

2024 学年第二学期初三年级学业质量调研数学试卷

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 本次考试不可以使用科学计算器.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各数中, 无理数是 ()

- A. $\frac{6}{5}$ B. $0.\dot{3}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt[3]{27}$.

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据无理数、有理数的定义即可判定选择项.

【详解】 $\frac{6}{5}$ 、 $0.\dot{3}$ 、 $\sqrt[3]{27}=3$ 属于有理数;

$\sqrt{7}$ 属于无理数;

故选: C.

【点睛】此题主要考查了无理数的定义, 注意带根号的要开不尽方才是无理数, 无限不循环小数是无理数. 如 π , $\sqrt{7}$, $0.8080080008\ldots$ (每两个 8 之间依次多 1 个 0) 等形式.

2. 单项式 $4xy^2$ 的次数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式次数的定义, 即单项式所含字母的指数和为单项式的次数, 据此即可解答.

【详解】解: 单项式 $4xy^2$ 的次数为: $1+2=3$,

故选: C.

【点睛】本题考查了单项式次数的定义, 熟练掌握和运用单项式次数的定义是解决本题的关键.

3. 下列运算正确的是 ()

- A. $3m+2m=5m^2$; B. $(2m^2)^3=8m^6$; C. $m^8 \div m^4 = m^2$; D. $(m-2)^2 = m^2 - 4$.

【答案】B

【解析】

【分析】根据整式的运算法则逐个选项计算即可求出答案.

【详解】A. $3m + 2m = 5m$ ，选项错误，不符合题意；

B. $(2m^2)^3 = 8m^6$ ，选项正确，符合题意；

C. $m^8 \div m^4 = m^4$ ，选项错误，不符合题意；

D. $(m-2)^2 = m^2 - 4m + 4$ ，选项错误，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查整式的运算，解题的关键是熟练运用整式的运算法则，本题属于基础题型.

4. 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像经过第一、二、三象限，它的解析式可以是 ()

A. $y = x + 1$

B. $y = x - 1$

C. $y = -x + 1$

D. $y = -x - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的图像经过第一、二、三象限可知 $k > 0, b > 0$ ，然后问题可求解.

【详解】解：由一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像经过第一、二、三象限可知 $k > 0, b > 0$ ，所以符合题意的只有 A 选项；

故选 A.

【点睛】本题主要考查一次函数的图像与性质，熟练掌握一次函数的图像与性质是解题的关键.

5. 下列命题是真命题的是 ()

A. 平行四边形的邻边相等；

B. 平行四边形的对角线互相平分；

C. 平行四边形内角都相等；

D. 平行四边形是轴对称图形.

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可进行求解.

【详解】解：由平行四边形的性质可知：平行四边形的两组对边相等；平行四边形的对角线互相平分；平行四边形的对角相等；平行四边形是中心对称图形；

故选 B.

【点睛】本题主要考查平行四边形的性质及真命题，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

6. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 8$ ， $AC = 6$ ，点 D 是 BC 的中点，点 E 是边 AB 上一动点，沿 DE

$$\therefore \sin \angle B = \sin \angle FB'E,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{EF}{B'E},$$

$$\therefore \frac{6}{10} = \frac{\frac{16}{5} - x}{x},$$

解得 $x = 2$.

$$\therefore BE = 2;$$

②如图2中, 当 $\angle AB'F = 90^\circ$ 时, 连接 AD , 作 $EH \perp AB'$ 交 AB' 的延长线于 H .

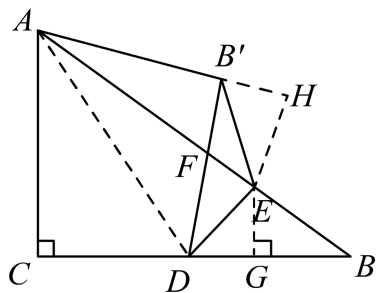


图2

$$\because AD = AD, \quad CD = DB',$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADB' \text{ (HL)},$$

$$\therefore AC = AB' = 6,$$

$\because$ 将 BDE 沿直线 DE 翻折,

$$\therefore \angle B = \angle DB'E,$$

$$\because AB' \perp DB', \quad EH \perp AH,$$

$$\therefore DB' \parallel EH,$$

$$\therefore \angle DB'E = \angle B'EH,$$

$$\therefore \angle B = \angle B'EH,$$

$$\therefore \sin \angle B = \sin \angle B'EH,$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } B'H = \frac{3}{5}x, \quad EH = \frac{4}{5}x,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AEH \text{ 中, } AH^2 + EH^2 = AE^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}x + 6\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2 = (10 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{40}{17},$$

$$\therefore BE = \frac{40}{17}.$$

综上, BE 的长为 2 或 $\frac{40}{17}$.

故选: D.

【点睛】 本题考查了翻折变换、勾股定理、解直角三角形、相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的思想解决问题.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{2a}{a-b}$ 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质. 利用比例的性质, 进行计算即可解答.

【详解】 解: $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{2},$

$\therefore$ 设 $a = 3k, b = 2k,$

$$\therefore \frac{2a}{a-b} = \frac{2 \times 3k}{3k-2k} = 6,$$

故答案为: 6.

8. 已知 $f(x) = 2x^2 - 1$, 那么 $f(-\sqrt{3}) =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查求函数值. 将 $x = -\sqrt{3}$ 代入 $f(x)$ 计算即可.

【详解】 解: $\because f(x) = 2x^2 - 1,$

$$\therefore f(-\sqrt{3}) = 2 \times (-\sqrt{3})^2 - 1 = 5.$$

故答案为: 5.

9. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 4x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 由题意得, $\Delta = 4^2 - 4m = 0$, 计算求解即可.

【详解】 解: 由题意得, $\Delta = 4^2 - 4m = 0,$

解得 $m = 4$,

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式. 解题的关键在于熟练掌握一元二次方程有两个相等的实数根时, $\Delta = 0$.

10. 方程 $x = \sqrt{x+2}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的求法, 把方程两边平方求解, 再检验即可得到答案.

【详解】 解: 把方程两边平方得: $x+2 = x^2$,

整理得: $(x-2)(x+1) = 0$,

解得: $x = 2$ 或 $x = -1$,

经检验, $x = 2$ 是原方程的解.

故答案为: $x = 2$.

11. 已知两个相似三角形对应高之比为 $4:9$, 那么这两个三角形的周长之比为_____.

【答案】 $4:9$

【解析】

【分析】 本题主要考查的是相似三角形的性质, 根据相似三角形周长的比、相似三角形对应边上的高的比等于相似比解答即可.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形对应边上的高的比为 $4:9$,

$\therefore$ 这两个三角形的相似比为 $4:9$,

$\therefore$ 这两个相似三角形的周长比为 $4:9$;

故答案为: $4:9$.

12. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在对称轴的左侧部分是下降的, 那么 a _____ 0. (填 “>” 或 “<”)

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象与系数的关系. 由抛物线在对称轴左侧的部分是下降的可得出抛物线开口向上, 进而即可得出 $a > 0$, 此题得解.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在对称轴左侧的部分是下降的,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore a > 0$.

故答案为: $>$.

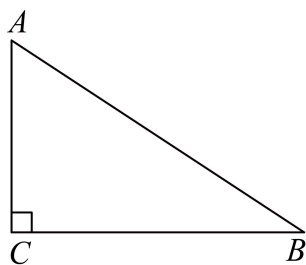
13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $\cos A = \frac{2}{5}$, 那么直角边 AC 长为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形. 先根据余弦定义求得 AC 即可.

【详解】解: 如图,



$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $\cos A = \frac{2}{5} = \frac{AC}{AB}$,

$\therefore AC = \frac{2}{5} AB = \frac{2}{5} \times 10 = 4$,

故答案为: 4.

14. 一个不透明的袋子里装有 3 个红球和 5 个黑球, 它们除颜色外其余都相同. 从袋中任意摸出一个球是红球的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】用红球的个数除以球的总个数即可.

【详解】解: 从袋中任意摸出一个球有 8 种等可能结果, 其中摸出的小球是红球的有 3 种结果,

所以从袋中任意摸出一个球是红球的概率为 $\frac{3}{8}$,

故答案为: $\frac{3}{8}$.

【点睛】本题主要考查概率公式, 解题的关键是掌握随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

15. 《九章算术》是我国古代数学的经典著作, 书中有一个问题: “今有黄金九枚, 白银一十一枚, 称之重适等, 交易其一, 金轻十三两, 问金、银一枚各重几何?” 意思是: 甲袋中装有黄金 9 枚 (每枚黄金重量相同), 乙袋中装有白银 11 枚 (每枚白银重量相同), 称重两袋相同, 两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻

了 13 两 (袋子重量忽略不计), 问黄金、白银每枚各种多少两? 设黄金重 x 两, 每枚白银重 y 两, 根据题意可列方程组为_____.

【答案】
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

【解析】

【分析】根据题意甲袋中装有黄金 9 枚 (每枚黄金重量相同), 乙袋中装有白银 11 枚 (每枚白银重量相同), 称重两袋相同. 故可得 $9x = 11y$, 再根据两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两, 可得 $(10y + x) - (8x + y) = 13$, 因此可得二元一次方程组.

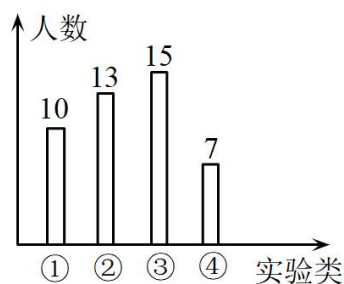
【详解】根据题意可得甲袋中的黄金 9 枚和乙袋中的白银 11 枚质量相等, 可得 $9x = 11y$, 再根据两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两. 故可得 $(10y + x) - (8x + y) = 13$.

因此
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

所以答案为
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

【点睛】本题主要考查二元一次方程组的应用, 关键在于理解题意, 这是中考的必考题, 必须熟练掌握.

16. 2022 年 10 月 12 日, “天宫课堂”第三课在问天实验舱内开讲. 进行的太空实验有①毛细效应; ②水球变“懒”实验; ③太空趣味饮水; ④会调头的扳手. 某校 1500 名学生在线观看了“天宫课堂”第三课, 并参与了关于“我最喜爱的太空实验”的问卷调查. 如果从中随机抽取 45 名学生的问卷调查情况进行统计分析, 并将调查数据整理成下面的条形图, 那么估计该校喜欢③太空趣味饮水实验的初中学生有_____名.



【答案】 500

【解析】

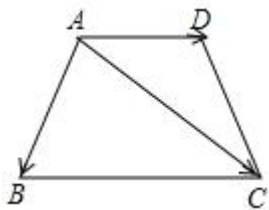
【分析】根据该校喜欢③太空趣味饮水实验的初中学生有 $1500 \times \frac{15}{45}$, 计算求解即可.

【详解】解: 由题意知, 该校喜欢③太空趣味饮水实验的初中学生有 $1500 \times \frac{15}{45} = 500$ (名),

故答案为：500.

【点睛】 本题考查了条形统计图，用样本估计总体. 解题的关键在于从条形统计图中获取正确的信息.

17. 如图，已知梯形 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $BC=2AD$ ，如果 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AC}=\underline{\hspace{2cm}}$ (用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示).



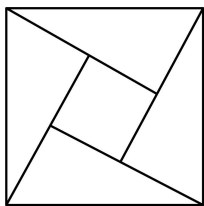
【答案】 $2\vec{a}+\vec{b}$

【解析】

【详解】 $\because$ 梯形 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $BC=2AD$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ ， $\therefore \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}=2\vec{a}$ ， $\because \overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+\vec{b}$. 故答案为 $2\vec{a}+\vec{b}$.

18. 2002 年在北京召开的国际数学家大会，会标是以我国古代数学家赵爽弦图为基础设计的，弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形 (如图)，如图的弦图中大正方形边长为 4，每个直角三角形较小的锐角为 30° ，那么小正方形面积为_____.

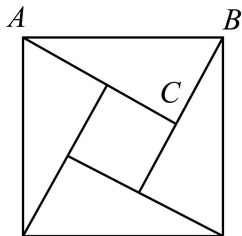


【答案】 $16-8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半，再由勾股定理可得另一直角边，于是可得直角三角形面积，根据全等三角形的面积相等计算面积差即可；

【详解】 解：设上面的直角三角形为 $Rt\triangle ABC$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ，



则 $AB=4$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ，

$\therefore BC=2$ ， $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore Rt\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 四个直角三角形全等,

$\therefore$ 四个直角三角形面积相等,

$$\therefore \text{小正方形面积} = \text{大正方形面积} - 4 \times Rt\triangle ABC \text{ 面积} = 16 - 8\sqrt{3},$$

故答案为: $16 - 8\sqrt{3}$;

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质, 勾股定理, 掌握 30° 直角三角形的边长关系是解题关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{4}{1+\sqrt{3}} - (\cos 30^\circ)^{-1} + |-\tan 45^\circ| + \pi^0.$

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 先根据分母有理化、特殊角的三角函数值、负整数指数幂、绝对值、零指数幂的运算法则计算, 再合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{4}{1+\sqrt{3}} - (\cos 30^\circ)^{-1} + |-\tan 45^\circ| + \pi^0 \\ &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} + |-1| + 1 \\ &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 + 1 \\ &= 2(\sqrt{3}-1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ &= 2\sqrt{3} - 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了分母有理化、特殊角的三角函数值、负整数指数幂、绝对值、零指数幂, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=2 \text{ ①} \\ x^2-5xy+4y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ y_1=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=\frac{4}{3} \\ y_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】将方程②因式分解，得到两个新的方程，原方程组转化为两个新的方程组，求解即可.

【详解】由②得: $(x-y)(x-4y)=0$,

$$x-y=0 \text{ 或 } x-4y=0,$$

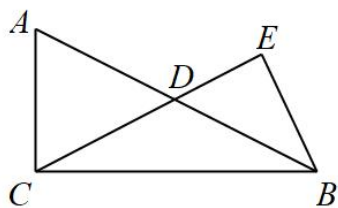
因此，原方程组可以化为两个二元一次方程组

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=0 \end{cases}.$$

分别解这两个方程组，得原方程组的解是
$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ y_1=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=\frac{4}{3} \\ y_2=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

【点睛】本题考查二元一次方程组，因式分解；注意将②式因式分解转化为两个方程是本题关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=2$ ， $BC=4$ ，点 D 为 AB 的中点，过点 B 作 CD 的垂线，交 CD 的延长线于点 E .



(1) 求线段 CD 的长;

(2) 求 $\frac{CD}{DE}$ 的值.

【答案】 (1) $\sqrt{5}$

(2) $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由 $Rt\triangle ACB$ 勾股定理可求得斜边，再由斜边中线可得 CD 长度.

(2) 通过相似三角形得到比例, 求出 BE 长度, 再通过 $Rt\triangle EBD$ 勾股定理求出 DE 长度, 再计算比值即可.

【小问 1 详解】

$$\because \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore Rt\triangle ACB \text{ 中 } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}, \text{ 代入 } AC = 2, \quad BC = 4,$$

$$\text{得 } AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$D \text{ 为 } AB \text{ 的中点, } \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5}$$

【小问 2 详解】

解法 1:

$$D \text{ 为 } AB \text{ 的中点, } \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = AD = BD = \sqrt{5}$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC$$

$$\text{又 } \because BE \perp CE, \quad \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle E = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle BEC$$

$$\therefore \frac{EB}{CB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{EB}{4}$$

$$\therefore EB = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore Rt\triangle BEC \text{ 中 } DE = \sqrt{BD^2 - EB^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{3}$$

解法 2:

$$Rt\triangle BEC \text{ 与 } Rt\triangle BED \text{ 中 } EB^2 = CB^2 - CE^2 = BD^2 - DE^2$$

$$\text{设 } DE = x \text{ 得 } 4^2 - (x + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 - x^2$$

$$\text{解得 } DE = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

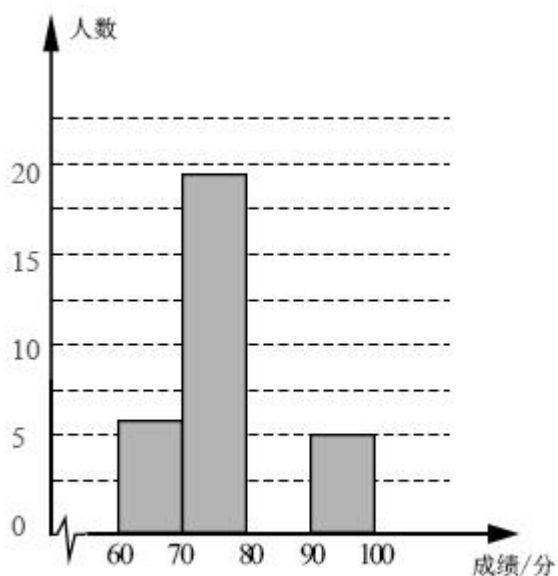
$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{3}$$

【点睛】本题考查几何图形中长度的计算，相似三角形，主要利用勾股定理进行长度关系计算，可以设元列勾股方程或结合相似计算，通常几何长度的求解可采用3中方法（勾股、相似、面积法），常考直角三角形和含有特殊角度的图形。在计算中灵活利用勾股定理是解题的关键。

22. 某校举办了首届“英语原创演讲比赛”，经选拔后有若干名学生参加决赛，根据测试成绩（成绩都不低于60分）绘制出如下两幅不完整的统计图表，请根据统计图表提供的信息完成下列各题。

表a:

分数段	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
频数	6	19	m	5
频率	15%	n	25%	12.5%



表b

- (1) 参加决赛的学生有_____名，请将图b补充完整；
- (2) 表a中的 $m =$ _____, $n =$ _____；
- (3) 如果测试成绩不低于80分为优秀，那么本次测试的优秀率是_____。

【答案】(1) 40，图见解析

(2) 10, 47.5%

(3) 37.5%

【解析】

【分析】(1) 根据表 a 中 60-70 分段的频数除以频率即为参加决赛的学生总人数，再利用 80-90 分段的频率求出 m 的值，即可补充表 b ；

(2) 在 (1) 问中已求出 m ，根据频率=频数/总数即可求出 n ；

(3) 先统计出 80 分以上人数之和，再除以总人数即可。

【小问 1 详解】

根据图 a 可知，分数 60-70 之间的人数有 6 人，频率为 15%，

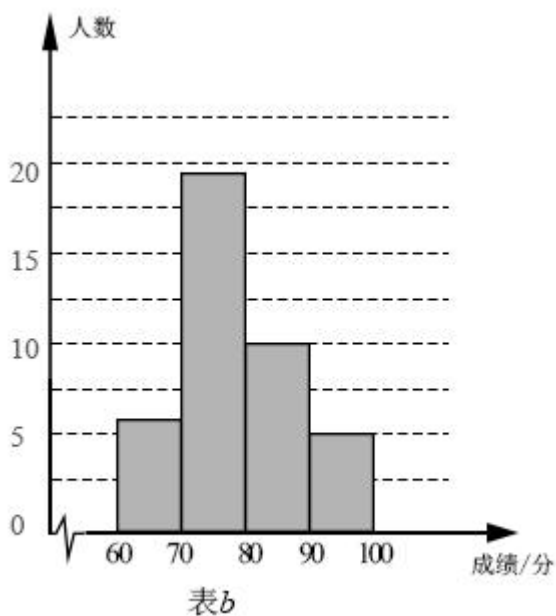
所以参加决赛的学生总数为 $6 \div 15\% = 40$ 人，

$\therefore$ 80-90 分段的频率为 25%，

$\therefore$ 80-90 分段的频数为 $40 \times 25\% = 10$ 人，

故答案为：40.

补充图 b 如下：



【小问 2 详解】

根据 (1) 问中已求出的 80-90 分段的频数 10 即为 m ，

从表 a 可知，70-80 分段人数为 19，

所以 $n = \frac{19}{40} \times 100\% = 47.5\%$ ，

故答案为：10；47.5%.

【小问 3 详解】

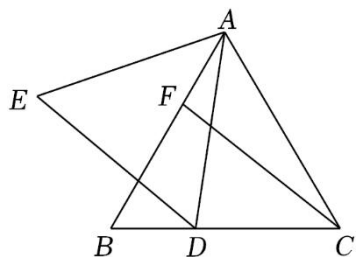
由表 a 可知，80 分以上人数有 $10+5=15$ 人，

所以优秀率 $= \frac{15}{40} \times 100\% = 37.5\%$ ，

故答案为：37.5%.

【点睛】 本题考查直方图，熟练掌握频数、频率的算法及直方图的作法是解题的关键.

23. 如图，已知： $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，其中点 D 在边 BC 上，点 F 是 AB 边上一点，且 $BF = CD$.



(1) 求证： $DE \parallel CF$;

(2) 联结 DF ，设 AD 、 CF 的交点为 M ，如果 $DF^2 = FM \cdot FC$ ，求证： $DF \parallel AC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 由等边三角形的性质证明 $\triangle ACD \cong \triangle CBF$ ，得出 $\angle CAD = \angle BCF$ ，由等边三角形的性质及三角形外角的性质得出 $\angle BDE = \angle CAD$ ，进而得出 $\angle BDE = \angle BCF$ ，即可证明 $DE \parallel CF$;

(2) 先证明 $\triangle DFM \sim \triangle CFD$ ，得出 $\angle FDM = \angle FCD$ ，由 $\angle CAD = \angle BCF$ ，得出 $\angle FDM = \angle CAD$ ，即可证明 $DF \parallel AC$.

【小问 1 详解】

如图 1,

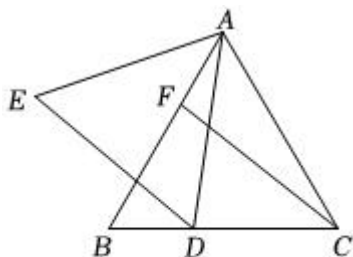


图 1

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AC = BC, \angle ACB = \angle B = 60^\circ$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AC = CB \\ \angle ACD = \angle B, \\ CD = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBF$ (SAS),

$\therefore \angle CAD = \angle BCF$,

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle ADE = \angle ACB = 60^\circ$,
 $\because \angle ADE + \angle BDE = \angle ACB + \angle CAD$,
 $\therefore \angle BDE = \angle CAD$,
 $\therefore \angle BDE = \angle BCF$,
 $\therefore DE \parallel CF$;

【小问 2 详解】

如图 2,

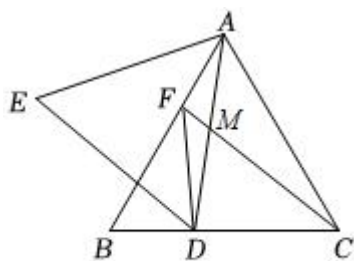


图 2

$\because DF^2 = FM \cdot FC$,
 $\therefore \frac{DF}{FM} = \frac{FC}{DF}$,
 $\because \angle DFM = \angle CFD$,
 $\therefore \triangle DFM \sim \triangle CFD$,
 $\therefore \angle FDM = \angle FCD$,
 $\because \angle CAD = \angle BCF$,
 $\therefore \angle FDM = \angle CAD$,
 $\therefore DF \parallel AC$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，掌握等边三角形的性质，全等三角形的判定与性质，平行线的判断，相似三角形的判定与性质是解决问题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ，联结 BC 交抛物线的对称轴 l 于点 E .

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 联结 CD 、 BD ，求证: $\triangle CDB$ 是直角三角形;
- (3) 点 M 是线段 BE 上的一点，点 N 是对称轴 l 右侧抛物线上的一点，如果 $\triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形，点 M 的坐标为_____.

A. $(4,2)$ B. $(2+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2})$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $(2+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2})$ 或 $(4,2)$

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(2) 直角三角形，见解析

(3) D

【解析】

【分析】本题考查了二次函数与几何综合，由待定系数法求出解析式，根据点坐标表示线段长，或由线段长表示点坐标是解题关键.

(1) 根据待定系数法，把点 $A(-2,0)$ 和点 $B(6,0)$ 代入函数解析式，即可求解；

(2) 根据抛物线函数解析式求出与 y 轴交于点 C ，顶点 D 坐标，然后根据坐标系两点距离公式计算边长，由勾股定理的逆定理即可判定；

(3) 根据先求出直线 BC 的解析式为 $y = -x + 6$ ，进而可得即 $E(2,4)$ ，再由 $\triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形，分两种情况讨论等腰直角三角形，由等腰直角三角形的性质得出 $EH = NH = MH = t$ ，进而用 t 表示出 M 、 N 坐标，代入解析式求出 t 值，即可求解.

【小问 1 详解】

解：依题意得：

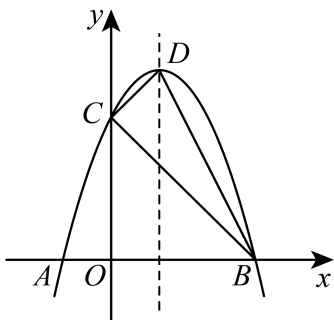
$$\begin{cases} 4a - 2b + 6 = 0 \\ 36a + 6b + 6 = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

【小问 2 详解】

$\triangle CDB$ 是直角三角形，证明过程如下：

如图：



$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$$

$\therefore C$ 是抛物线与 y 轴交点坐标为 $C(0, 6)$.

抛物线顶点坐标为 $D(2, 8)$

$$CD \text{ 的长度: } \sqrt{(2-0)^2 + (8-6)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$DB \text{ 的长度: } \sqrt{(6-2)^2 + (0-8)^2} = 4\sqrt{5}.$$

$$CB \text{ 的长度: } \sqrt{(6-0)^2 + (0-6)^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$CD^2 + CB^2 = (2\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 8 + 72 = 80 = (4\sqrt{5})^2 = DB^2$$

因此, $\triangle CDB$ 是直角三角形, $\angle DCB = 90^\circ$.

【小问 3 详解】

$$\therefore B(6, 0), C(0, 6)$$

$$\therefore OB = OC = 6, \text{ 直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -x + 6$$

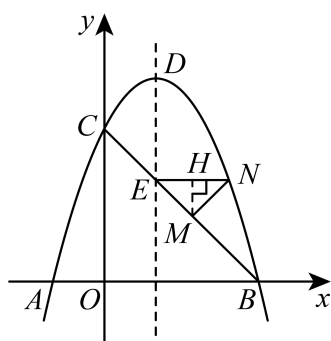
$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x = 2$, 点 E 是 BC 与对称轴的交点,

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = -x + 6 = 4, \text{ 即 } E(2, 4).$$

$\triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形, 分两种情况讨论等腰直角三角形:

情况一: 如图, (直角在 M 点): $\angle EMN = 90^\circ$, $EM = MN$,



$$\therefore \angle MEN = \angle ENM = 45^\circ,$$

$$\therefore EN \parallel x \text{ 轴,}$$

过点 M 作 $MH \perp EN$,

$$\therefore EM = MN,$$

$$\therefore \angle EMH = \angle NMH = 45^\circ,$$

$$\therefore EH = NH = MH,$$

$$\text{设 } EH = NH = MH = t,$$

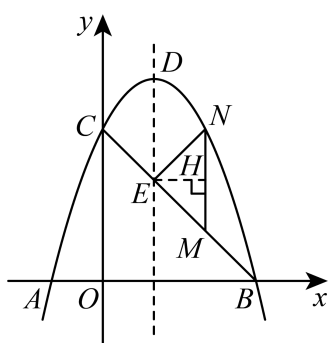
$$\text{则: } M(2+t, 4-t), \quad N(2+2t, 4)$$

把 $N(2+2t, 4)$, 代入抛物线解析式 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$ 得:

$$-\frac{1}{2}(2+2t-2)^2 + 8 = 4, \quad \text{解得 } t = \sqrt{2},$$

$$\text{对应 } M(2+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2}).$$

情况二: 如图, (直角在 E 点): $\angle NEM = 90^\circ$, $EM = EN$,



过点 M 作 $MH \perp EN$, 同理可设: $EH = NH = MH = t$

$$\text{则: } M(2+t, 4-t), \quad N(2+t, 4+t)$$

把 $N(2+t, 4+t)$, 代入抛物线解析式 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$ 得: $-\frac{1}{2}(2+t-2)^2 + 8 = 4+t$, 解得 $t = 2$, $t = -4$

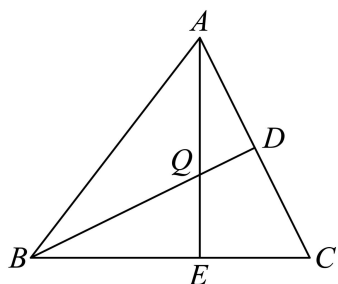
(不合题意舍去)

$$\text{对应 } M(4, 2).$$

综上所述: 点 M 的坐标为 $(4, 2)$ 或 $(2+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2})$,

故答案为 D.

25. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的两条高, 直线 BE 与直线 AD 交于点 Q .



(1) 如图, 当 $\angle BAC$ 为锐角时,

i) 求证: $DB^2 = DQ \cdot DA$; ii) 如果 $\frac{AQ}{QD} = 3$, 求 $\angle C$ 的正切值;

(2) 如果 $BQ = 3$, $EQ = 2$, 下列求 $\triangle ABC$ 的面积算式_____;

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times \sqrt{30} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} \right) = \frac{15\sqrt{5}}{2};$$

$$\textcircled{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \left(\frac{\sqrt{30}}{2} - \frac{2\sqrt{30}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{5}}{10};$$

A. ①②都正确 B. ①正确, ②错误 C. ①错误, ②正确 D. ①②都是错的

(3) 根据 (1)、(2) 小题, 提出一个问题并解答 (可以增加已知条件).

【答案】(1) 1) 见解析; 2) 2

(2) A (3) 答案不唯一

【解析】

【分析】对于 (1), 根据题意可知 $\angle BAD = \angle CAD$, 即可得 $\angle BAD = \angle CBE$, 再证明 $\triangle BDQ \sim \triangle ADB$ 即可;

设 $DQ = x$, 则 $AQ = 3x, AD = 4x$, 根据 $BD^2 = DQ \cdot AD$ 可得 $BD = 2x$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 可得答案;

对于 (2), 设 $DQ = x$, 说明 $\triangle BQD \sim \triangle AQE$, 表示 $AQ = \frac{6}{x}$, 再根据 $BD^2 = DQ \cdot DA$, 且 $DQ = x$, 结

合勾股定理得 $9 - x^2 = x \cdot AD$, 然后分 $\angle BAC$ 为锐角时, 根据 $AD = AQ + DQ = x + \frac{6}{x}$ 列出方程, 求出解,

进而得出 BC, AD , 根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD$ 得出结果; 当 $\angle BAC$ 为钝角时, 先根据相似三角形的对应

边成比例得 $BD^2 = DQ \cdot DA$, 再根据 $AD = DQ - AQ = x - \frac{6}{x}$, 然后依据勾股定理得 $9 - x^2 = x^2 - 6$, 求

出解, 可得 BC, AD , 最后求出面积判断即可;

对于 (3), 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, AD, BE$ 是 $\triangle ABC$ 得两条高, AD, BE 交于点 Q , 若 $AQ = 2, DQ = 6$,

求 $\triangle ABC$ 的面积. 再分两种情况结合 $BD^2 = DQ \cdot DA$ 求出 BD , 可得 BC , 则此题可解.

【小问 1 详解】

①证明: $\because AB = AC, AD \perp BC$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

$\because BE \perp AC, AD \perp BC$, 且 $\angle C = \angle C$,

$\therefore \angle CBE = \angle CAD$,

$\therefore \angle BAD = \angle CBE$.

$$\because \angle ADB = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle BDQ \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{DB}{DA} = \frac{DQ}{DB},$$

$$\text{即 } BD^2 = DQ \cdot DA;$$

$$\text{②由题意, 设 } DQ = x, \text{ 则 } AQ = 3x, AD = 4x,$$

$$\because BD^2 = DQ \cdot DA,$$

$$\therefore BD = 2x.$$

$$\because AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore BD = CD = 2x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \tan \angle C = \frac{AD}{CD} = 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 设 } DQ = x,$$

$$\because \angle CBE = \angle CAD, \angle BQD = \angle AQE,$$

$$\therefore \triangle BQD \sim \triangle AQE,$$

$$\therefore \frac{BQ}{AQ} = \frac{DQ}{EQ}.$$

$$\because BQ = 3, EQ = 2,$$

$$\therefore AQ = \frac{6}{x}.$$

$$\because BD^2 = DQ \cdot DA, \text{ 且 } DQ = x,$$

$$\text{根据勾股定理, 得 } BD^2 = 9 - x^2,$$

$$\therefore 9 - x^2 = x \cdot AD.$$

当 $\angle BAC$ 为锐角时,

$$\therefore AD = AQ + DQ = x + \frac{6}{x},$$

$$\therefore 9 - x^2 = x^2 + 6,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore BC = 2BD = 2\sqrt{9 - \frac{3}{2}} = \sqrt{30}, \quad AD = x + \frac{6}{x} = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times \sqrt{30} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{15\sqrt{5}}{2};$$

当 $\angle BAC$ 为钝角时,

$$\therefore BE \perp AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle C = \angle EAQ + \angle Q = 90^\circ, \text{ 且 } \angle EAQ = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle Q = \angle C.$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

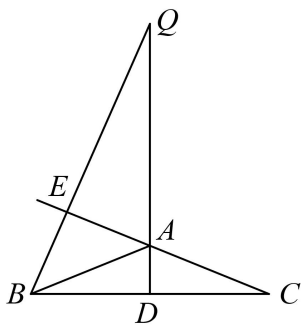
$$\therefore \angle ABC = \angle Q.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BDQ,$$

$$\therefore \triangle BDQ \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{DB}{DA} = \frac{DQ}{DB},$$

$$\text{即 } BD^2 = DQ \cdot DA.$$



$$\therefore AD = DQ - AQ = x - \frac{6}{x},$$

$$\therefore 9 - x^2 = x^2 - 6,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{30}}{2},$$

$$\therefore BC = 2BD = 2\sqrt{9 - \frac{15}{2}} = \sqrt{6}, \quad AD = x - \frac{6}{x} = \frac{\sqrt{30}}{2} - \frac{2\sqrt{30}}{5} = \frac{\sqrt{30}}{10},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{30}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{10},$$

$\therefore$ ①②都正确.

故选: A.

【小问3 详解】

已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD, BE 是 $\triangle ABC$ 得两条高, AD, BE 交于点 Q , 若 $AQ = 2, DQ = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: 当 $\angle BAC$ 为锐角时,

$$\therefore AQ = 2, DQ = 6,$$

$$\therefore AD = AQ + DQ = 8.$$

由 (1) 可知 $BD^2 = DQ \cdot DA$,

$$\text{即 } BD^2 = 6 \times 8 = 48,$$

解得 $BD = 4\sqrt{3}$,

$$\therefore BC = 2BD = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 8 = 32\sqrt{3};$$

当 $\angle BAC$ 为钝角时,

$$\therefore AQ = 2, DQ = 6,$$

$$\therefore AD = DQ - AQ = 4.$$

由 (1) 可知 $BD^2 = DQ \cdot DA$,

$$\text{即 } BD^2 = 6 \times 4 = 24,$$

解得 $BD = 2\sqrt{6}$,

$$\therefore BC = 2BD = 4\sqrt{6},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 4 = 8\sqrt{6}.$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积是 $32\sqrt{3}$ 或 $8\sqrt{6}$. (答案不唯一)

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质和判定, 勾股定理, 求三角形的面积, 注意分情况讨论.