

# 2024 学年第二学期初三数学教学质量调研试卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列分数中, 能化为有限小数的是 ( )

A.  $\frac{5}{6}$                       B.  $\frac{6}{7}$                       C.  $\frac{7}{8}$                       D.  $\frac{8}{9}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查有理数的除法, 分数和小数的互化, 解题的关键是利用有理数的除法法则计算即可作出判断.

【详解】 解: A.  $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$ , 化成的小数是无限循环小数, 故此选项不符合题意;

B.  $\frac{6}{7} = 0.85714\dot{2}$ , 化成的小数是无限循环小数, 故此选项不符合题意;

C.  $\frac{7}{8} = 0.875$ , 化成的小数是有限小数, 故此选项符合题意;

D.  $\frac{8}{9} = 0.\dot{8}$ , 化成的小数是无限循环小数, 故此选项符合题意.

故选: C.

2. 已知方程组  $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ , 那么代数式  $x-3y$  的值是 ( )

A. 2                      B. 1                      C. -1                      D. -2

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查二元一次方程组的解法, 以及通过方程组的变形直接求代数式的值的能力. 把两个方程相减可得  $-x+3y=-1$ , 即可求出代数式的值.

【详解】 解:  $\begin{cases} x+2y=1 \text{ ①} \\ 2x-y=2 \text{ ②} \end{cases}$ ,

①-②得,  $-x+3y=-1$ ,

$\therefore x-3y=1$ ,

故选: B.

3. 以下运算结果等于  $a^9$  的是 ( )

A.  $a^3+a^6$

B.  $a \cdot a^9$

C.  $(-a^3)^3$

D.  $a^{11} \div a^2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查合并同类项, 同底数幂乘法及除法, 幂的乘方, 利用合并同类项法则, 同底数幂乘法及除法法则, 幂的乘方法则逐项判断即可.

【详解】 解: A、 $a^3$  与  $a^6$  不能合并, 故选项不符合题意;

B、 $a \cdot a^9 = a^{10}$ , 故选项不符合题意;

C、 $(-a^3)^3 = -a^9$ , 故选项不符合题意;

D、 $a^{11} \div a^2 = a^9$ , 则选项符合题意.

故选: D.

4. 已知某篮球队有 15 名队员, 他们身高的平均数和中位数都是 185 厘米, 后来发现在登记身高时, 将一名队员的身高由 174 厘米误写成 184 厘米, 再经过重新计算后, 正确的身高平均数为  $m$  厘米, 中位数为  $n$  厘米, 那么下列结论中正确的是 ( )

A.  $m < 185, n < 185$

B.  $m < 185, n = 185$

C.  $m > 185, n > 185$

D.  $m > 185, n = 185$

【答案】 B

【解析】

【分析】 此题考查了中位数和平均数. 根据题意求出重新计算后的中位数和平均数即可得到答案.

【详解】 解: 修改后的平均数为  $m = \frac{15 \times 185 - (184 - 174)}{15} \approx 184.33\text{cm}$ ,

中位数仍为第 8 个数, 即为 185 厘米,

$\therefore m < 185, n = 185$

故选: B

5. 边长为  $a$  的正十边形的半径是 ( )

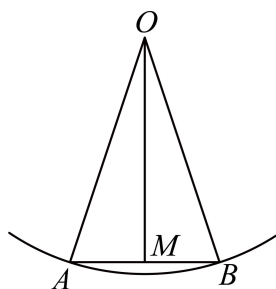
- A.  $\frac{a}{2\cos 72^\circ}$ ;      B.  $\frac{a}{2}\cos 72^\circ$       C.  $\frac{a}{2}\tan 72^\circ$       D.  $\frac{a}{2\tan 72^\circ}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查三角函数，正多边形的性质，根据题意画出图形，过点  $O$  作  $OM \perp AB$  交  $AB$  与点  $M$ ，再根据等腰三角形三线合一的性质得出  $AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ ， $\angle OAM = 72^\circ$ ，最后根据余弦的定义求解即可得出答案.

【详解】解：如图，正十边形的中心角  $\angle AOB = 360^\circ \div 10 = 36^\circ$ ， $AB = a$   
过点  $O$  作  $OM \perp AB$  交  $AB$  与点  $M$ ,



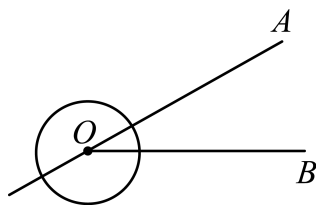
$$\therefore \angle AOM = \angle BOM = 18^\circ, \quad AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a, \quad \angle OMA = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle OAM = 72^\circ,$$

$$\therefore OA = \frac{AM}{\cos \angle OAM} = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos 72^\circ} = \frac{a}{2\cos 72^\circ}$$

故选：A.

6. 如图，已知  $\angle AOB = 30^\circ$ ， $\odot O$  的半径为 3. 点  $P$  在射线  $OB$  上， $\odot P$  的半径为  $r$ . 如果直线  $OA$  与  $\odot P$  相切，且  $\odot P$  与  $\odot O$  相交，那么  $r$  的值可以是 ( )



- A. 4      B. 3      C. 2      D. 1

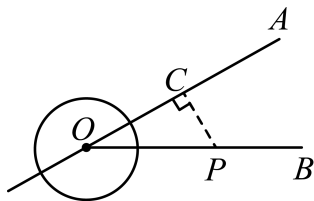
【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了切线的性质、解不等式组、含  $30^\circ$  角直角三角形的性质等知识. 设直线  $OA$  与  $\odot P$  相切于点  $C$ ，连接  $PC$ ，则  $PC \perp OA$ ，得到  $OP = 2PC = 2r$ ，由  $\odot P$  与  $\odot O$  相交得到  $|3 - r| < OP < 3 + r$ ，即可

求出  $r$  的取值范围, 即可得到答案.

【详解】解: 设直线  $OA$  与  $\odot P$  相切于点  $C$ , 连接  $PC$ , 则  $PC \perp OA$ ,



$\therefore \odot P$  的半径为  $r$ .  $\angle AOB = 30^\circ$ ,

$$\therefore PC = \frac{1}{2}OP,$$

即  $OP = 2PC = 2r$ ,

$\therefore \odot P$  与  $\odot O$  相交,

$$\therefore |3-r| < OP < 3+r,$$

$$\text{即 } |3-r| < 2r < 3+r,$$

当  $r \geq 3$  时,  $r-3 < 2r < 3+r$

解得,  $-3 < r < 3$ , 不符合题意,

当  $r < 3$  时,  $3-r < 2r < 3+r$

解得  $1 < r < 3$ ,

$\therefore r$  的值可以是 2,

故选: C

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算:  $\sqrt{81} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根. 直接根据算术平方根的定义求解即可.

【详解】解:  $\sqrt{81} = 9$ ,

故答案为: 9.

8. 如果  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ , 那么  $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了求函数值. 把自变量的值代入计算即可.

【详解】解：由题意可得， $f(2) = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$

9. 在大自然中充满着数学之美，向日葵上的螺旋线顺时针有 21 条，逆时针有 13 条，那么顺时针条数和逆时针条数的比值约为\_\_\_\_\_。（结果保留三位有效数字）

【答案】 1.62

【解析】

【分析】此题考查了比，根据题意列式求出比值即可．

【详解】解：由题意可得， $\frac{21}{13} \approx 1.62$ ，

故答案为：1.62

10. 如果关于  $x$  的方程  $x^2 + 3x + a = 0$  有两个相等的实数根，那么  $a$  的值是\_\_\_\_\_．

【答案】  $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】本题考查根的判别式，根据一元二次方程有两个相等的实数根，得到  $\Delta = 0$ ，列出方程求解即可．掌握根的判别式与根的个数之间的关系，是解题的关键．

【详解】解：由题意，得： $\Delta = 3^2 - 4a = 0$ ，

解得： $a = \frac{9}{4}$ ；

故答案为： $\frac{9}{4}$ ．

11. 如果反比例函数  $y = \frac{1+k^2}{x}$  ( $k$  是常数) 的图像经过点  $A(3, y_1)$ ， $B(5, y_2)$ ，那么  $y_1$  和  $y_2$  的大小关系

是： $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$ ．（填“>”、“=”或“<”）

【答案】 >

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质，熟练掌握和运用反比例函数的性质是解决本题的关键．根据反比例函数的性质即可判定．

【详解】解： $\because$  在反比例函数  $y = \frac{1+k^2}{x}$  中， $1+k^2 > 0$

$\therefore y$  随  $x$  的增大而减小，

$$\because 3 < 5,$$

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为:  $>$ .

12. 布袋里有 2 个红球、3 个黄球、4 个白球, 它们除颜色外其他都相同. 从布袋里摸出一个球恰好为红球的概率是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{2}{9}$

【解析】

【分析】 本题主要考查概率的计算, 理解并掌握随机事件概率的计算公式是解题的关键.

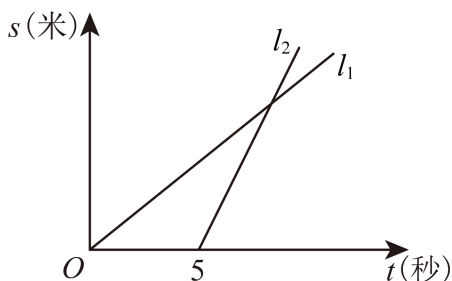
根据概率的计算即可求解.

【详解】 解: 摸出一个球恰好为红球的概率是  $\frac{2}{2+3+4} = \frac{2}{9}$ ,

故答案为:  $\frac{2}{9}$ .

13. 甲、乙两人在同一起点出发, 乙比甲晚 5 秒, 图中  $l_1$ 、 $l_2$  分别表示甲、乙两人在赛跑中的路程  $s$  (米)

与时间  $t$  (秒) 的关系 (图像不完整), 已知  $l_2$  的表达式为  $s = 6t - 30$ , 如果在  $t = 10$  秒时乙追上甲, 那么  $l_1$  的表达式为\_\_\_\_\_. (不要求写定义域)



【答案】  $y = 3x$

【解析】

【分析】 此题考查了待定系数法求函数解析式、一次函数的图象和性质. 根据题意求出交点的坐标, 再利用待定系数法即可求出  $l_1$  的表达式.

【详解】 解: 由题意可得, 当  $t = 10$  时,  $s = 6 \times 10 - 30 = 30$ ,

即  $l_1$ 、 $l_2$  的交点坐标为  $(10, 30)$ ,

设直线  $l_1$  的解析式为  $y = kx$ , 把  $(10, 30)$  代入得到,

$30 = 10k$ , 解得  $k = 3$ ,

$\therefore l_1$  的表达式为  $y = 3x$ ,

故答案为:  $y = 3x$

14. 为了解区内  $AI$  赋能教学实践的情况, 从 3000 名九年级学生中, 随机抽取 100 名学生进行了关于  $AI$  辅助教学工具使用满意度的调查, 调查结果如下:

| 满意度 | 不满意 | 一般   | 比较满意 | 满意 | 非常满意 |
|-----|-----|------|------|----|------|
| 频数  | 5   |      | 15   |    |      |
| 频率  |     | 0.05 |      |    | 0.35 |

根据统计表中的信息, 估计区内九年级学生中, 选择“满意”的人数是\_\_\_\_\_.

【答案】1200 人

【解析】

【分析】本题考查用样本估计总体, 先求得样本中选择“满意”的人数的频率, 然后用样本估计总体即可. 解题的关键是掌握: 频率等于频数除以数据总数, 各组的频率之和等于 1.

【详解】解: 选择“不满意”的人数的频率为:  $\frac{5}{100} = 0.05$ ,

选择“比较满意”的人数的频率为:  $\frac{15}{100} = 0.15$ ,

选择“满意”的人数的频率为:  $1 - 0.05 - 0.05 - 0.15 - 0.35 = 0.4$ ,

$\therefore 3000 \times 0.4 = 1200$  (人),

$\therefore$  选择“满意”的人数是 1200 人.

故答案为: 1200 人.

15. 在菱形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $AB = 1$ , 那么  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| =$ \_\_\_\_\_.

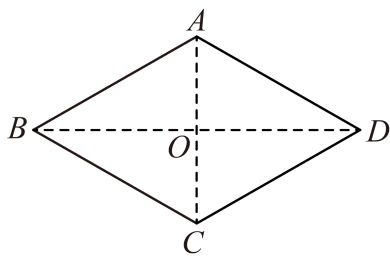
【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质, 向量的有关计算, 连接  $AC$  和  $BO$ , 由菱形的性质得出  $BD = 2BO$ ,  $\angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$ ,  $AC \perp BD$ , 由含  $30^\circ$  度直角三角形的性质得出  $AO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$ , 由勾股定理求

出  $BO$ ，进而求出  $BD$  最后根据  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3}$  即可得出答案.

【详解】解：如下图：连接  $AC$  和  $BO$ ，



$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形，

$$\therefore BD = 2BO, \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ, AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2},$$

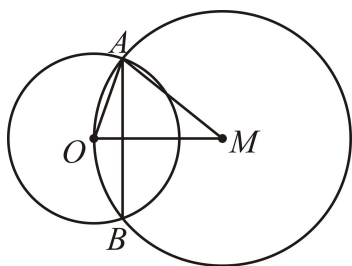
$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BD = 2BO = \sqrt{3},$$

$$\therefore |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3},$$

故答案为：  $\sqrt{3}$

16. 如图，已知  $\odot O$  与  $\odot M$  相交于  $A$ 、 $B$  两点， $\odot O$  的半径长为 2， $\odot M$  的半径长为 3，如果  $\odot O$  的圆心在  $\odot M$  上，那么公共弦  $AB$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

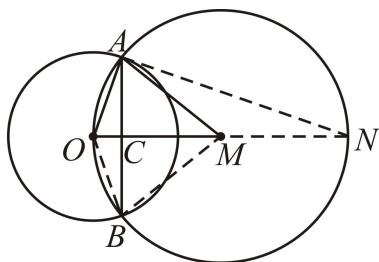
【解析】

【分析】此题考查了垂径定理、勾股定理、圆周角定理等知识，熟练掌握垂径定理和圆周角定理是关键. 延长  $OM$  交  $\odot M$  于点  $N$ ，连接  $AN, BM, OB$ ，则  $ON$  为  $\odot M$  的直径，求出  $AN = 4\sqrt{2}$ ，证明

$AC = BC = \frac{1}{2}AB$ , 在  $\text{Rt}\triangle AON$  中,  $S_{\triangle AON} = \frac{1}{2}AC \cdot ON = \frac{1}{2}AO \cdot AN$ , 得到  $AC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ , 即可得到

$$AB = 2AC = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

【详解】解: 延长  $OM$  交  $\odot M$  于点  $N$ , 连接  $AN, BM, OB$ , 则  $ON$  为  $\odot M$  的直径,



$$\therefore \angle OAN = 90^\circ, \quad ON = 6,$$

$$\therefore AN = \sqrt{ON^2 - OA^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore OA = OB, AM = BM$$

$$\therefore OM \text{ 垂直平分 } AB,$$

$$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AON \text{ 中, } S_{\triangle AON} = \frac{1}{2}AC \cdot ON = \frac{1}{2}AO \cdot AN$$

$$\therefore AC = \frac{AO \cdot AN}{ON} = \frac{2 \times 4\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore AB = 2AC = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{故答案为: } \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

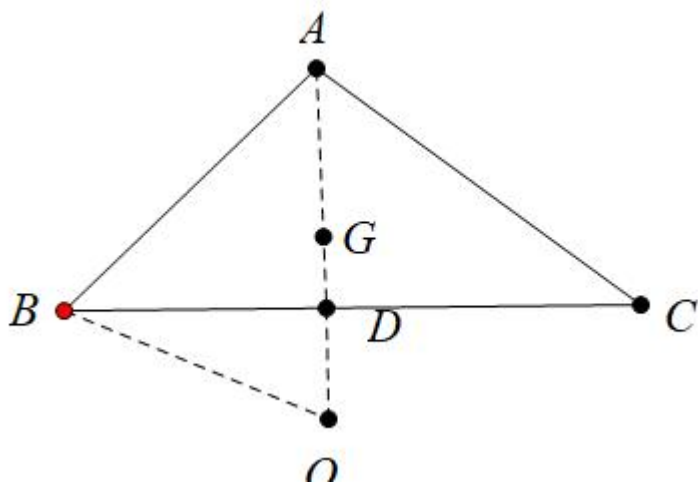
17. 我们把一个三角形的重心与外心之间的距离叫做该三角形的“变形值”. 已知等腰三角形的腰长为 5, 底边长为 8, 那么它的“变形值”等于\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{13}{6}$

【解析】

【分析】此题考查了等腰三角形的性质、勾股定理、重心和外心等知识. 求出  $OA$  和  $AG$ , 即可得到答案.

【详解】解: 如图,  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 5, BC = 8$ , 作  $AD \perp BC$  于点  $D$ ,



$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

设三角形的外心为  $O$ ，外接圆半径为  $R$ ，

$\therefore$  等腰三角形的外心在底边的垂直平分线上，

$\therefore O$  在  $AD$  所在直线上，

设  $OA = OB = R$ ，

在  $\text{Rt}\triangle OBD$  中， $OB^2 = OD^2 + BD^2$ ，即  $R^2 = (R-3)^2 + 4^2$ ，

$$\text{解得 } R = \frac{25}{6},$$

$$\therefore OA = \frac{25}{6},$$

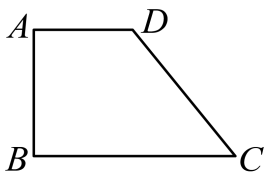
重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点距离是到对边中点的距离两倍，

$\therefore$  重心  $G$  在  $ABC$  在  $AD$  上，且  $AG = \frac{2}{3}AD = 2$ ，

$$\therefore \text{“变形值”} \text{ 等于 } OG = OA - AG = \frac{25}{6} - 2 = \frac{13}{6},$$

故答案为：  $\frac{13}{6}$

18. 如图，在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD = 3$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ．点  $E$  在边  $BC$  上，将  $\triangle ABE$  沿着  $AE$  翻折，点  $B$  的对应点为点  $F$ ．如果  $EF \perp CD$ ，那么  $EC$  的长为\_\_\_\_\_．

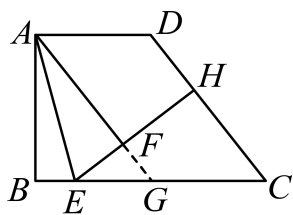


【答案】  $\frac{14}{3}$

【解析】

【分析】此题考查了折叠的性质、平行四边形的判定和性质、勾股定理等知识，熟练掌握折叠的性质和勾股定理是关键。延长  $AF$  交  $BC$  于点  $G$ ，证明四边形  $AGCD$  是平行四边形，得到  $CG = AD = 3$ ，则  $BG = BC - CG = 3$ ，得到  $AG = 5$ ，得到  $GF = 1$ ，设  $EG = x$ ，则  $BE = BG - EG = 3 - x$ ，由折叠可知， $EF = BE = 3 - x$ ，勾股定理求出  $x = \frac{5}{3}$ ，即可得到答案。

【详解】解：如图，延长  $AF$  交  $BC$  于点  $G$ ，



在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$  将  $\triangle ABE$  沿着  $AE$  翻折，点  $B$  的对应点为点  $F$ 。

$$\therefore \angle AFE = \angle ABE = \angle AFH = 90^\circ, \quad AB = AF = 4,$$

$$\therefore EF \perp CD, \quad EH \perp AG,$$

$$\therefore AG \parallel CD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$\therefore$  四边形  $AGCD$  是平行四边形，

$$\therefore CG = AD = 3$$

$$\therefore BG = BC - CG = 3$$

$$\therefore AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\therefore GF = AG - AF = 5 - 4 = 1,$$

设  $EG = x$ ，则  $BE = BG - EG = 3 - x$ ，

由折叠可知， $EF = BE = 3 - x$ ，

在  $\text{Rt}\triangle EFG$  中， $EF^2 + FG^2 = EG^2$ ，

$$\therefore (3 - x)^2 + 1^2 = x^2,$$

解得  $x = \frac{5}{3}$

则  $EG = \frac{5}{3}$ ,

$\therefore EC = EG + CG = \frac{5}{3} + 3 = \frac{14}{3}$ ,

故答案为:  $\frac{14}{3}$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算:  $|\sqrt{2}-2| + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2025^0}$ .

【答案】  $2-4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式的混合运算、零指数幂、绝对值等知识. 根据相关运算法计算即可.

【详解】 解:  $|\sqrt{2}-2| + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2025^0}$

$$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{3}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}} - \sqrt{3}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{3}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$= 2 - 4\sqrt{2}.$$

20. 解不等式组  $\begin{cases} 2x+3 \geq -4-3x \\ \frac{x-1}{3} + \frac{x+1}{2} < 0 \end{cases}$ , 并写出该不等式组的整数解.

【答案】  $-\frac{7}{5} < x < -\frac{1}{5}$ ,  $-1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组及不等式组的整数解, 熟知解集的确定方法“大大取大, 小小取

小，大小小大中间找，大大小小无解了”是解题的关键.

先分别求出每一个不等式的解集，然后确定出不等式组的解集，再确定整数解即可.

【详解】解： 
$$\begin{cases} 2x+3 \geq -4-3x \textcircled{1} \\ \frac{x-1}{3} + \frac{x+1}{2} < 0 \textcircled{2} \end{cases},$$

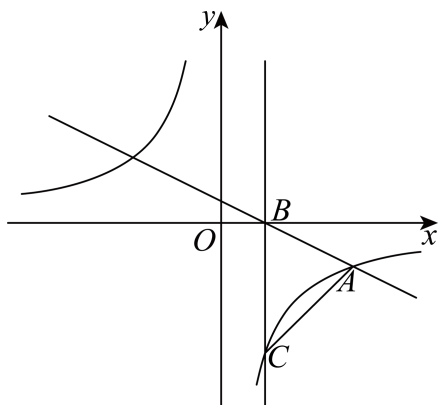
由①得，  $x > -\frac{7}{5}$ ,

由②得，  $x < -\frac{1}{5}$ ,

故此不等式的解集为：  $-\frac{7}{5} < x < -\frac{1}{5}$ ,

其整数解为：  $-1$ .

21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  与双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  是常数，且  $k \neq 0$ ) 交于点  $A(6, m)$ .



(1) 求  $k$  与  $m$  的值:

(2) 直线  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  与  $x$  轴交于点  $B$ ，过点  $B$  作  $y$  轴的平行线，交双曲线  $y = \frac{k}{x}$  于点  $C$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.

【答案】(1)  $k = -12$ ， $m = -2$

(2) 12

【解析】

【分析】此题考查了反比例函数和一次函数的交点问题.

(1) 先利用一次函数求出  $m$  的值，得到点  $A(6, -2)$ ，再代入反比例函数解析式求出  $k$  的值即可:

(2) 求出点  $B$  的坐标，再求出点  $C$  的坐标，即可求出答案.

【小问1详解】

解：把点  $A(6, m)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  得到  $m = -\frac{1}{2} \times 6 + 1 = -2$ ,

$\therefore A(6, -2)$ ,

把  $A(6, -2)$  代入  $y = \frac{k}{x}$  得到  $-2 = \frac{k}{6}$ ,

解得  $k = -12$

【小问 2 详解】

当  $y = 0$  时,  $0 = -\frac{1}{2}x + 1$ , 解得  $x = 2$ ,

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2, 0)$ ,

由 (1) 可得,  $y = -\frac{12}{x}$ ,

当  $x = 2$  时,  $y = -\frac{12}{2} = -6$ ,

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(2, -6)$ ,

$\therefore BC = 6$

$\therefore A(6, -2)$ ,

$\therefore \triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 6 \times (6 - 2) = 12$ .

22. 我们知道“顺次连接四边形各边中点所得的四边形是平行四边形”. 小明是个爱动脑筋的同学, 他提出了如下问题: 如果点  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别在四边形  $ABCD$  的边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $AD$  上, 它们都不是中点且都不与端点重合, 那么能否使四边形  $EFGH$  仍然是平行四边形?

稍作思考后, 他给出了如下的构造方法 (如图1):

①在边  $AB$  上任取符合条件的一点  $E$ , 作  $EF \parallel AC$ , 交边  $BC$  于点  $F$ ;

②作  $FG \parallel BD$ , 交边  $CD$  于点  $G$ ; ③作  $GH \parallel AC$ , 交边  $AD$  于点  $H$ ; ④连接  $HE$ .

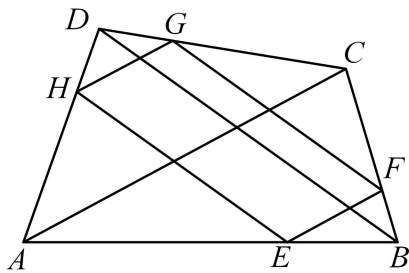


图1

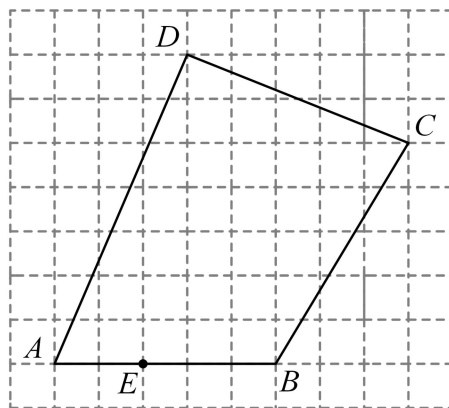


图2

(1) 求证：小明画出的四边形  $EFGH$  是平行四边形；

(2) 如图2，在  $10 \times 9$  的网格中，每个小正方形的边长都为1，四边形  $ABCD$  的顶点均在格点上，点  $E$  在边  $AB$  上， $AE = 2$ ，请你仅用一把无刻度的直尺（只能作经过两点的直线），画一个平行四边形  $EFGH$ ，使点  $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别在边  $BC$ 、 $CD$ 、 $AD$  上，且此平行四边形的边与  $AC$  或  $BD$  平行。（不写画法，画图过程用虚线表示，画图结果用实线表示）

【答案】(1) 证明见解析

(2) 作图见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行线的传递性及平行线分线段成比例定理得  $EF \parallel GH$ ， $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB}$ ， $\frac{AH}{HD} = \frac{CG}{GD}$ ，

$\frac{CG}{GD} = \frac{CF}{FB}$ ，继而得到  $\frac{AH}{HD} = \frac{AE}{EB}$ ， $\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB}$ ，证明  $\triangle EAH \sim \triangle BAD$  得  $\angle AHE = \angle ADB$ ，推出

$EH \parallel BD$ ，则  $EH \parallel FG$ ，即可得证；

(2) 取格点  $M$ 、 $N$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $L$ ， $MN$  交  $BC$  于点  $F$ ， $PQ$  交  $CD$  于点  $G$ ，连接  $LE$  交  $AD$  于点  $H$ ，连接  $EF$ 、 $FG$ 、 $GH$  即可。

【小问1详解】

证明： $\because EF \parallel AC$ ， $GH \parallel AC$ ，

$\therefore EF \parallel GH$ ，

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB}, \quad \frac{AH}{HD} = \frac{CG}{GD},$$

$\therefore FG \parallel BD$ ，

$$\therefore \frac{CG}{GD} = \frac{CF}{FB},$$

$$\therefore \frac{AH}{HD} = \frac{AE}{EB},$$

$$\therefore \frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB},$$

$$\therefore \angle EAH = \angle BAD,$$

$$\therefore \triangle EAH \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \angle AHE = \angle ADB,$$

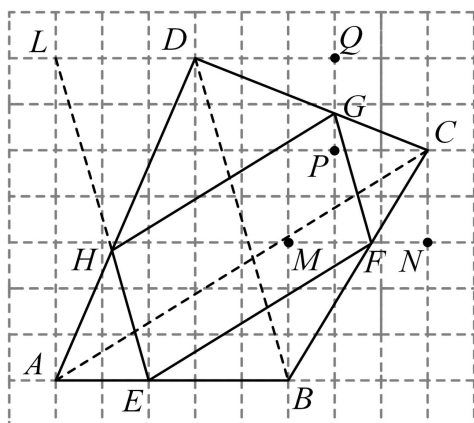
$$\therefore EH \parallel BD,$$

$$\therefore EH \parallel FG,$$

$\therefore$  四边形  $EFGH$  是平行四边形;

【小问2详解】

解: 如图, 取格点  $M$ 、 $N$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $L$ ,  $MN$  交  $BC$  于点  $F$ ,  $PQ$  交  $CD$  于点  $G$ , 连接  $LE$  交  $AD$  于点  $H$ , 连接  $EF$ 、 $FG$ 、 $GH$ 、 $AC$ 、 $BD$ ,



$\therefore$  在  $10 \times 9$  的网格中, 每个小正方形的边长都为1, 四边形  $ABCD$  的顶点均在格点上,  $AE = 2$ ,  $BE = 3$ ,

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}, \quad CN = PC = 2, \quad BM = DQ = LD = 3, \quad CN \parallel BM, \quad PC \parallel DQ, \quad AE \parallel DL,$$

$$\therefore CN \parallel BM, \quad \frac{CN}{BM} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \triangle CNF \sim \triangle BMF,$$

$$\therefore \frac{CF}{BF} = \frac{CN}{BM} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB}, \quad \text{即} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EBF,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBF ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BEF ,$$

$$\therefore AC \parallel EF ,$$

$$\therefore PC \parallel DQ , \quad \frac{PC}{DQ} = \frac{2}{3} ,$$

$$\therefore \triangle CPG \sim \triangle DQG ,$$

$$\therefore \frac{CG}{DG} = \frac{PC}{QD} = \frac{2}{3} ,$$

$$\therefore \frac{CG}{DG} = \frac{CF}{FB} , \quad \text{即} \quad \frac{CG}{CD} = \frac{CF}{CB} ,$$

$$\therefore \angle GCF = \angle DCB ,$$

$$\therefore \triangle GCF \sim \triangle DCB ,$$

$$\therefore \angle CGF = \angle CDB ,$$

$$\therefore GF \parallel DB ,$$

$$\therefore AE \parallel DL , \quad \frac{AE}{DL} = \frac{2}{3} ,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle DLH ,$$

$$\therefore \frac{AH}{DH} = \frac{AE}{DL} = \frac{2}{3} ,$$

$$\therefore \frac{AH}{DH} = \frac{CG}{DG} , \quad \text{即} \quad \frac{DA}{DH} = \frac{DC}{DG} ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle HDG ,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle HDG ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DHG ,$$

$$\therefore AC \parallel HG ,$$

$$\therefore \frac{AH}{DH} = \frac{2}{3} = \frac{AE}{BE} , \quad \angle HAE = \angle DAB ,$$

$$\therefore \frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB} ,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABD ,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle ABD ,$$

$$\therefore EH \parallel BD ,$$

$$\therefore EH \parallel BD , \quad GF \parallel BD , \quad AC \parallel EF , \quad AC \parallel HG ,$$

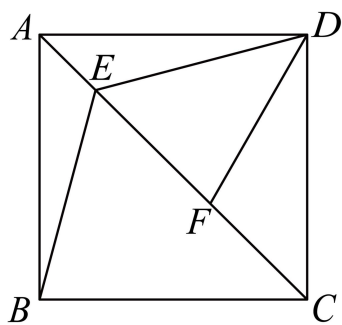
$$\therefore EH \parallel GF \parallel BD , \quad EF \parallel HG \parallel AC ,$$

∴ 四边形  $EFGH$  是平行四边形,

则四边形  $EFGH$  即为所作.

【点睛】 本题考查作图—应用与设计作图, 考查了平行四边形的判定, 平行线分线段成比例定理, 相似三角形的判定和性质, 正方形的性质, 平行线的判定和性质等知识点. 解题的关键是理解题意, 学会利用数形结合的思想解决问题.

23. 如图, 在矩形  $ABCD$  中, 点  $E$  在对角线  $AC$  上,  $AE < EC$ ,  $BE = DE$ .



(1) 求证: 四边形  $ABCD$  是正方形;

(2) 点  $F$  在对角线  $AC$  上, 且  $\angle ADF = \angle BEC$ , 求证:  $BE \cdot DF = EF \cdot AB$ .

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

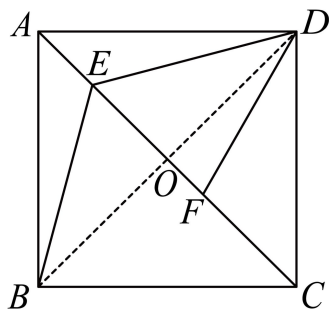
【解析】

【分析】 (1) 如图, 连接  $BD$  交  $AC$  于点  $O$ , 根据矩形的性质得  $BO = DO$ , 根据  $BE = DE$ , 推出  $AC$  垂直平分  $BD$ , 继而得到  $AB = AD$ , 即可得证;

(2) 如图, 连接  $BF$ , 根据正方形的性质得  $AB = AD$ ,  $\angle BAF = \angle DAF$ , 证明  $\triangle BAF \cong \triangle DAF$  (SAS) 得  $\angle AFB = \angle AFD$ , 证明  $\triangle BEF \sim \triangle ADF$  得  $\frac{BE}{AD} = \frac{EF}{DF}$ , 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接  $BD$  交  $AC$  于点  $O$ ,

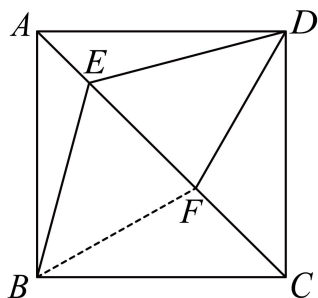


∴ 四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore BO = DO$  ,  
 $\therefore BE = DE$  ,  
 $\therefore AC$  垂直平分  $BD$  ,  
 $\therefore AB = AD$  ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形;

**【小问 2 详解】**

证明: 如图, 连接  $BF$  ,



由 (1) 知: 四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore AB = AD$  ,  $\angle BAF = \angle DAF$  ,

在  $\triangle BAF$  和  $\triangle DAF$  中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAF = \angle DAF , \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAF \cong \triangle DAF$  (SAS),

$\therefore \angle AFB = \angle AFD$  , 即  $\angle EFB = \angle DFA$  ,

$\therefore \angle ADF = \angle BEC$  , 即  $\angle BEF = \angle ADF$  ,

$\therefore \triangle BEF \sim \triangle ADF$  ,

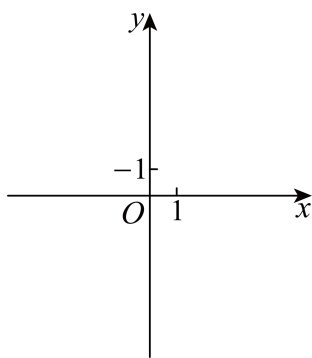
$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{EF}{DF} ,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{EF}{DF} ,$$

$$\therefore BE \cdot DF = EF \cdot AB .$$

**【点睛】** 本题考查正方形的判定和性质, 矩形的性质, 垂直平分线的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质. 掌握正方形的判定及相似三角形的判定和性质是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 顶点为  $A$  的抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$  与  $y$  轴交于点  $B$ .



- (1) 如果抛物线经过点  $(2, -1)$ ，且不过第二象限，求抛物线的表达式；
- (2) 如果抛物线与坐标轴共有两个公共点，且在  $y$  轴右侧是下降的，求  $m$  的值；
- (3) 点  $A$  在第一象限，点  $B$  关于抛物线对称轴的对称点为点  $C$ ，将抛物线沿着射线  $CA$  方向平移，点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对应点分别为点  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ ，线段  $B'C'$  与线段  $AB$  交于点  $D$ ，如果  $\tan \angle A'DB' = 4$ ， $\frac{S_{\triangle ADC'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$ ，求点  $A$  的坐标。

【答案】(1)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 11$

(2)  $-1$  或  $1 - \sqrt{3}$

(3)  $\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 运用待定系数法即可求解；

(2) 分两种情况讨论，一种是经过原点与  $x$  轴另一交点，一种是抛物线与  $x$  轴只有 1 个交点，与  $y$  轴一个交点，根据根的判别式以及在  $y$  轴右侧是下降的进行求解即可；

(3) 记原抛物线对称轴与  $BC$  的交点为  $N$ ，平移后抛物线对称轴与  $B'C'$  的交点为  $M$ ，先求出顶点

$A(m, m+1)$ ， $B\left(0, -\frac{1}{2}m^2 + m + 1\right)$ ， $C\left(2m, -\frac{1}{2}m^2 + m + 1\right)$ ，由平移的性质可得  $\triangle ADC' \sim \triangle ABC$ ，

那么  $\frac{C'D}{BC} = \frac{1}{3}$ ，则  $C'D = \frac{2}{3}m$ ， $MD = MC' - DC' = \frac{1}{3}m$ ，再由  $\tan \angle A'DB' = \frac{A'M}{DM} = 4$  列式计算即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线经过点  $(2, -1)$ ，

∴ 将  $(2, -1)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$

$$\text{得: } -\frac{1}{2} \times 4 + 2m - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 = -1,$$

$$\text{整理得: } m^2 - 6m = 0,$$

$$\text{解得: } m = 0 \text{ 或 } m = 6,$$

$\therefore$  抛物线不经过第二象限,

$$\therefore m = 6,$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为: } y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 11;$$

【小问 2 详解】

解:  $\because -\frac{1}{2} < 0$ , 且抛物线在  $y$  轴右侧是下降的,

$$\therefore \text{对称轴 } x = m \leq 0,$$

$$\text{令 } y = f(x) = 0, \text{ 则 } -\frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 = 0$$

①当抛物线经过原点时,

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \Delta > 0 \\ m \leq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}m^2 + m + 1 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 1 - \sqrt{3} \text{ 或 } m = 1 + \sqrt{3} \text{ (舍);}$$

②当抛物线与  $x$  轴只有 1 个交点, 与  $y$  轴一个交点, 则  $\begin{cases} \Delta = 0 \\ m \leq 0 \end{cases}$ ,

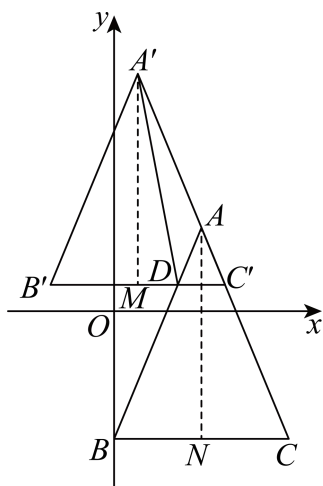
$$\therefore m^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}m^2 + m + 1\right) = 0,$$

$$\text{解得: } m = -1,$$

综上所述:  $m$  的值为  $-1$  或  $1 - \sqrt{3}$ ;

【小问 3 详解】

解: 记原抛物线对称轴与  $BC$  的交点为  $N$ , 平移后抛物线对称轴与  $B'C'$  的交点为  $M$ ,



$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 = -\frac{1}{2}(x-m)^2 + m + 1,$$

$$\therefore \text{顶点 } A(m, m+1),$$

$$\text{当 } x=0, \quad y = -\frac{1}{2}m^2 + m + 1,$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{1}{2}m^2 + m + 1\right)$$

$\therefore$  点  $B$  关于抛物线对称轴的对称点为点  $C$ ,

$$\therefore C\left(2m, -\frac{1}{2}m^2 + m + 1\right),$$

$\therefore$  将抛物线沿着射线  $CA$  方向平移, 点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对应点分别为点  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ ,

$$\therefore BC = B'C', BC \parallel B'C',$$

$$\therefore \triangle ADC' \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \left(\frac{C'D}{BC}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \frac{C'D}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BC = B'C' = 2m,$$

$$\therefore C'D = \frac{2}{3}m,$$

$$\therefore MC' = \frac{1}{2}B'C' = m,$$

$$\therefore MD = MC' - DC' = \frac{1}{3}m,$$

$$\therefore \tan \angle A'DB' = \frac{A'M}{DM} = 4,$$

$$\therefore \frac{m+1 - \left(-\frac{1}{2}m^2 + m + 1\right)}{\frac{1}{3}m} = 4,$$

解得:  $m = \frac{8}{3}$  或  $m = 0$  (舍),

$$\therefore A\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

【点睛】 本题考查了二次函数的图象与性质，抛物线与坐标轴的交点问题，解直角三角形，平移的性质，相似三角形的判定与性质，综合性强，难度较大，解题的关键是熟练掌握二次函数的图象与性质以及综合运用各知识点进行求解.

25. 已知在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BD$  是边  $AC$  上的中线. 以点  $B$  为圆心,  $BD$  为半径的圆交线段  $CD$  于点  $E$  (点  $E$  不与点  $C$ 、点  $D$  重合).

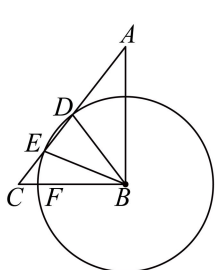


图1

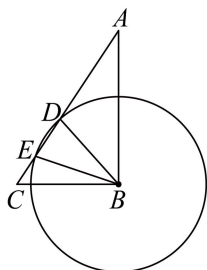


图2

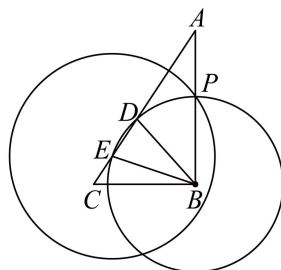


图3

- (1) 如图 1, 如果  $\odot B$  与边  $BC$  交于点  $F$ ,  $\widehat{FE} = \widehat{DE}$ , 求  $\angle DBE$  的度数;
- (2) 如图 2, 当  $AE = 5EC$  时, 求  $\angle C$  的正切值;
- (3) 如图 3, 以点  $E$  为圆心,  $BC$  为半径的  $\odot E$  与  $\odot B$  相交, 其中一个交点  $P$  在边  $AB$  上. 如果  $BD = 1$ , 求  $AE$  的长.

【答案】 (1)  $\frac{180^\circ}{7}$

(2)  $\sqrt{2}$

(3)  $AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由弧等得到  $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$ , 由直角三角形斜边上中线的性质得到  $DB = DC = DA$ , 然后根据等边对等角以及三角形的外角性质得到  $\angle 3 = \angle 4 = 3\alpha$ , 最后在  $\triangle BDE$  中, 由三角形内角和定理建立方程求解;

(2) 过点  $B$  作  $BK \perp AC$  于点  $K$ ，由垂径定理得到  $DK = EK$ ，设  $EC = m$ ，则  $AE = 5m$ ，那么  $DB = DC = DA = 3m$ ，则  $DE = AC - CE - AD = 2m$ ，故  $DK = EK = m$ ，由勾股定理得  $BK = 2\sqrt{2}m$ ，再由正切的定义即可求解；

(3) 连接  $PE$ ，先证明  $\triangle DBC \cong \triangle DPE$  (SSS)，再证明  $\triangle DEB \sim \triangle BEA$ ，则  $\frac{BE}{AE} = \frac{ED}{BE}$ ，设  $AE = x$ ，则  $DE = AE - AD = x - 1$ ，代入解一元二次方程即可。

【小问 1 详解】

解：如图：

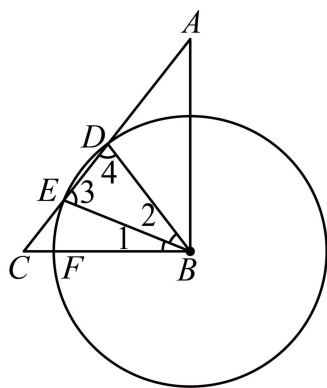


图1

$$\because \widehat{FE} = \widehat{DE},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\text{设 } \angle 1 = \angle 2 = a,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \text{ } BD \text{ 是边 } AC \text{ 上的中线,}$$

$$\therefore DB = DC = DA,$$

$$\therefore \angle C = \angle DBC = 2a,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle C + \angle 1 = 3a,$$

$$\because BD = BE,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 3a,$$

$$\because \text{在 } BDE \text{ 中, } \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ,$$

$$\therefore 3a + 3a + a = 180^\circ,$$

$$\text{解得: } a = \frac{180^\circ}{7}, \text{ 即 } \angle DBE = \frac{180^\circ}{7};$$

【小问 2 详解】

解：过点  $B$  作  $BK \perp AC$  于点  $K$ ，

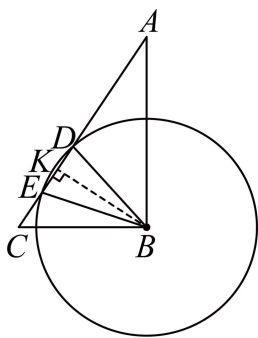


图2

$\because BK$  过圆心,

$\therefore DK = EK$ ,

$\therefore AE = 5EC$ ,

设  $EC = m$ , 则  $AE = 5m$ ,

$\therefore AC = 6m$ ,

$\therefore DB = DC = DA = 3m$ ,

$\therefore DE = AC - CE - AD = 2m$ ,

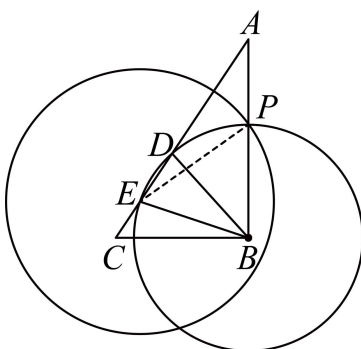
$\therefore DK = EK = m$ ,

$\therefore BK = \sqrt{BD^2 - DK^2} = 2\sqrt{2}m$ ,

$\therefore \tan C = \frac{BK}{CK} = \frac{2\sqrt{2}m}{2m} = \sqrt{2}$ ;

【小问 3 详解】

解: 连接  $PE$ ,



由上知  $DB = DC = DA$ ,

$\therefore BE = BD = BP = 1$ ,

$\therefore BE = BD = BP = CD = AD = 1$ ,

由题意得:  $BC = EP$ ,

$$\therefore \triangle DBC \cong \triangle DPE \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle CDB = \angle EBP,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle BEA,$$

$$\therefore \triangle DEB \sim \triangle BEA,$$

$$\therefore \frac{BE}{AE} = \frac{ED}{BE},$$

$$\text{设 } AE = x, \text{ 则 } DE = AE - AD = x - 1,$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1},$$

$$\text{整理得: } x^2 - x - 1 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了圆的综合问题，涉及圆心角和弧之间的关系，圆与圆的位置关系，垂径定理，锐角三角函数，相似三角形的判定与性质，三角形的内角和定理，等腰三角形的性质等知识点，熟练掌握并运用圆的相关性质是解题的关键.