

2025 学年第二学期初三数学期中试卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) [每题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 下列实数中, 比 3 小的无理数是 ()

- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt{8}$ C. π D. $\sqrt{(-3)^2}$

【答案】 B

【解析】

【详解】解: A、 $\sqrt{4} = 2$ 是有理数, 不符合题意;

B、 $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, 且 $\sqrt{8}$ 是无理数, 符合题意;

C、 $\pi > 3$, 不符合题意;

D、 $\sqrt{(-3)^2} = 3$, 不符合题意.

2. 上海市 2025 年全年地区生产总值约为 5.67 万亿元, 其中 5.67 万亿用科学记数法表示为 ()

- A. 5.67×10^{10} B. 5.67×10^{11} C. 5.67×10^{12} D. 5.67×10^{13}

【答案】 C

【解析】

【分析】先将“万亿”单位换算为普通数字形式, 再根据用科学记数法表示较大的数的形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq a < 10$, n 为正整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

【详解】解: 5.67 万亿 = 5670000000000 = 5.67×10^{12} .

3. 已知 $\odot O$ 及其所在平面内的直线 l , P 为直线 l 上的一点, 如果 $\odot O$ 半径为 3, 且 $PO = 3$, 那么下列对直线 l 的表述不正确的是 ()

- A. 直线 l 可能经过圆心 O B. 直线 l 可能与 $\odot O$ 相交
C. 直线 l 可能与 $\odot O$ 相切 D. 直线 l 可能与 $\odot O$ 相离

【答案】D

【解析】

【分析】根据垂线段最短得到圆心到直线的距离范围，再结合直线与圆位置关系的判定即可得出结论

【详解】解：设 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，

由题意得 $r=3$ ， P 为 l 上一点， $PO=3$ ，

$\therefore$ 点到直线的距离，垂线段最短，

$\therefore d \leq PO=3$ ，即 $d \leq r$ ，

$\therefore$ 直线与圆相离的判定条件为 $d > r$ ，

$\therefore d$ 不可能大于 r ，

$\therefore$ 直线 l 不可能与 $\odot O$ 相离.

4. 在2026年春季社会实践活动中，某校九（1）班共分成5个活动小组，小组人数分别为6，6，7，5，6，那么对上述小组人数数据，下列说法中错误的是（ ）

- A. 平均数是6 B. 中位数是6 C. 众数是6 D. 方差是6

【答案】D

【解析】

【分析】根据众数、平均数、中位数、方差的定义和公式分别进行计算即可.

【详解】解：A、平均数是 $(6+6+7+5+6) \div 5 = 6$ ，故本选项说法正确，不符合题意；

B、把这些数从小到大排列为：5，6，6，6，7，

$\therefore$ 中位数是6，故本选项说法正确，不符合题意；

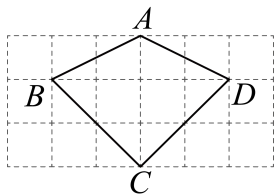
C、 $\because$ 6出现了3次，出现的次数最多，

$\therefore$ 众数是6，故本选项说法正确，不符合题意；

D、方差为： $\frac{1}{5} \times [(5-6)^2 + 3 \times (6-6)^2 + (7-6)^2] = \frac{2}{5}$ ，

$\therefore$ 本选项说法错误，符合题意.

5. 如图，方格纸中每个小正方形的边长为1，其上有一个四边形 $ABCD$ （ A 、 B 、 C 、 D 均为格点），那么下列说法中正确的是（ ）



A. 四边形 $ABCD$ 是菱形

B. 四边形 $ABCD$ 的周长是 $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

C. 四边形 $ABCD$ 的面积是 6

D. $\angle ABC = \angle ADC = 45^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】对于 A, 由勾股定理求得 $AB = AD = \sqrt{5}$, $BC = CD = 2\sqrt{2}$, 即可判断; 对于 B, 求出四边形 $ABCD$ 的周长即可判断; 对于 C, 设 AC 和 BD 相交于点 O , 则 $BD=4$, $AO=1$, $CO=2$, 求出四边形 $ABCD$ 的面积即可判断; 对于 D, 由 $\angle ABC > \angle CBD = 45^\circ$, $\angle ADC > \angle CDB = 45^\circ$, 即可判断.

【详解】解: 根据勾股定理, $AB = AD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $BC = CD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AB \neq BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 不是菱形,

$\therefore$ 选项 A 错误, 不符合题意;

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长是 $2AB + 2CD = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$,

$\therefore$ 选项 B 错误, 不符合题意;

设 AC 和 BD 相交于点 O ,

则 $BD=4$, $AO=1$, $CO=2$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积是 $\frac{1}{2}DB \cdot AO + \frac{1}{2}DB \cdot CO = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 6$,

$\therefore$ 选项 C 正确, 符合题意;

$\therefore \angle ABC > \angle CBD = 45^\circ$, $\angle ADC > \angle CDB = 45^\circ$,

$\therefore$ 选项 D 错误, 不符合题意.

6. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(1, 1+2t)$, $B(m, 2t)$, 当 $y > y_0$ 时, x 的取值范围是 $n-6 < x < 4-n$, 那么 m 的值可能是 ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知该抛物线的对称轴和开口方向, 并通过比较两点的纵坐标可知两点离对称轴的远近关系, 由此可列不等式, 求出 m 的范围, 进而选出符合条件的选项.

【详解】解: $\therefore$ 当 $y > y_0$ 时, x 的取值范围是 $n-6 < x < 4-n$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = \frac{n-6+4-n}{2} = -1$,

$\therefore 1+2t > 2t$,

∴ 点 A 较点 B 更靠近对称轴, 即 $1 - (-1) < |m - (-1)|$,

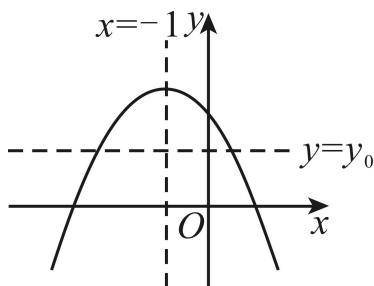
整理得 $|m+1| > 2$,

当 $m+1 \geq 0$ 时, 即 $m \geq -1$, 有 $m+1 > 2$, 解得 $m > 1$,

当 $m+1 < 0$ 时, 即 $m < -1$, 有 $-(m+1) > 2$, 解得 $m < -3$,

综上, $m > 1$ 或 $m < -3$,

∴ 只有 D 选项符合题意.



二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $3a \cdot (-2a^2b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-6a^3b$

【解析】

【分析】 根据单项式乘单项式运算法则即可得到结果.

【详解】 解: $3a \cdot (-2a^2b) = 3 \times (-2)(a \cdot a^2)b = -6a^3b$.

8. 请写出使代数式 $\frac{\sqrt{a}}{a-1}$ 有意义的 a 的一个值为: $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2 (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件, 确定 a 的取值范围, 在取值范围内任取一个符合要求的值即可.

【详解】 解: 由题意得, $a \geq 0$ 且 $a-1 \neq 0$,

∴ 解得 $a \geq 0$ 且 $a \neq 1$,

∴ $a = 2$.

9. 方程 $\frac{x}{x-3} + 1 = \frac{7}{x-3}$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = 5$

【解析】

【分析】将分式方程去分母转化为一元一次方程，求出一元一次方程的解后检验，即可得到原分式方程的解.

【详解】解： $\frac{x}{x-3} + 1 = \frac{7}{x-3}$

$$x + (x - 3) = 7$$

$$2x - 3 = 7$$

$$2x = 10$$

解得 $x = 5$,

检验：当 $x = 5$ 时， $x - 3 = 2 \neq 0$,

$\therefore x = 5$ 是原分式方程的解.

10. 数据 90、91、92、93、94 的标准差是_____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先计算这组数据的平均数，再计算方差，最后求出方差的算术平方根即为标准差.

【详解】解：首先计算这组数据的平均数，得 $\bar{x} = \frac{1}{5}(90 + 91 + 92 + 93 + 94) = 92$,

再根据方差的计算公式计算方差，得

$$s^2 = \frac{1}{5} \times \left[(90 - 92)^2 + (91 - 92)^2 + (92 - 92)^2 + (93 - 92)^2 + (94 - 92)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{5} \times 10$$

$$= 2,$$

标准差是方差的算术平方根，因此该组数据的标准差为 $\sqrt{2}$.

11. 方程组 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 - 4y^2 + 9 = 0 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】将 $x^2 - 4y^2 + 9 = 0$ 化为 $(x + 2y)(x - 2y) + 9 = 0$ ，进而根据 $x + 2y = 3$ 得到 $x - 2y = -3$ ，联立

$x + 2y = 3$ ， $x - 2y = -3$ 得 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ ，求解即可.

【详解】解： $\because x^2 - 4y^2 + 9 = 0$,

$$\therefore (x+2y)(x-2y) + 9 = 0,$$

$$\because x+2y=3,$$

$$\therefore 3(x-2y) + 9 = 0,$$

$$\text{解得: } x-2y = -3,$$

$$\text{联立 } x+2y=3, \quad x-2y=-3 \text{ 得 } \begin{cases} x+2y=3 \\ x-2y=-3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

12. 已知线段 $a = \sqrt{3}$, $b = 2$, 从 $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, 5$ 这五个数中任意选取一个数作为线段 c 的长度, 那么 a, b, c 是某直角三角形三边的长度的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】分类讨论, 根据勾股定理求得 c 的值, 进而根据概率公式, 即可求解.

【详解】解: $\because a = \sqrt{3}, b = 2$,

$\therefore$ 线段 a, b, c 组成直角三角形时,

$$\text{当 } c \text{ 为斜边时, } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{当 } b \text{ 为斜边时, } c = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

$\therefore 1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, 5$ 这五个数中任意选取一个数作为线段 c 的长度, a, b, c 是某直角三角形三边的长度的概率是 $\frac{2}{5}$.

13. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 4cx + 2c - 2 = 0$ 有一根是 $x = 0$, 那么该方程的另一根是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】先根据一元二次方程根的定义, 将已知根 0 代入原方程求出参数的值, 再利用根与系数的关系计算出方程的另一根.

【详解】解：将 0 代入方程 $x^2 - 4cx + 2c - 2 = 0$ 中，

$$\text{得 } 2c - 2 = 0$$

解得 $c = 1$ ，

设方程的另一根为 x_2 ，

$\therefore$ 其中一根为 $x_1 = 0$ ，

$$\therefore x_1 + x_2 = 4c$$

$$0 + x_2 = 4 \times 1$$

解得 $x_2 = 4$ 。

14. 已知点 $A(-4, m^2 + 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，那么在每个象限内，该函数的值 y 随 x 的值增大而_____。（填“增大”或“减小”）

【答案】增大

【解析】

【分析】根据点在反比例函数图象上确定 k 的符号，再结合反比例函数的性质判断 y 随 x 的变化规律。

【详解】解： $\because$ 点 $A(-4, m^2 + 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，

$$\therefore k = xy = -4(m^2 + 1),$$

$$\because m^2 \geq 0,$$

$$\therefore m^2 + 1 > 0,$$

$$\therefore k = -4(m^2 + 1) < 0,$$

根据反比例函数的性质，当 $k < 0$ 时，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大。

15. 在正方形 $ABCD$ 中， AC 是其对角线，那么 $\left| \overrightarrow{CD} \right| : \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right|$ 的值为_____。

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】本题可通过设正方形边长，建立平面直角坐标系，求出对应向量的坐标，再根据模长公式计算两个模长，最后求解比值。

【详解】解：设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，建立平面直角坐标系，令 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， $C(1,1)$ ， $D(0,1)$ ，

可得 $\overrightarrow{CD} = (0-1, 1-1) = (-1, 0)$,

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 ,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 0) , \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1) ,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1+1, 0+1) = (2, 1) ,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} ,$$

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| : |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

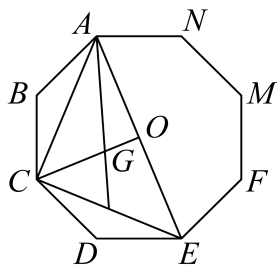
16. 已知正八边形 $ABCDEFGMN$ 的中心是点 O , 连接 AC , AE , CE , 点 G 是 $\triangle ACE$ 的重心, 如果 $AC = 6$, 那么线段 OG 的长等于_____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 利用正八边形的性质, 确定顶点共圆与各点位置关系, 确定 $\triangle ACE$ 为等腰直角三角形, 再结合勾股定理以及三角形重心的性质计算 OG 的长度.

【详解】 解: 如图所示,



$\therefore$ 正八边形 $ABCDEFGMN$ 的中心为点 O ,

$\therefore$ 正八边形所有顶点都在以 O 为圆心的同一个圆上,

正八边形的中心角为 $\frac{360}{8} = 45^\circ$, 顶点 A, C, E 之间各间隔 1 条边, 相邻两点对 O 的中心角为 $2 \times 45^\circ = 90^\circ$,

且 A, O, E 三点共线, O 是 AE 中点,

$$\therefore \angle CAE = \angle CEA = 45^\circ, \quad \angle ACE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2} AE = 3\sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ACE$ 的重心,

$$\therefore OG = \frac{1}{3}OC = \sqrt{2}.$$

17. 在直角坐标平面内, 如果存在正整数 n 和常数 k , 使得点 $A(x, y)$ 满足 $x^2 = -ny + k$, $y^2 = nx + k$, 其中 $x + y \neq 0$, 那么称点 A 为“ n -优点”. 比如当 $n = 2$, $k = 12$ 时, 点 $B(2, 4)$ 为“2-优点” (这是因为满足 $2^2 = -2 \times 4 + 12$, $4^2 = 2 \times 2 + 12$, $2 + 4 \neq 0$). 已知点 C 在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 2038$ 上, 且它还是“2026-优点”, 那么点 C 的坐标是_____.

【答案】 $(-6, 2020)$ 或 $(2, 2028)$

【解析】

【分析】 根据点 $A(x, y)$ 满足 $x^2 = -ny + k$, $y^2 = nx + k$, 得 $x^2 - y^2 = -ny + k - (nx + k)$, 进而得 $x - y = -n$, 即点 A 为“ n -优点”满足 $x - y = -n$, 设 $C(c, -c^2 - 3c + 2038)$, 将其代入 $x - y = -2026$, 得关于 c 的一元二次方程, 解方程即可求解. 注意检验.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(x, y)$ 满足 $x^2 = -ny + k$, $y^2 = nx + k$,

$$\therefore x^2 - y^2 = -ny + k - (nx + k),$$

$$\therefore (x + y)(x - y) = -n(x + y),$$

$$\because x + y \neq 0,$$

$$\therefore x - y = -n,$$

即点 A 为“ n -优点”满足 $x - y = -n$,

$\because$ 点 C 在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 2038$ 上,

$\therefore$ 可设 $C(c, -c^2 - 3c + 2038)$,

$\because$ 点 C 是“2026-优点”,

$$\therefore c - (-c^2 - 3c + 2038) = -2026,$$

$$\text{整理得 } c^2 + 4c - 12 = 0,$$

$$\text{解得 } c = -6 \text{ 或 } c = 2,$$

$$\text{当 } c = -6 \text{ 时, } -c^2 - 3c + 2038 = 2020,$$

$$\text{当 } c = 2 \text{ 时, } -c^2 - 3c + 2038 = 2028,$$

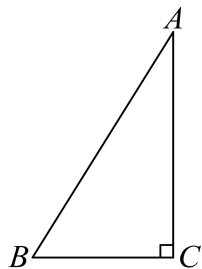
故点 C 的坐标为 $(-6, 2020)$ 或 $(2, 2028)$.

检验：对于点 $(-6, 2020)$ ，有 $x + y = -6 + 2020 = 2014 \neq 0$ ；

对于点 $(2, 2028)$ ，有 $x + y = 2 + 2028 = 2030 \neq 0$ 。

两点均满足题意。

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC < AC$ 。将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转，点 A 、 B 的对应点分别是点 D 、 E ，如果点 A 恰好在直线 DE 上，且 $CE \parallel AB$ ，那么 $\frac{AE}{AD}$ 的值为_____。

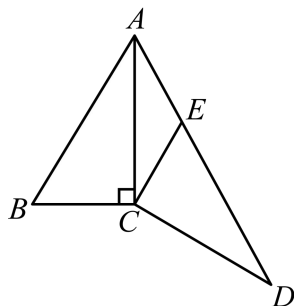


【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】由旋转，平行线的性质以及等腰三角形的性质证明 $\angle CAE = \angle ACE = \angle D$ ，再对 $\triangle ACD$ 运用内角和定理可求 $\angle CAE = 30^\circ$ ，再利用直角三角形的性质求解即可。

【详解】解：由旋转得 $\angle D = \angle BAC$ ， $AC = CD$ ， $\angle ECD = \angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = DE$ ，



$$\therefore \angle D = \angle CAD,$$

$$\because CE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACE = \angle D,$$

$$\therefore BC = CE = AE,$$

在 $\triangle ACD$ 中，由内角和定理得： $\angle CAE + \angle ACE + 90^\circ + \angle D = 180^\circ$ ，

$$\therefore 3\angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACE = \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC,$$

$$\therefore DE = 2AE, \text{ 即 } AD = 3AE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 写在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $\sqrt{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |2 - \sqrt{3}| - 6 \cot 60^\circ.$

【答案】 $2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先计算负整数指数幂、绝对值和特殊的三角函数值, 再化简二次根式, 最后计算加减法即可.

【详解】 解: $\sqrt{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |2 - \sqrt{3}| - 6 \cot 60^\circ$

$$= 2\sqrt{3} + 4 - (2 - \sqrt{3}) - 6 \times \frac{1}{\tan 60^\circ}$$

$$= 2\sqrt{3} + 4 - 2 + \sqrt{3} - 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3} + 4 - 2 + \sqrt{3} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 4 - 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= 2 + \sqrt{3}.$$

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x - 1 \geq x - 5 \\ \frac{x + 5}{3} > \frac{x}{2} + 1 \end{cases}.$$

【答案】 $-2 \leq x < 4$

【解析】

【分析】 先分别求出两个不等式的解集, 再取两个解集的公共部分得到不等式组的解集.

【详解】 解:
$$\begin{cases} 3x - 1 \geq x - 5 \text{ ①} \\ \frac{x + 5}{3} > \frac{x}{2} + 1 \text{ ②} \end{cases},$$

①: $3x - 1 \geq x - 5$

$$3x - x \geq -5 + 1$$

$$2x \geq -4$$

解得 $x \geq -2$,

$$\textcircled{2}: \frac{x+5}{3} > \frac{x}{2} + 1$$

$$2(x+5) > 3x+6$$

$$2x+10 > 3x+6$$

解得 $x < 4$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-2 \leq x < 4$.

21. 某地一商场为减少能源消耗, 计划为商场外墙与屋顶加建隔热层, 加建成本 w_1 (万元) 与隔热层厚度 x (厘米) 满足关系式 $w_1 = 20x$. 加建后该商场预计每年的能源消耗费用 w_2 (万元) 与隔热层厚度 x (厘米) 满足关系式 $w_2 = -\frac{1}{5}x^2 - 3x + 36 (0 \leq x \leq 8)$. 如果设该商场加建隔热层的成本与未来 5 年的能源消耗费用之和为 y (万元).

(1) 求 y 与 x 的关系式;

(2) 已知该商场未来 5 年的相关计划费用 p (万元) 满足 $p = y + x^2 - x$, 那么当 $192 \leq p \leq 208$ 时, 求隔热层厚度 x (厘米) 的取值范围.

【答案】 (1)

$$y = -x^2 + 5x + 180 \quad (0 \leq x \leq 8)$$

(2)

$$3 \leq x \leq 7$$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意可得: $y = w_1 + 5w_2$, 把 $w_1 = 20x$, $w_2 = -\frac{1}{5}x^2 - 3x + 36 (0 \leq x \leq 8)$ 代入 $y = w_1 + 5w_2$ 即可得到 y 与 x 的关系式;

(2) 把 $y = -x^2 + 5x + 180$ 代入 $p = y + x^2 - x$, 可得 $p = 4x + 180$, 根据 $192 \leq p \leq 208$, 可得关于 x 的不等式组, 解不等式组即可求出 x 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 根据题意可得: $y = w_1 + 5w_2$,

$$\therefore w_1 = 20x, \quad w_2 = -\frac{1}{5}x^2 - 3x + 36 (0 \leq x \leq 8),$$

$$\therefore y = 20x + 5\left(-\frac{1}{5}x^2 - 3x + 36\right),$$

整理可得: $y = -x^2 + 5x + 180 (0 \leq x \leq 8)$;

【小问 2 详解】

解: $\because y = -x^2 + 5x + 180 (0 \leq x \leq 8)$,

$$\therefore p = y + x^2 - x$$

$$= -x^2 + 5x + 180 + x^2 - x$$

$$= 4x + 180,$$

$$\because 192 \leq p \leq 208,$$

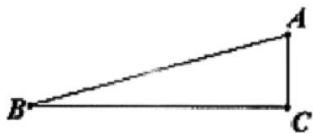
$$\therefore 192 \leq 4x + 180 \leq 208,$$

解得: $3 \leq x \leq 7$.

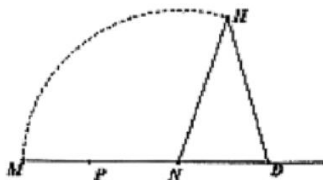
22. 在九年级第一学期时学习了“黄金分割”以及“黄金三角形”知识, 我们已经知道: 有一个内角为 36°

的等腰三角形称为黄金三角形, 它具有 $\frac{\text{较短边的长}}{\text{较长边的长}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的美妙性质. 请运用上述信息, 解决下列问

题:



【图 1】



【图 2】

- (1) 填空: 等腰 ABC 的顶角 $\angle A = 36^\circ$, 且 $AB = 4$, 那么底边 $BC =$ _____.
- (2) 如图 1, 在 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 18^\circ$, 且 $AB = 4$, 求 AC 的长.
- (3) 如图 2, 已知点 P 是线段 MN 的黄金分割点 ($PM < PN$), 在 MN 的延长线上截取 $ND = PN$, 将线段 NM 绕点 N 顺时针旋转 108° , 得到线段 NH , 连接 HD , 请判断 $\triangle NDH$ 是否是黄金三角形? 并说明理由.

【答案】(1) $2\sqrt{5}-2$

(2) $\sqrt{5}-1$

(3) $\triangle NDH$ 是黄金三角形, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 由题意易得 ABC 为黄金三角形, 根据 $\frac{\text{较短边的长}}{\text{较长边的长}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即可求解;

(2) 取 AB 中点 D , 连接 CD , 易证 $\triangle ACD, \triangle BCD$ 都是等腰三角形, 再求出 $\angle ADC = \angle BCD + \angle ABC = 36^\circ$, 证明 $\triangle ACD$ 是黄金三角形, 且 $\angle ADC$ 所对的边 AC 为较短边, 根据

$\frac{\text{较短边的长}}{\text{较长边的长}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即可求解;

(3) $\triangle NDH$ 是黄金三角形, 连接 MH , 由旋转的性质得 $MN = HN$, $\angle MNH = 108^\circ$, 证明 $\triangle MNH$ 是黄金三角形, 设 $PM = x$, 求出 $PN = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$, $MN = \frac{3+\sqrt{5}}{2}x$, $MH = (\sqrt{5}+2)x$, $MD = (\sqrt{5}+2)x$, 推出 $MD = MH$, 求出 $\angle HND = \angle MDH = 72^\circ$, 进而求出 $\angle NHD = 36^\circ$, 即可说明.

【小问1详解】

解: $\because$ 等腰 ABC 的顶角 $\angle A = 36^\circ$,

$\therefore ABC$ 为黄金三角形, 且 $\angle A$ 所对的边 BC 为较短边,

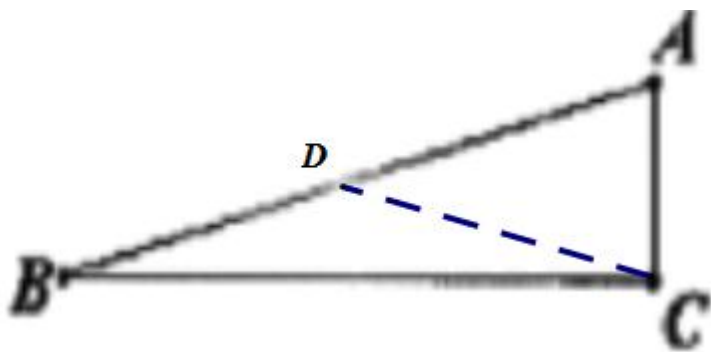
$\because AB = 4$,

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 即 } \frac{BC}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{5} - 2;$$

【小问2详解】

解: 取 AB 中点 D , 连接 CD ,



$$\because \angle C = 90^\circ, AB = 4,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = AD = BD = 2,$$

$\therefore \triangle ACD, \triangle BCD$ 都是等腰三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD, \angle A = \angle ACD,$$

$$\because \angle ABC = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ABC = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BCD + \angle ABC = 36^\circ,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是黄金三角形, 且 $\angle ADC$ 所对的边 AC 为较短边,

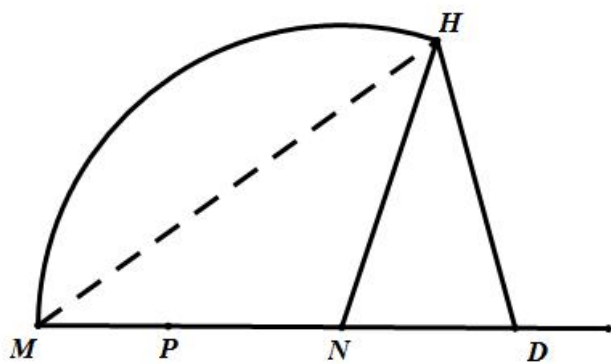
$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 即 } \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore AC = \sqrt{5}-1;$$

【小问 3 详解】

解: $\triangle NDH$ 是黄金三角形, 理由如下:

连接 MH ,



由旋转的性质得 $MN = HN$, $\angle MNH = 108^\circ$,

$$\therefore \angle NMH = \angle NHM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MNH) = 36^\circ,$$

$\therefore \triangle MNH$ 是黄金三角形, 且腰长 MN, NH 为较短边,

$$\therefore \frac{MN}{MH} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

设 $PM = x$,

$\because$ 点 P 是线段 MN 的黄金分割点 ($PM < PN$),

$$\therefore \frac{PN}{MN} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 即 } \frac{PN}{PN+PM} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore PN = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x,$$

$$\therefore MN = \frac{3+\sqrt{5}}{2}x,$$

$$\therefore MH = (\sqrt{5}+2)x,$$

$$\therefore ND = PN,$$

$$\therefore MD = MN + ND = (\sqrt{5}+2)x,$$

$$\therefore MD = MH,$$

$$\therefore \angle MHD = \angle MDH,$$

$$\therefore \angle NMH = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle MHD = \angle MDH = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle NMH) = 72^\circ,$$

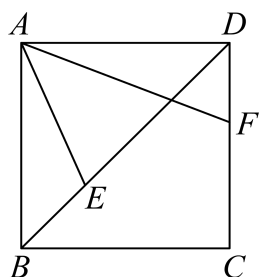
$$\therefore \angle HND = 180^\circ - \angle MNH = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle HND = \angle MDH = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle NHD = 180^\circ - \angle HND - \angle MDH = 36^\circ, \quad HN = HD,$$

$\therefore \triangle NDH$ 是黄金三角形.

23. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在对角线 BD 上, 点 F 在边 CD 上 (点 F 与点 C 不重合), 且 $\angle EAF = 45^\circ$.



(1) 求证: $AF \cdot BE = AE \cdot CF$;

(2) 在图中延长 AE 与 BC 交于点 H , 如果 $CF = \sqrt{2}DF$, 求证: $BH = DF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

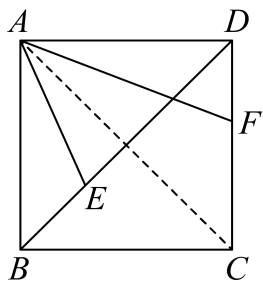
【解析】

【分析】(1) 连接 AC , 根据正方形的性质得到 $\angle ABD = \angle ACD = \angle BAC = 45^\circ$, 结合 $\angle EAF = 45^\circ$, 得到 $\angle BAE = \angle CAF$, 进而证明 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$, 进而得到 $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF}$, 从而得出结论;

(2) 设 $DF = a$, 则 $CF = \sqrt{2}a$, $CD = (\sqrt{2} + 1)a$, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理求出 $AC = \sqrt{2}AD$, 由 (1) 知 $\triangle BAE \sim \triangle CAF$, 则 $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$, 进而求出 $BE = a = DF$, 再证明 $\triangle ADE \sim \triangle HBE$, 进而得到 $\frac{BH}{AD} = \frac{BE}{DE}$, 利用 $DE = BD - BE$ 得到 $DE = AD$, 进而求出 $BH = \frac{AD \cdot BE}{DE} = a = DF$, 从而得出结论.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 AC ,



∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 $\therefore \angle ABD = \angle ACD = \angle BAC = 45^\circ$,

∵ $\angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle EAF$,

$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle CAF + \angle EAC$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAF$,

∵ $\angle ABE = \angle ACF$,

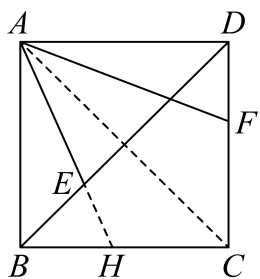
$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF$,

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF},$$

$$\therefore AF \cdot BE = AE \cdot CF;$$

【小问 2 详解】

证明：如图，



设 $DF = a$ ，则 $CF = \sqrt{2}a$ ，

$$\therefore CD = CF + DF = \sqrt{2}a + a = (\sqrt{2} + 1)a,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AD = BC = CD = (\sqrt{2} + 1)a, \angle ABC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AD$ ，

由 (1) 知， $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ ，

$$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{\sqrt{2}AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{BE}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

解得 $BE = a$,

$$\therefore BE = DF,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AC = BD = \sqrt{2}AD, \quad AD \parallel BC, \quad \text{即 } AD \parallel BH,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BHE,$$

$$\because \angle AED = \angle HEB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle HBE,$$

$$\therefore \frac{BH}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

$$\because BD = \sqrt{2}AD = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)a = (2 + \sqrt{2})a,$$

$$\therefore DE = BD - BE = (2 + \sqrt{2})a - a = (\sqrt{2} + 1)a,$$

$$\therefore DE = AD,$$

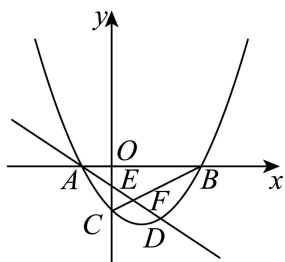
$$\therefore BH = \frac{AD \cdot BE}{DE} = \frac{AD \cdot a}{AD} = a,$$

$$\because DF = a,$$

$$\therefore BH = DF.$$

【点睛】 本题考查正方形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理，熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

24. 已知抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ 与 x 轴交于点 A, B (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C .



(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(2) 如图, 点 D 是抛物线第四象限上的一点, 直线 AD 分别交 OC 、 BC 于点 E 、 F , 如果 $\cot \angle DEC = \frac{3}{4}$, 求直线 AD 的表达式;

(3) 在第 (2) 小题的基础上, 将抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ 向左平移得到抛物线 C_2 , 直线 AD 与抛物线 C_2

交于 M 、 N 两点 (点 M 在点 N 的上方). 如果点 A 恰好是线段 MN 的中点. 求抛物线 C_2 的表达式.

【答案】 (1) 12 (2) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

(3) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{63}{16}$

【解析】

【分析】 (1) 根据抛物线解析式求出交点的坐标, 即可求出 AB 和 OC 的长度, 利用三角形的面积公式即可求出答案.

(2) 根据余切值和对顶角可求出 OE 的长度, 从而知道 E 点的坐标, 利用 E 点和 A 的坐标结合待定系数法即可求出直线 AD 的长度.

(3) 根据平移的性质设 C_2 的抛物线, 利用与直线 AD 的交点, 联立方程, 设 M, N 的坐标, 即可用 m 去表达两根之和, 根据中点公式求出 m 值, 即可求出 C_2 的抛物线解析式.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ 与 x 轴交于点 A , B , 与 y 轴交于点 C ,

$$\therefore \frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0 \text{ 时, } x = 6 \text{ 或 } x = -2,$$

$$x = 0 \text{ 时, } y = -3,$$

$$\therefore A(-2, 0), B(6, 0), C(0, -3),$$

$$\therefore AB = 6 - (-2) = 8, OC = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \cot \angle DEC = \frac{3}{4}$, 由图可知, $\angle DEC = \angle AEO$,

$$\therefore \cot \angle AEO = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{OE}{AO} = \frac{3}{4}.$$

$$\because AO = 2,$$

$$\therefore OE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore E\left(0, -\frac{3}{2}\right).$$

∵ 直线 AD 交 OC 于点 E ，经过 A 点，设直线 AD 解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 0 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 解析式为 } y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}.$$

【小问 3 详解】

解：∵ 抛物线 C_2 是由抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ 向左平移得到的，

$$\therefore \text{设平移 } m \text{ 个单位，则 } C_2 \text{ 的表达式为 } y = \frac{1}{4}(x+m)^2 - (x+m) - 3.$$

$$\text{联立直线 } AD \text{ 与 } C_2 \text{ 的方程为 } -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}(x+m)^2 - (x+m) - 3,$$

$$\text{整理得， } x^2 + (2m-1)x + m^2 - 4m - 6 = 0,$$

∵ 直线 AD 与抛物线 C_2 交于 M 、 N 两点，设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

$$\therefore x_1, x_2 \text{ 是方程 } x^2 + (2m-1)x + m^2 - 4m - 6 = 0 \text{ 的两根，}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -(2m-1) = 1-2m.$$

∵ 点 A 恰好是线段 MN 的中点， $A(-2, 0)$ ，

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1-2m}{2} = -2,$$

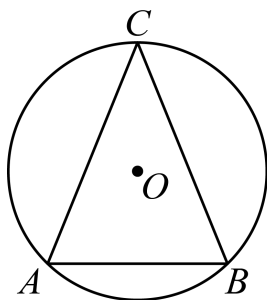
$$\therefore m = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore C_2 \text{ 的表达式为 } y = \frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{5}{2}\right) - 3 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{63}{16}.$$

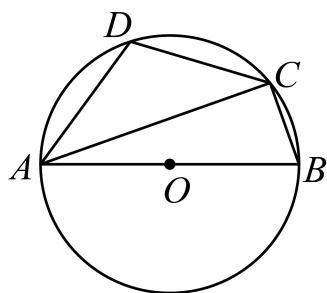
【点睛】本题考查了一次函数和二次函数综合，熟练掌握相关知识是解题关键（两根之和公式 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ，

坐标点中点公式 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ，余切值是邻边比对边，平移左加右减）。

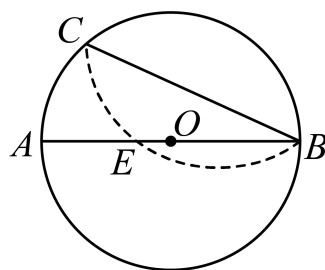
25. 已知线段 AB 是 $\odot O$ 的一条弦，点 C 是 $\odot O$ 上的一点。



(图1)



(图2)



(图3)

(1) 连接 AC 、 BC ，如图 1，如果 $AC = BC$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，且 $AB = 4\sqrt{2}$ ，求 $\odot O$ 的半径长；

(2) 当圆心 O 在线段 AB 上时.

①如图 2，已知点 D 在 $\odot O$ 上，满足 $DA = DC$ ，且 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ACB}$ ，如果 $BC = 2$ ，求 AC 的长.

②如图 3，已知点 E 在线段 AB 上，满足 $AE:BE = 2:3$ ，如果沿着弦 BC 翻折 $\odot O$ 后的弧线恰好经过点 E ，求 $\tan \angle ABC$ 的值.

【答案】 (1) 4 (2) ① $4\sqrt{2}$ ；② $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 连接 OA 、 OB ，根据圆周角定理得到 $\angle AOB = 2\angle C$ ，进而得到 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，利用勾股定理求解即可；

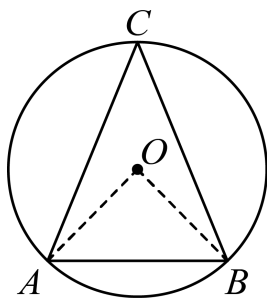
(2) ①连接 OD ，根据垂径定理得到 $OD \perp AC$ 、 $AF = CF = \frac{1}{2}AB$ ，由三角形中位线的性质得到 $OF = \frac{1}{2}BC$ ，根据圆周角定理得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，利用 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ACB}$ 求出 DF 长，进而求出 DO 长，在 $\text{Rt}\triangle OFA$ 中，根据勾股定理求出 AF 长，利用 $AC = 2AF$ 求解即可；

②过点 E 作 $EG \perp BC$ 交 $\odot O$ 于点 E' ，连接 AE' 、 BE' 、 OE' 、 AC ，设 $AE = 4m$ 、 $BE = 6m$ ，则 $AB = 10m$ ，由翻折的性质得： $BE' = BE = 6m$ 、 $\angle ABC = \angle E'BC$ 、 $E'G = EG$ ，证明 $\triangle AMC \sim \triangle E'MG$ ，则

$\frac{AM}{E'M} = \frac{AC}{E'G} = \frac{AC}{EG}$ ，再证明 $\triangle ABC \sim \triangle EBG$ ，进而得到 $AM = 5m$ 、 $E'M = 3m$ ，证明 $\triangle ACM \sim \triangle BCA$ ，得到 $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{AB}$ ，据此解答即可.

【小问 1 详解】

解：如图，连接 OA 、 OB ，



(图1)

$\because OA = OB$ 、 $\angle AOB = 2\angle C = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $OA^2 + OB^2 = AB^2$,

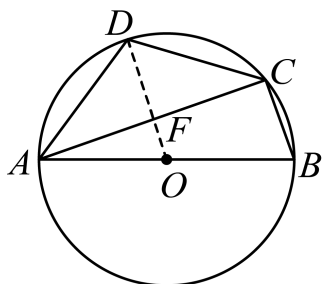
$$\therefore 2OA^2 = (4\sqrt{2})^2,$$

解得 $OA = 4$ 或 $OA = -4$ (舍去),

$\therefore \odot O$ 的半径长为 4;

【小问 2 详解】

①解: 如图, 连接 OD ,



(图2)

$\because AD = DC$ 、 OD 是 $\odot O$ 的半径,

$$\therefore OD \perp AC$$
、 $AF = CF = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore$ 点 F 是 AC 的中点,

$\therefore OF$ 是 ABC 的中位线,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ACB},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AC \times DF = \frac{1}{2} \times AC \times BC,$$

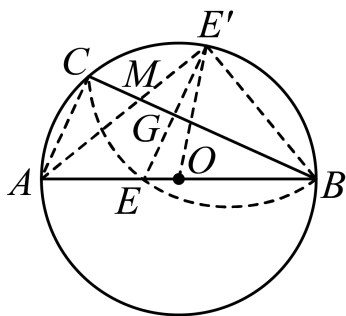
$$\therefore DF = BC = 2,$$

$$\therefore AO = DO = DF + OF = 2 + 1 = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle OFA$ 中, 由勾股定理得: $AF = \sqrt{AO^2 - FO^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$

$$\therefore AC = 2AF = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2};$$

②解: 如图, 过点 E 作 $EG \perp BC$ 交 $\odot O$ 于点 E' , 连接 AE' 、 BE' 、 OE' 、 AC , 设 AE' 交 BC 于点 M ,



(图3)

$$\therefore \angle E'GC = 90^\circ,$$

$$\because AE : BE = 2 : 3,$$

设 $AE = 4m$ 、 $BE = 6m$, 则 $AB = AE + BE = 4m + 6m = 10m$,

由翻折的性质得: $BE' = BE = 6m$ 、 $\angle ABC = \angle E'BC$ 、 $E'G = EG$,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = \angle AE'B = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE'$ 中, 由勾股定理得: $AE' = \sqrt{AB^2 - BE'^2} = \sqrt{(10m)^2 - (6m)^2} = 8m,$

$$\because \angle ACB = \angle E'GC = 90^\circ, \angle AMC = \angle E'MG,$$

$$\therefore \triangle AMC \sim \triangle E'MG,$$

$$\therefore \frac{AM}{E'M} = \frac{AC}{E'G} = \frac{AC}{EG},$$

$$\because \angle ACB = \angle EGB, \angle CBA = \angle GBA,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBG,$$

$$\therefore \frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EB} = \frac{10m}{6m} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \frac{AM}{E'M} = \frac{AC}{EG} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore AM = 5m, E'M = 3m,$$

$$\because \angle CAM = \angle E'BM, \angle ABC = \angle E'BC,$$

$$\therefore \angle CAM = \angle ABC,$$

$$\because \angle ACM = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle ACM \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{5m}{10m} = \frac{1}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查圆周角定理、垂径定理、等腰直角三角形的性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质、翻折的性质，熟练掌握相关性质定理，数形结合的思想方法的运用是解题的关键.