{OB} = \frac{CE}{BE}$ ，从而得到 $\frac{BD}{OB} = \frac{BC}{BE}$ ，结合 $\angle OBE = \angle DBC$ ，推出 $\triangle OBE \sim \triangle DBC$ ，那么

$\angle BOE = \angle BDC$ ，得到 $OE \parallel CD$ ，即 $AE \parallel CD$ ，最后结合 $AD \parallel BC$ 从而得证；

(2) 先证明 $\triangle DOE \sim \triangle ADE$ ，得到 $\frac{DE}{AE} = \frac{OD}{AD}$ ，再证明 $\triangle ADO \sim \triangle EBO$ ，得到 $\frac{OD}{AD} = \frac{OB}{BE}$ ，那么 $\frac{DE}{AE} = \frac{OB}{BE}$ ，

由四边形 $AECD$ 是平行四边形，可知 $AE = CD$ ，从而有 $\frac{DE}{CD} = \frac{OB}{BE}$ ，最后得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADO = \angle EBO, \quad \angle DAO = \angle BEO,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle EBO,$$

$$\therefore \frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB},$$

$$\because OA \cdot BE = OE \cdot CE,$$

$$\therefore \frac{OA}{OE} = \frac{CE}{BE}.$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{CE}{BE}.$$

$$\therefore \frac{OD + OB}{OB} = \frac{CE + BE}{BE}$$

$$\therefore \frac{BD}{OB} = \frac{BC}{BE}$$

$$\text{又 } \angle OBE = \angle DBC$$

$$\therefore \triangle OBE \sim \triangle DBC$$

$$\therefore \angle BOE = \angle BDC$$

$$\therefore OE \parallel CD, \text{ 即 } AE \parallel CD.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

∴ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

证明: ∵ $\angle BDE = \angle DAE$, $\angle OED = \angle DEA$,

∴ $\triangle DOE \sim \triangle ADE$.

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OD}{AD}.$$

∵ $AD \parallel BC$,

∴ $\angle ADO = \angle EBO$, $\angle DAO = \angle BEO$,

∴ $\triangle ADO \sim \triangle EBO$,

$$\therefore \frac{OD}{AD} = \frac{OB}{BE}.$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OB}{BE}.$$

∴ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

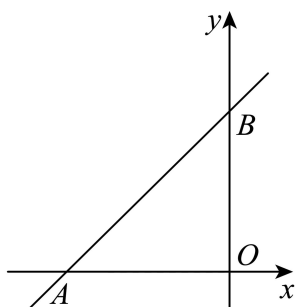
∴ $AE = CD$.

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{OB}{BE}.$$

即 $OB \cdot CD = BE \cdot DE$.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 抛物线 L_1 :

$y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点, 顶点为点 P , 对称轴是直线 $x = -3$.



(1) 求抛物线 L_1 的表达式;

(2) 点 Q 在第二象限, 且在抛物线的对称轴上, 如果 $\angle POQ = 45^\circ$, 求点 Q 的坐标;

(3) 将抛物线 L_1 平移, 得到抛物线 L_2 , 平移后, 抛物线 L_1 上的点 A 、 P 落在点 M 、 N 处, $PN \parallel AB$,

$PM \parallel AO$ ，求平移后的抛物线 L_2 的表达式.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

(2) $\left(-3, \frac{15}{7}\right)$

(3) $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - 1$

【解析】

【分析】(1) 由一次函数解析式得 $A(-4, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，再根据待定系数法解答即可求解；

(2) 由二次函数解析式得顶点 P 的坐标是 $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ ，在对称轴 $x = -3$ 上取点 $E(-3, 3)$ ，对称轴与 x 轴的交点记为点 H ，可得 $\angle EOH = \angle HEO = 45^\circ$ ， $OE = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，即得 $\angle EOQ = \angle POH$ ，过点 Q 作 $QG \perp OE$ ，垂足为点 G ，则 $QG = EG$ ，由锐角三角函数得 $\tan \angle EOQ = \tan \angle POH = \frac{HP}{OH} = \frac{1}{6}$ ，设 $QG = EG = x$ ，则 $OG = 6x$ ，由 $EG + OG = OE$ 可得 $x = \frac{3}{7}\sqrt{2}$ ，即得到 $EG = \frac{3}{7}\sqrt{2}$ ， $QE = \sqrt{2}EG = \frac{6}{7}$ ，即得 $QH = HE - QE = \frac{15}{7}$ ，即可求解；

(3) 由 $PN \parallel AB$ ， $PM \parallel AO$ 得点 M 在射线 BA 上，且点 M 的纵坐标与点 P 相同，为 $-\frac{1}{2}$ ，即可得点 M 的横坐标为 $-\frac{9}{2}$ ，得到点 A 向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，再向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到点 M ，据此得到点 N 的坐标 $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 直线 $y = x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，

$\therefore A(-4, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，

又 $\because$ 对称轴是直线 $x = -3$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ c = 4 \\ -\frac{b}{2a} = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore L_1$ 的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$;

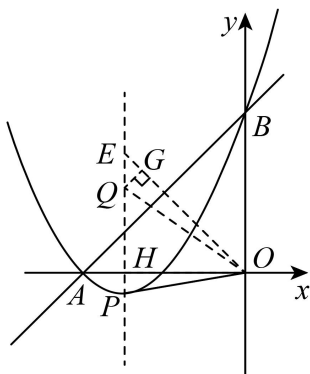
【小问 2 详解】

解: $\because$ 抛物线 L_1 的对称轴是直线 $x = -3$,

当 $x = -3$ 时, $y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 + 3 \times (-3) + 4 = -\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 顶点 P 的坐标是 $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$,

在对称轴 $x = -3$ 上取点 $E(-3, 3)$, 对称轴与 x 轴的交点记为点 H ,



在 $\text{Rt}\triangle EOH$ 中, $\because OH = EH = 3$, $\angle OHE = 90^\circ$,

$\therefore \angle EOH = \angle HEO = 45^\circ$, $OE = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore \angle POQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle EOH = \angle POQ$,

$\because$ 点 P 在 x 轴的下方,

$\therefore$ 点 Q 在线段 EH 上,

$\therefore \angle EOQ = \angle POH$,

过点 Q 作 $QG \perp OE$, 垂足为点 G , 则 $QG = EG$,

$\because \tan \angle POH = \frac{HP}{OH} = \frac{1}{6}$,

$\therefore \tan \angle EOQ = \frac{1}{6}$,

设 $QG = EG = x$, 则 $OG = 6x$,

$\therefore EG + OG = OE$,

$$\therefore x + 6x = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore x = \frac{3}{7}\sqrt{2},$$

$$\text{即 } EG = \frac{3}{7}\sqrt{2},$$

$$\therefore QE = \sqrt{2}EG = \sqrt{2} \times \frac{3}{7}\sqrt{2} = \frac{6}{7},$$

$$\therefore QH = HE - QE = 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(-3, \frac{15}{7}\right);$$

【小问 3 详解】

解: $\because PN \parallel AB, PM \parallel AO,$

$\therefore$ 点 M 在射线 BA 上, 且点 M 的纵坐标与点 P 相同, 为 $-\frac{1}{2},$

将 $y = -\frac{1}{2}$ 代入直线 $y = x + 4,$ 得 $-\frac{1}{2} = x + 4,$

解得 $x = -\frac{9}{2},$

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 $-\frac{9}{2},$

$\therefore$ 点 A 向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位, 再向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到点 $M,$

$\therefore$ 点 P 向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位, 再向下平移 $\frac{1}{2}$ 得到点 $N,$

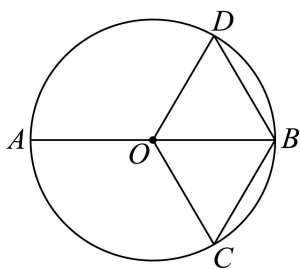
$\therefore$ 点 N 的坐标 $\left(-\frac{7}{2}, -1\right),$

$\therefore$ 平移后的抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - 1.$

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数的几何应用, 等腰直角三角形的性质, 锐角三角函数, 二次函数的平移等, 正确画出图形并作出辅助线是解题的关键.

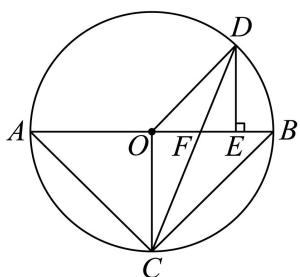
25. 已知: AB 为 $\odot O$ 的直径, $AB = 5,$ 点 C 在 $\odot O$ 上. 联结 $OC, BC,$ 过点 O 作 $OD \parallel BC,$ 交 $\odot O$ 于点 $D.$

(1) 如图, 联结 $DB,$ 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时, 求证: 四边形 $OCBD$ 是菱形;

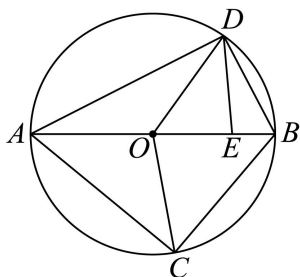


(2) 作 $DE \perp OB$ ，垂足为 E 。

①如图，联结 AC 、 DC ， DC 交半径 OB 于点 F ，当 $\angle OCD = \frac{1}{2} \angle CAB$ 时，求线段 EF 的长；



②如图，联结 AC 、 AD 、 DB ，设 $\triangle ODE$ 的面积为 S_1 ，四边形 $ACBD$ 的面积为 S_2 ，如果 $S_2 = 7S_1$ ，求线段 AC 的长。



【答案】(1) 见解析 (2) ① $EF = \frac{10-5\sqrt{2}}{4}$ ；② $AC = \frac{5}{3}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用同圆的半径相等的性质，平行线的性质和等边三角形的判定与性质得到 $OC = BC = OD = DB$ ，再利用菱形的判定定理解答即可；

(2) ①利用平行线的性质，圆周角定理和垂径定理得到 $\frac{EF}{OF} = \frac{DE}{OC}$ ，则 $\angle DOE = \angle OBC = 45^\circ$ ，

$\frac{EF}{OF} = \frac{DE}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即可得出结论；

②过点 O 作 $OH \perp BC$ 于点 H ，得 $BH = CH$ ，则 $\triangle ODE \cong \triangle BOH$ ，利用全等三角形的面积相等和同高的

三角形的面积比等于底的比的性质得到 $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle DOE}} = \frac{OB}{OE} = \frac{3}{2}$ ，从而求得 $OE = \frac{5}{3}$ ；利用全等三角形的性质得到

$OH = DE = \frac{5}{6}\sqrt{5}$ ，最后根据 $AC = 2OH = \frac{5}{3}\sqrt{5}$ 解答即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because OB = OC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle BOC$ 是等边三角形，

$\therefore OC = BC = OB$.

$\because OD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DOB = \angle ABC = 60^\circ$.

同理， $\triangle BOD$ 是等边三角形， $OD = DB$.

又 $\because OD = OC$ ，

$\therefore OC = BC = OD = DB$.

$\therefore$ 四边形 $OCBD$ 是菱形.

【小问 2 详解】

解： ① $\because OD = OC$ ，

$\therefore \angle ODC = \angle OCD$.

$\because OD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ODC = \angle DCB$.

$\therefore \angle OCD = \angle DCB$.

$\therefore \angle OCB = 2\angle OCD$.

$\because OC = OB$ ，

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 2\angle OCD$.

$\because \angle CAB = 2\angle OCD$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle CBA$.

$\therefore CA = CB$.

又 $\because OA = OB$ ，

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$ ，

$\because DE \perp OB$ ，

$\therefore \angle OED = 90^\circ$.

$$\therefore \angle OED = \angle BOC.$$

$$\therefore OC \parallel DE.$$

$$\therefore \frac{EF}{OF} = \frac{DE}{OC}.$$

$$\because OB = OC, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle DOE = \angle OBC = 45^\circ.$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{2}}{2} OD = \frac{5\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \frac{EF}{OF} = \frac{DE}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore EF = \frac{10 - 5\sqrt{2}}{4}.$$

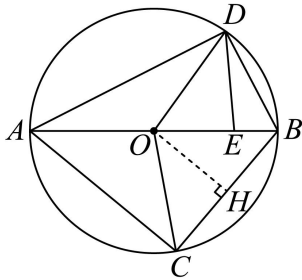
②过点 O 作 $OH \perp BC$ 于点 H , 得 $BH = CH$,

$$\because OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DOE = \angle OBH,$$

$$\because \angle DEO = \angle OHB = 90^\circ, OB = OD,$$

$$\therefore \triangle ODE \cong \triangle BOH.$$



$$\therefore S_{\triangle ODE} = S_{\triangle OBH} = \frac{1}{2} S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_1.$$

$$\because S_{\text{四边形}ACBD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} = 7S_1, \quad S_{\triangle BOD} = S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = \frac{3}{2} S_1.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle DOE}} = \frac{OB}{OE} = \frac{3}{2}, \quad OE = \frac{5}{3},$$

$$\therefore DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{5}.$$

$$\therefore \triangle ODE \cong \triangle BOH,$$

$$\therefore OH = DE = \frac{5}{6}\sqrt{5}.$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } OB = OA, \quad BH = CH,$$

$$\therefore AC = 2OH = \frac{5}{3}\sqrt{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了圆周角定理，直角三角形的性质，勾股定理，等腰直角三角形的判定与性质，角平分线的判定与性质，菱形的判定，等边三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，三角形中位线，熟练掌握上述定理与性质是解题的关键.