

2024 学年第二学期初三年级学业质量调研

数学试卷

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 3 的倒数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了倒数, 利用倒数的定义求解即可.

【详解】解: 3 的倒数是 $\frac{1}{3}$.

故选: C.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $a + a^2 = a^3$ B. $a^2 + b^2 = (a + b)^2$
C. $(2a^2)^3 = 8a^5$ D. $(ab)^2 = a^2b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了积的乘方计算, 完全平方公式, 合并同类项, 根据相关计算法则求出对应选项中式子的结果即可得到答案.

【详解】解: A、 a 与 a^2 不是同类项, 不能合并, 原式计算错误, 不符合题意;

B、 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, 原式计算错误, 不符合题意;

C、 $(2a^2)^3 = 8a^6$, 原式计算错误, 不符合题意;

D、 $(ab)^2 = a^2b^2$, 原式计算正确, 符合题意;

故选: D.

3. 下列函数中, 函数值 y 随 x 的增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{3}{x}$

B. $y = -x + 1$

C. $y = x^2$

D. $y = 3x$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查的是反比例函数的性质、一次函数的性质、正比例函数的性质及二次函数的性质等知识点, 熟知以上知识是解题的关键.

分别根据反比例函数、一次函数、正比例函数及二次函数的性质进行解答即可.

【详解】解: A、由反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 中, $k = 3 > 0$, 则函数图象的两个分支分别位于第一三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小, 不符合题意;

B、由一次函数 $y = -x + 1$ 中, $k = -1 < 0$, 则函数值 y 随 x 的增大而减小, 符合题意;

C、 $\because$ 在二次函数 $y = x^2$ 中, $a = 1 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 顶点在原点,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 不符合题意;

D、在 $y = 3x$ 中, $k = 3 > 0$, 则 y 随 x 的增大而增大, 不符合题意.

故选: B.

4. 某校足球社团共有 30 名成员, 他们的年龄在 12 岁至 16 岁之间, 在统计全体社团成员的年龄时, 14 岁和 15 岁的人数尚未统计完全, 并制作了如下的表格, 根据表格, 关于全体社团成员年龄的统计量能确定的是 ()

年龄 (单位: 岁)	12	13	14	15	16
人数 (单位: 名)	7	11			2

A. 平均数和中位数;

B. 平均数和方差;

C. 众数和中位数;

D. 众数和方差.

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了众数和中位数, 理解众数和中位数的定义是解题的关键. 通过已知人数确定总人数关系, 分析各统计量是否受未确定人数影响.

【详解】解: 由表可知, 年龄 13 岁与 14 岁的频数和为: $30 - 7 - 11 - 2 = 10$,

13 岁的人数有 11 人，该组数据的众数为 13，中位数为 13，
所以全体社团成员年龄的统计量能确定的是众数和中位数，
故选：C.

5. 正多边形的一个外角的大小 y （度）随着它的边数 n 的变化而变化，下列说法正确的是（ ）

- A. y 与 n 之间是正比例函数关系；
B. y 与 n 之间是反比例函数关系；
C. y 与 n 之间是一次函数关系；
D. y 与 n 之间是二次函数关系.

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了正多边形的外角问题，判断是否为反比例函数，先结合正多边形的一个外角的大小 y （度）与它的边数 n 的关系为 $y = \frac{360^\circ}{n}$ ，即可作答.

【详解】解：依题意， $yn = 360^\circ$ ，

$$\therefore y = \frac{360^\circ}{n},$$

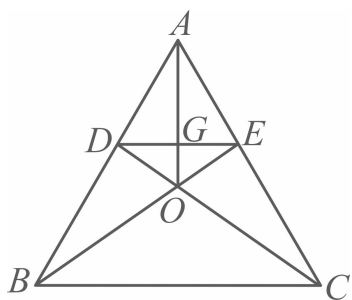
$\therefore y$ 与 n 之间是反比例函数关系；

故选 B.

6. 如图，在等边三角形 ABC 中， D 、 E 分别在 AB 、 AC 上，连接 BE 、 CD 交于 O ，连接 AO 交 DE 于点 G 。有下列两个命题：

- ①如果 $DE \parallel BC$ ，那么 G 为 DE 中点；
②如果 $AO \perp DE$ ，那么 $DE \parallel BC$ 。

对于这两个命题判断正确的是（ ）



- A. ①②都是真命题；
B. ①是真命题，②是假命题；
C. ①是假命题，②是真命题；
D. ①②都是假命题.

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，中垂线的判定，证明 $\triangle BDC \cong \triangle CEB$ ，得到 $\angle BDO = \angle CEO$ ，再证明 $\triangle BDO \cong \triangle CEO$ ，得到 $OD = OE$ ，进而得到 AO 垂

直平分 DE ，判断①，反证法判断②.

【详解】解析：① $\because$ 三角形 ABC 为等边三角形，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = 60^\circ,$$

$\therefore ADE$ 为等边三角形，

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore BD = CE,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, \quad BC = CB,$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle CEB,$$

$$\therefore \angle BDO = \angle CEO,$$

$$\because \angle BOD = \angle COE, \quad BD = CE,$$

$$\therefore \triangle BDO \cong \triangle CEO,$$

$$\therefore DO = EO,$$

$\therefore O$ 为 DE 中垂线上的点，

$$\because AD = AE,$$

$\therefore A$ 为 DE 中垂线上的点，

$\therefore AO$ 垂直平分 DE ，

$\therefore G$ 为 DE 中点；

所以①为真命题；

假设 DE 与 BC 不平行，作 $EH \parallel BC$ ， EH 与 AO 交于点 F ，作 $AK \perp EH$ ，则： $\angle AKF = 90^\circ$ ，

$$\angle AKF > \angle AFK,$$

$$\because AO \perp DE,$$

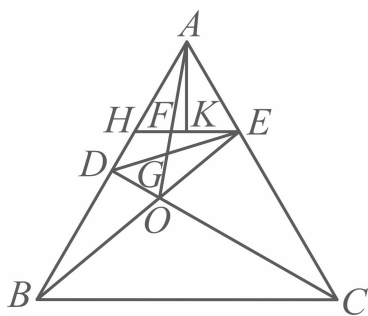
$$\therefore \angle AGE = 90^\circ,$$

$\because \angle AFK$ 是 $\triangle AGE$ 的一个外角，

$$\therefore \angle AFK > \angle AGE, \quad \text{即: } \angle AFK > 90^\circ, \quad \text{与 } \angle AKF > \angle AFK \text{ 矛盾,}$$

$\therefore$ 假设不成立，

$\therefore DE \parallel BC$ ；故②为真命题.



故选 A.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $4^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查分数指数幂的运算, 掌握运算法则是解题关键.

将 $4^{\frac{1}{2}}$ 化为 $\sqrt{4}$ 进行计算.

【详解】 解: $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$,

故答案为: 2.

8. 因式分解: $ab^2 - 4a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(b-2)(b+2)$

【解析】

【分析】 本题考查的是用提公因式法、平方差公式分解因式, 能够熟练掌握因式分解的方法是解题的关键. 先提取公因式, 再用平方差公式来分解因式.

【详解】 解: $ab^2 - 4a = a(b^2 - 4) = a(b-2)(b+2)$.

故答案为: $a(b-2)(b+2)$.

9. 根据电影发行方的数据, 截至 2025 年 2 月 18 日 12 时电影《哪吒 2》以 120.9 亿的票房高居春节档票房冠军, 数据 120.9 亿元用科学记数法表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元.

【答案】 1.209×10^{10}

【解析】

【分析】 用移动小数点的方法确定 a 值, 根据整数位数减一原则确定 n 值, 最后写成 $a \times 10^n$ 的形式即可.

本题考查了科学记数法表示大数, 熟练掌握把小数点点在左边第一个非零数字的后面确定 a , 运用整数位数

减去 1 确定 n 值是解题的关键.

【详解】解: 120.9 亿用科学记数法表示为 $12090000000 = 1.209 \times 10^{10}$,

故答案为: 1.209×10^{10} .

10. 函数 $y = \frac{x}{x+2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq -2$

【解析】

【分析】 本题考查了分式有意义的条件、求函数的定义域, 根据分式有意义的条件得出 $x+2 \neq 0$, 求解即可.

【详解】 解: 要使分式 $\frac{x}{x+2}$ 有意义, 则分母 $x+2 \neq 0$,

即 $x \neq -2$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{x}{x+2}$ 的定义域是 $x \neq -2$,

故答案为: $x \neq -2$.

11. 方程 $\sqrt{12+x} = -x$ 的解是_____.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是解无理方程、解一元二次方程、二次根式的性质, 解题关键是熟练掌握解无理方程.

先将无理方程转化为一元二次方程, 求解后再结合二次根式的性质判断后即可得解.

【详解】 解析: $\sqrt{12+x} = -x$,

$$12+x=x^2$$

$$x^2-x-12=0,$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x_1 = -3, \quad x_2 = 4$$

经检验 $x=4$ 是原方程增根, 舍去;

所以原方程根为 $x = -3$.

12. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是_____.

【答案】 $-\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的情况与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系. 若一元二次方程有两等根, 则根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 建立关于 m 的方程, 求出 m 的取值.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-m) = 0,$$

$$\therefore m = -\frac{9}{4}.$$

故答案为: $-\frac{9}{4}$.

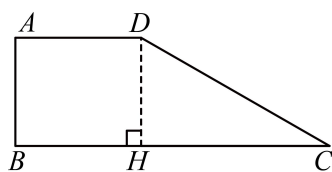
13. 已知在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AD = 2$, $BC = 5$, 那么梯形 $ABCD$ 的周长为_____.

【答案】 $7 + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了直角梯形, 矩形的判定与性质, 解直角三角形, 正确地作出辅助线是解题的关键. 过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 可证四边形 $ABHD$ 是矩形, 根据矩形的性质得到 $BH = AD = 2$, $DH = AB$, 求得 $CH = 3$, 从而 $DH = CH \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}$, 得到 $CD = 2DH = 2\sqrt{3}$, 于是得到结论.

【详解】 解: 过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则 $\angle BHD = 90^\circ$,



$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle BHD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形,

$$\therefore BH = AD = 2, DH = AB,$$

$$\because BC = 5,$$

$$\therefore CH = 5 - 2 = 3,$$

$$\because \angle CHD = 90^\circ, \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore DH = CH \cdot \tan 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

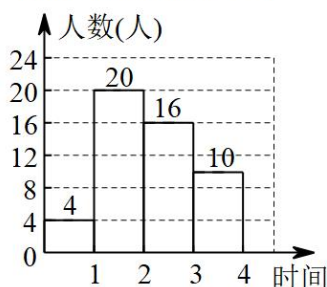
$$\therefore CD = 2DH = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore C_{ABCD} = 2 + 5 + 3\sqrt{3} = 7 + 3\sqrt{3}.$$

故答案为: $7 + 3\sqrt{3}$.

14. 为了了解学生在家做家务情况, 某校对部分学生进行抽样调查, 并绘制了如图所示的频数分布直方图 (每组数据含最小值, 不含最大值). 如果该校有 1500 名学生, 估计该校平均每周做家务的时间少于 2 小时的学生人数约是_____人.

部分学生平均每周做家务时间的频数分布直方图



【答案】 720

【解析】

【分析】 根据样本估计总体, 用 1500 乘以做家务的时间少于 2 小时的学生人数的占比即可求解.

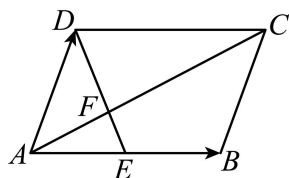
【详解】 解: 如果该校有 1500 名学生, 估计该校平均每周做家务的时间少于 2 小时的学生人数约是

$$1500 \times \frac{4 + 20}{4 + 20 + 16 + 10} = 720,$$

故答案为: 720.

【点睛】 本题考查了样本估计总体, 频数分布直方图, 熟练掌握样本估计总体是解题的关键.

15. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是边 AB 的中点, DE 与对角线 AC 相交于点 F . 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EF} =$ _____ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的知识，解答本题的关键是先确定各线段之间的关系.

先求出 $\frac{EF}{ED}$ 的值，再根据求 $\overrightarrow{ED}$ ，即可得出答案.

【详解】解：∵在 $\square ABCD$ 中， E 是边 AB 的中点，

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{ED} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (-\vec{a}) + \vec{b} \right] = \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{6} \vec{a},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{6} \vec{a}.$$

16. 一个不透明的布袋中原来装有大小相同的红色和白色小球共 8 个，其中红色小球 3 个，要想从中随机抽取一个，使抽到红色小球的概率为 50%，只需往布袋里加入_____个红球.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了概率的应用、分式方程的应用等知识点，审清题意、根据概率公式列出分式方程是解题的关键.

设需往布袋里加入 x 个红球. 再根据题意列分式方程期间即可.

【详解】解：设需往布袋里加入 x 个红球.

$$\text{由题意可得: } \frac{3+x}{8+x} = 50\%, \text{ 解得: } x = 2.$$

经检验， $x = 2$ 是分式方程的解.

答：需往布袋里加入 2 个红球.

故答案为 2.

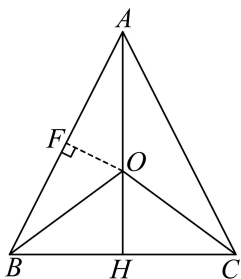
17. 已知等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 8，它的外接圆 $\odot O$ 半径为 5，那么圆心 O 到腰 AB 的距离为_____.

【答案】 $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧. 也考查了勾股定理. 根据题意画出图形，应注意底边 BC 与圆心可能存在两种位置关系可能.

【详解】解：①如图：过点 O 作 $OF \perp AB$ 于点 F ,



由题意可得 $BH = CH = \frac{1}{2}BC = 4$, $AO = BO = CO = 5$

在 $Rt\triangle BOH$ 中, $HO = \sqrt{OB^2 - BH^2} = 3$

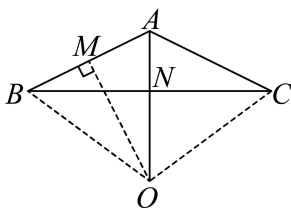
$\therefore AH = OA + OH = 8$

在 $Rt\triangle ABH$ 中, $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 4\sqrt{5}$

$\therefore AF = BF = 2\sqrt{5}$

在 $Rt\triangle AFO$ 中, $FO = \sqrt{AO^2 - AF^2} = \sqrt{5}$;

②如图, 过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 F ,



$BN = CN = \frac{1}{2}BC = 4$, $AO = BO = CO = 5$

在 $Rt\triangle BON$ 中, $NO = \sqrt{OB^2 - BN^2} = 3$

$\therefore AN = OA - ON = 2$

在 $Rt\triangle ABN$ 中, $AB = \sqrt{AN^2 + BN^2} = 2\sqrt{5}$

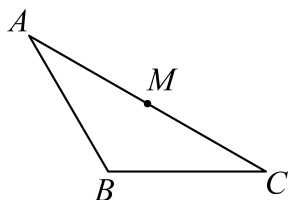
$\therefore AM = BM = \sqrt{5}$

在 $Rt\triangle AMO$ 中, $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} = 2\sqrt{5}$;

综上: 圆心 O 到腰 AB 的距离为 $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$.

故答案为: $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, 点 M 是 AC 的中点, 将线段 AM 绕点 M 逆时针旋转, 点 A 落在边 CB 延长线上的点 D 处, 连接 MD , 与边 AB 交于点 E , $AE = 3$, $DE = 2$, 那么 AC 的长为_____.

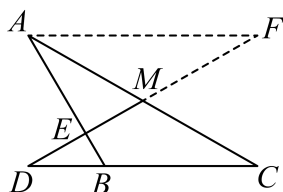


【答案】 $3 + \sqrt{19} \neq \sqrt{19} + 3$

【解析】

【分析】过A作 $AF \parallel BC$ 交DM延长线于F，证明 $\triangle AEM \sim \triangle DEB$ ，得出 $\frac{AE}{DE} = \frac{EM}{EB} = \frac{3}{2}$ ，设 $ME = 3k$ ，则 $EB = 2k$ ，则 $AC = AM + MC = 2DM = 4 + 6k$ ，证明 $\triangle AMF \cong \triangle CMD$ ，得出 $DM = MF = 2 + 3k$ ，根据 $AF \parallel BC$ ，得出 $\frac{AE}{EB} = \frac{EF}{ED}$ ，即 $\frac{3}{2k} = \frac{6k+2}{2}$ ，求出k的值，即可得出答案即可。

【详解】解析：如图：过A作 $AF \parallel BC$ 交DM延长线于F，



根据旋转可知： $MA = MD$ ，

$\therefore$ 点M为AC的中点，

$$\therefore AM = CM = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore CM = DM = AM = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle ACB,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle BAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle AEM = \angle DEB,$$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle DEB,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{EM}{EB} = \frac{3}{2},$$

设 $ME = 3k$ ，则 $EB = 2k$ ，则 $AC = AM + MC = 2DM = 4 + 6k$ ，

$$\therefore AF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FAM = \angle MCD, \angle AFM = \angle CDM,$$

$$\therefore AM = MC,$$

$$\therefore \triangle AMF \cong \triangle CMD,$$

$$\therefore DM = MF = 2 + 3k,$$

$$\therefore EF = 3k + 3k + 2 = 6k + 2,$$

$$\therefore AF \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{EF}{ED},$$

$$\therefore \frac{3}{2k} = \frac{6k+2}{2},$$

$$\text{解得: } k = \frac{\sqrt{19}-1}{6} \text{ 或 } k = \frac{-\sqrt{19}-1}{6} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore AC = 4 + 6k = 4 + 6 \times \frac{\sqrt{19}-1}{6} = 3 + \sqrt{19}.$$

故答案为: $3 + \sqrt{19}$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，三角形全等的判定和性质，平行线的性质，等腰三角形的判定和性质，旋转的性质，解题的关键是熟练掌握相关的判定和性质.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简: $\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2+4x+4}$, 再求当 $x = \sqrt{2}$ 时此代数式的值.

【答案】 $\frac{x+2}{x-1}, 4+3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值，分母有理化. 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，把 x 的值代入计算即可求出值.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \\ &= \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{1}{x+2}\right) \div \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x+1}{x+2} \times \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x+2}{x-1}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = \sqrt{2} \text{ 时, 原式} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-1} = 4+3\sqrt{2}.$$

20. 解不等式组
$$\begin{cases} 2x+3 > 4(x-2) \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{3} - 2 \leq \frac{x-2}{2} \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】 $x < \frac{11}{2}$

【解析】

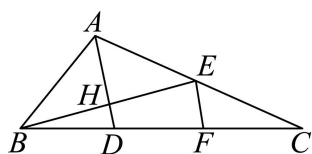
【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式组，先求出每个不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）”求出不等式组的解集即可。

【详解】 解：解①得： $x < \frac{11}{2}$ ，

解②得： $x \leq 8$ ，

$\therefore x < \frac{11}{2}$ 。

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 为中线， AD 平分 $\angle BAC$ ，且 $AD \perp BE$ ，分别交 BE 、 BC 于点 H 、 D ， $EF \perp BE$ ，交 BC 于点 F ， $AB = 5$ ， $\tan \angle ABE = \frac{3}{4}$ 。



(1) 求 BE 的长；

(2) 求 $\tan \angle EBC$ 的值。

【答案】 (1) 8

(2) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 先根据三角函数计算出 $AH = 3$ ， $BH = 4$ ，从而得到 $\tan \angle BAH = \frac{4}{3}$ ，结合角平分线得到 EH ，即可得到答案；

(2) 根据垂直得到 $EF \parallel AD$ ，从而得到 $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ ， $\triangle BHD \sim \triangle BFE$ ，即可得到答案。

【小问 1 详解】

解析： $\because AD \perp BE$ ， $AB = 5$ ， $\tan \angle ABE = \frac{3}{4}$

$\therefore AH = 3$ ， $BH = 4$ ，

$\therefore \tan \angle BAH = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore EH = AH \tan \angle EAH = 3 \times \frac{4}{3} = 4,$$

$$\therefore BE = BH + EH = 4 + 4 = 8;$$

【小问 2 详解】

解: $\because BE$ 为中线,

$\therefore E$ 为 AC 中点,

$\because AD \perp BE, EF \perp BE,$

$\therefore EF \parallel AD,$

$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAD,$

$$\therefore \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{2}$$

$\therefore F$ 为 DC 中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AD,$$

同理可得, $\triangle BHD \sim \triangle BFE,$

$$\therefore HD = \frac{1}{2} EF,$$

$$\therefore HD = \frac{1}{4} AD,$$

$$\therefore AH = 3,$$

$$\therefore HD = 1,$$

$$\therefore \tan \angle EBC = \frac{1}{4}.$$

【点睛】 本题考查解直角三角形及三角形相似的判定与性质, 解题的关键是根据题意找到直角三角形, 合理的应用三角函数.

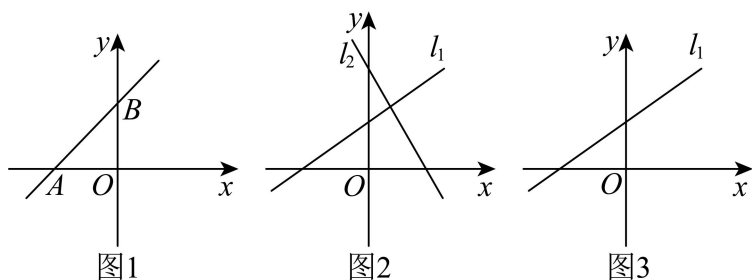
22. 一个数学兴趣小组尝试探究一次函数图象与两坐标轴所围成三角形面积的问题. 为了较为全面地研究这个问题, 他们准备把它分成两种类型问题来分别进行研究:

类型 I: 一条直线 $y = kx + b$ (k 、 b 都不为 0) 与两条坐标轴所围成的三角形面积大小;

类型 II: 两条直线 $l_1: y_1 = k_1x + b_1$ 和 $l_2: y_2 = k_2x + b_2$ ($k_1 \neq k_2$ 、 $b_1 \neq b_2$, 且都不为零) 与坐标轴所围成的三角形的面积、直线 l_1 与两条坐标轴所围成的三角形面积、直线 l_2 与两条坐标轴所围成的三角形面积之间的关系.

小组成员认为第一类问题只要将直线与两坐标轴的交点坐标分别求出来, 就能解决; 而第二类的问题需要

根据两个函数 k 和 b 符号的不同情况，分别进行研究，才能得出相应的结论。



(1) 如图 1，请你帮助小组求出 $\triangle ABO$ 的面积 S （用含 k 和 b 的式子表示）。

(2) 将直线 l_1 与两条坐标轴所围成的三角形面积记为 S_1 ，直线 l_2 与两条坐标轴所围成的三角形面积记为 S_2 ，直线 l_1 、 l_2 和 x 轴所围成的三角形面积记为 S_x ，它们和 y 轴所围成的三角形面积记为 S_y 。

①在图 2 中已经画出了直线 l_1 和 l_2 大致图象的一种情况，那么关于这两个一次函数的 k 和 b 符号选项正确的是_____。

- A. $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 > 0$, $b_2 > 0$ B. $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 < 0$, $b_2 < 0$
C. $k_1 > 0$, $b_1 < 0$, $k_2 < 0$, $b_2 > 0$ D. $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 < 0$, $b_2 > 0$

此时 S_1 、 S_2 、 S_x 和 S_y 之间的关系式是_____。

②如图 3，保持直线 l_1 不变，改变直线 l_2 中 k_2 和 b_2 的符号（不考虑 $|k_2|$ 和 $|b_2|$ 的大小），请在图中画出直线 l_2 的大致图象，此时 S_1 、 S_2 、 S_x 和 S_y 之间的关系式是_____。

【答案】 (1) $\frac{b^2}{2k}$

(2) ①D, $S_1 + S_2 = S_x + S_y$; ② $S_1 - S_2 = S_x - S_y$ 。

【解析】

【分析】 本题考查了函数与不等式的关系，掌握函数的性质和三角形的面积公式是解题的关键。

(1) 根据三角形的面积公式求解；

(2) ①根据一次函数的性质求解；

②根据三角形的面积的和差求解。

【小问 1 详解】

解：当 $x = 0$ 时， $y = kx + b = b$ ，

当 $y = 0$ 时， $0 = kx + b$ ，解得： $x = -\frac{b}{k}$ ，

$$\therefore A(0, b), B\left(-\frac{b}{k}, 0\right),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times b \cdot \left| -\frac{b}{k} \right| = \frac{b^2}{2k};$$

【小问2详解】

解：①观察图形得： l_1 经过一二三象限， l_2 经过一二四象限，

$$\therefore k_1 > 0, b_1 > 0, k_2 < 0, b_2 > 0, S_1 + S_2 = S_x + S_y,$$

故选：D； $S_1 + S_2 = S_x + S_y$ ，

$$\textcircled{2} \because k_2 > 0, b_2 < 0,$$

$\therefore$ 图象如下：

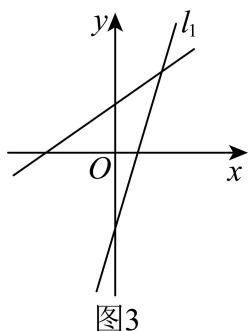
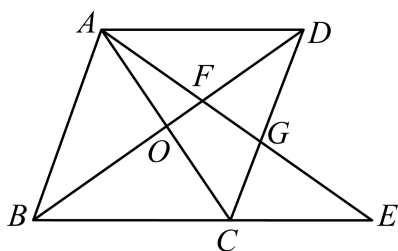


图3

由图象得： $S_1 - S_2 = S_x - S_y$ 。

23. 已知, 如图: 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O , 点 E 是边 BC 延长线上一点, 连接 AE , 交 BD 于点 F , 交 CD 于点 G 。



(1) 求证: $AF^2 = FG \cdot FE$;

(2) 连接 CF , 如果 $\angle DAE = \angle FCD$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 菱形的判定. 本

题的综合性较强，解题的关键是证明三角形相似.

(1) 证明 $\triangle AFB \sim \triangle GFD$ ， $\triangle AFD \sim \triangle EFB$ ，得到 $\frac{FD}{BF} = \frac{FG}{AF}$ ， $\frac{AF}{EF} = \frac{FD}{BF}$ ，进而得到 $\frac{AF}{EF} = \frac{FG}{AF}$ ，即

可得证；

(2) 证明 $\triangle GFC \sim \triangle CFE$ ，推出 $AF = CF$ ，进而得到 $BD \perp AC$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AFB \sim \triangle GFD$ ， $\triangle AFD \sim \triangle EFB$ ，

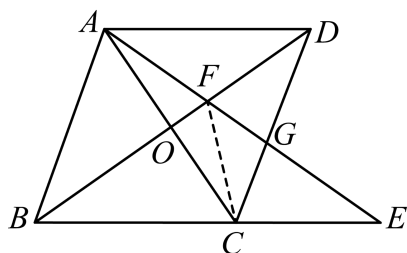
$$\therefore \frac{FD}{BF} = \frac{FG}{AF}, \quad \frac{AF}{EF} = \frac{FD}{BF},$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{FG}{AF},$$

$$\therefore AF^2 = FG \cdot FE;$$

【小问 2 详解】

解：如图： $\because AD \parallel BC$ ，



$$\therefore \angle E = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FCD,$$

$$\therefore \angle E = \angle FCD,$$

$$\therefore \angle GFC = \angle CFE,$$

$$\therefore \triangle GFC \sim \triangle CFE,$$

$$\therefore \frac{CF}{EF} = \frac{FG}{CF},$$

$$\therefore CF^2 = FG \cdot FE,$$

$$\therefore AF^2 = FG \cdot FE$$

$$\therefore AF = CF,$$

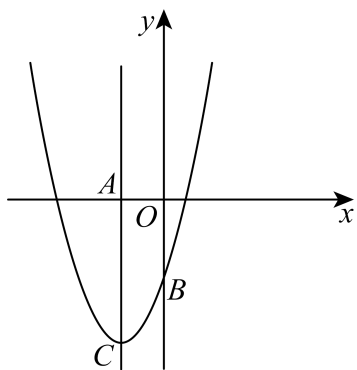
∵ 平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于 O ,

∴ $AO = OC$,

∴ $OF \perp AC$, 即: $BD \perp AC$,

∴ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

24. 定义: 如果一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的顶点坐标满足条件 (t, at^2) , 那么称该抛物线为“优雅”抛物线. 例如: 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + 4$ 的顶点坐标为 $(1, 2)$, 此时由于 $t = 1$, $a = 2$, 顶点坐标符合定义的条件, 所以这条抛物线是“优雅”抛物线.



(1) 如果抛物线 $C_1: y = x^2 + 4x + m$ 是“优雅”抛物线, 求 m 的值.

(2) 如图, 把 (1) 中的抛物线 C_1 向下平移得到抛物线 C_2 , 抛物线 C_2 与 y 轴负半轴交于点 B , 顶点为点 C , 对称轴与 x 轴交于点 A .

①点 E 在 CB 延长线上, 点 D 是 x 轴上一点, 且四边形 $ABDE$ 是矩形, 求点 E 的坐标.

②如果抛物线 $C_3: y = 2x^2 + px + q$ 为“优雅”抛物线, 它的顶点 G 在 x 轴上, 抛物线 C_2 与 C_3 交于点 M , 且 $AM \parallel BC$, 求抛物线 C_2 的解析式.

【答案】 (1) 8

(2) ① $E(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}+1)$; ② $C_2: y = x^2 + 4x - 4$

【解析】

【分析】 (1) 抛物线的对称轴为直线 $x = -2$, 则顶点坐标为 $(-2, 4)$, 即可求解;

(2) ①由点 B 、 C 的坐标得, 直线 BC 的表达式为 $y = 2x + n + 4$, 可得 $F\left(-\frac{n}{2} - 2, 0\right)$, 四边形 $ABDE$ 是矩形, 由 $AF = BF$ 解得 $n = -5 - \sqrt{5}$, 进而可得 $B(0, -\sqrt{5} - 1)$, $F\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 0\right)$, 由于 F 是 B 、 E 的中点, 从而求出 E 点坐标;

② 抛物线 $C_3: y = 2x^2 + px + q$ 为“优雅”抛物线，求出 $C_3: y = 2x^2$ ，由于 $AM \parallel BC$ ，可得 $k_{AM} = k_{BC}$ ，结合 $A(-2, 0)$ ，求出 $l_{AM}: y = 2x + 4$ ，联立 $l_{AM}: y = 2x + 4$ 与 $C_3: y = 2x^2$ ，求得 M 坐标，进而求出 C_2 的解析式。

【小问 1 详解】

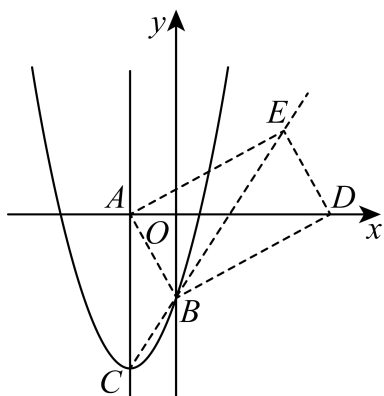
解：抛物线 $C_1: y = x^2 + 4x + m$ 的对称轴为直线 $x = -2$ ，则顶点坐标为 $(-2, 4)$ ，

$$\text{即 } y = (x + 2)^2 + 4 = x^2 + 4x + 8,$$

$$\therefore m = 8;$$

【小问 2 详解】

解：① 如图：由 (1) 知，点 $A(-2, 0)$ ，设 $C_2: y = (x + 2)^2 + n$ ， $(n < 0)$



$$\therefore B(0, n + 4), \quad C(-2, n), \quad A(-2, 0),$$

$$l_{BC}: y = 2x + n + 4,$$

$$\therefore F\left(-\frac{n}{2} - 2, 0\right),$$

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是矩形，

$$\therefore AF = BF,$$

$$\therefore -\frac{n}{2} = \sqrt{\left(-\frac{n}{2} - 2\right)^2 + (n + 4)^2},$$

$$\therefore n = -5 - \sqrt{5},$$

$$\therefore B(0, -\sqrt{5} - 1), \quad F\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}, 0\right),$$

$$\therefore E(\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} + 1),$$

$$\textcircled{2} C_3: y = 2x^2 + px + q = 2\left(x + \frac{p}{4}\right)^2 + \frac{8q - p^2}{8},$$

$$\therefore G\left(-\frac{p}{4}, \frac{p^2}{8}\right),$$

$$\therefore \frac{8q - p^2}{8} = \frac{p^2}{8} = 0,$$

$$\therefore p = q = 0,$$

$$\therefore C_3: y = 2x^2,$$

$$\therefore AM \parallel BC,$$

$$\therefore k_{AM} = k_{BC},$$

$$\therefore A(-2, 0), \quad l_{AM}: y = 2x + 4,$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x^2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases},$$

$$\therefore M(2, 8)$$

$$\text{将 } M(2, 8) \text{ 代入 } C_2 \text{ 得: } 8 = (2 + 2)^2 + n,$$

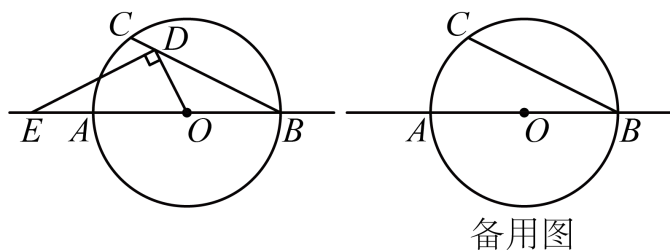
$$\text{解得 } n = -8$$

$$\therefore C_2: y = (x + 2)^2 - 8,$$

$$\therefore C_2: y = x^2 + 4x - 4$$

【点睛】本题考查了二次函数综合运用，涉及到新定义、图象的平移、一次函数的图象和性质、平行四边形的性质等，利用新定义确定函数表达式是解题的关键.

25. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 AB 长为 $4\sqrt{5}$ ，弦 BC 的长为8，点 D 是 BC 上一点，过点 D 作 OD 的垂线交直线 AB 于点 E .



(1) 求 $\angle CBO$ 的正切值.

(2) 当 $\triangle BOD$ 与 BDE 相似时, 求 BD 的长.

(3) 以点 E 为圆心, ED 长为半径画 $\odot E$, 试根据线段 BD 的长度情况探究 $\odot E$ 和 $\odot O$ 的位置关系.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$;

(2) $DB = 5 \pm \sqrt{5}$;

(3) 当 $0 < BD < 3$ 时, $\odot E$ 内含于 $\odot O$; 当 $BD = 3$ 时, 圆 O 与圆 E 内切; 当 $3 < DB < 5$ 或 $5 < DB \leq 8$ 时, $\odot E$ 与 $\odot O$ 相交.

【解析】

【分析】(1) 连接 AC , 由直径所对的圆周角是直角得到 $\angle ACB = 90^\circ$, 利用勾股定理求出 AC 的长, 再根据正切的定义可得答案;

(2) 分 E 在 O 的左侧和 E 在 O 的右侧两种情况, 讨论求解即可;

(3) 如解析图示中, 求出圆 O 与圆 E 内切时, $BD = 3$, 再求出 $OD \perp OB$ 时, $BD = 5$, 据此分 $0 < BD < 3$, $3 < BD < 5$, $5 < BD \leq 8$ 三种情况讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 连接 AC ,

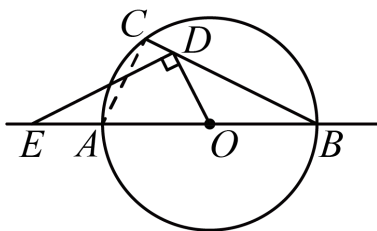
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because AB = 4\sqrt{5}$, $BC = 8$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4$,

$\therefore \tan \angle CBA = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$, 即 $\angle CBO = \frac{1}{2}$;



【小问 2 详解】

解: 如图: 当 E 在 O 的左侧时; 过 O 作 $OH \perp CB$,

$\therefore BH = \frac{1}{2}BC = 4$,

$\therefore OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = 2$,

$$\therefore \angle MOD = \angle HDE,$$

$$\because \angle NOD + \angle NDO = \angle NDO + \angle NDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NOD = \angle NDE,$$

$\therefore \triangle BOD$ 与 $\triangle BDE$ 相似,

$$\therefore \angle DOB = \angle EDB = \angle MOD = \angle NDE,$$

设 $EH = m$, 则 $NE = EH = m$,

$$\text{在 Rt}\triangle BEH \text{ 中, } BH = \frac{EH}{\tan \angle EBH} = 2m,$$

$$\therefore EB = \sqrt{EH^2 + BH^2} = \sqrt{5}m,$$

$$\therefore BN = (\sqrt{5} + 1)m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDN \text{ 中, } DN = BN \cdot \tan \angle DBN = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}m,$$

$$\therefore \tan \angle NDE = \frac{BE}{DN} = \frac{m}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}m} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1}, \quad DM = DN = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}m,$$

$$\therefore DH = \frac{EH}{\tan \angle HDN} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}m,$$

$$\therefore MB = MD + DH + HB = 2 \times \frac{\sqrt{5} + 1}{2}m + 2m = 4,$$

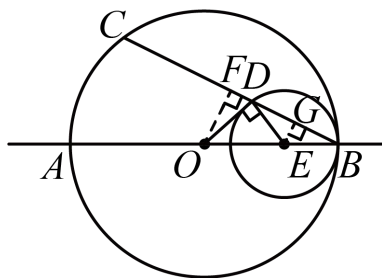
$$\therefore m = 3 - \sqrt{5},$$

$$\therefore BD = 5 - \sqrt{5}$$

综上: $DB = 5 \pm \sqrt{5}$;

【小问 3 详解】

解: 如图, 当圆 O 与圆 E 内切时, 则 $DE = BE$,



过 O 作 $OF \perp BC$ 于 F , 过 E 作 $EG \perp BC$ 于 G ,

同 (2) 可证明 $\angle FOD = \angle EDG$,

$$\therefore DE = BE,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD,$$

$$\therefore \angle DOF = \angle EBD,$$

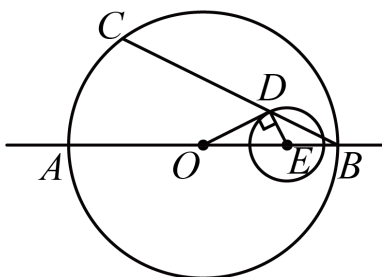
$$\therefore DF = OF \cdot \tan \angle DOF = 1$$

$$\therefore BD = BF - DF = 4 - 1 = 3$$

如图, 当 $0 < BD < 3$ 时, 在内切的基础上, 点 D 会更靠近点 B, 即此时一定有 $\angle EDB = \angle FOD > \angle EBD$,

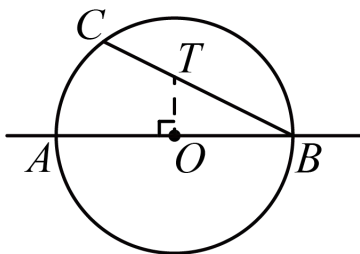
$$\therefore BE > DE,$$

$\therefore \odot E$ 内含于 $\odot O$;



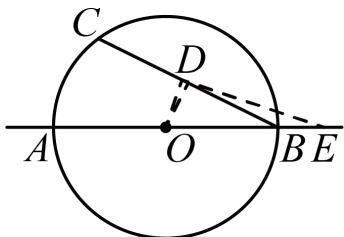
如图, 过点 O 作 $OT \perp BA$ 交 BC 于 T, 则 $OT = OB \cdot \tan \angle OBT = \sqrt{5}$,

$$\therefore BT = \sqrt{OB^2 + OT^2} = 5;$$



如图, 当 $3 < DB < 5$ 时, $\angle DBE > 90^\circ$, 则一定有 $DE > BE$,

$\therefore \odot E$ 与 $\odot O$ 相交;

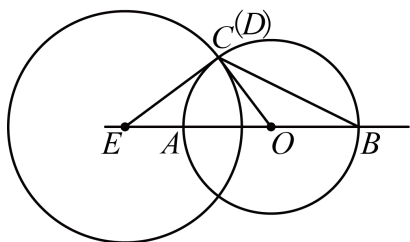


当 $5 < DB \leq 8$ 时, 如图,

$$\therefore ED < EO < ED + OD, \quad OD < OA = OB,$$

$$\therefore ED - OA < EO < ED + OA,$$

$\therefore \odot E$ 与 $\odot O$ 相交;



综上所述, 当 $0 < BD < 3$ 时, $\odot E$ 内含于 $\odot O$; 当 $BD = 3$ 时, 圆 O 与圆 E 内切; 当 $3 < DB < 5$ 或 $5 < DB \leq 8$ 时, $\odot E$ 与 $\odot O$ 相交.

【点睛】 本题主要考查了圆与圆的位置关系, 相似三角形的性质, 解直角三角形, 勾股定理, 角平分线的性质等等, 利用分类讨论的思想求解是解题的关键.