

2024 学年度初三年级第二次学生学习能力诊断练习数学练习卷

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{0.5}$ D. $\sqrt[3]{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式, 立方根, 最简二次根式的概念: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式; 我们把满足上述两个条件的二次根式, 叫做最简二次根式, 据此进行判断即可.

【详解】 解: A. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, 则 A 不符合题意,

B. $\sqrt{6}$ 是最简二次根式, 则 B 符合题意,

C. $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 C 不符合题意,

D. $\sqrt[3]{3}$ 不是二次根式, 则 D 不符合题意,

故选: B.

2. 若单项式 $2x^n yz^2$ 的次数是 8, 则 n 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查单项式次数的定义. 熟练掌握单项式中所有字母的指数和, 叫做单项式的次数, 是解决问题的关键. 利用单项式次数的定义计算即可.

【详解】解：∵ $2x^n yz^2$ 的次数是， $n+1+2=n+3$ ，

$$\therefore n+3=8,$$

$$\therefore n=5,$$

故选：D.

3. 下列函数中， y 的值随 x 的增大而减小的是（ ）

A. $y = -2x + 1$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = x^2$

D. $y = -\frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数、二次函数、反比例函数的性质，熟练掌握一次函数、二次函数和反比例函数的图象与性质是解题的关键. 根据一次函数、二次函数和反比例函数的性质即可解答.

【详解】解： A. $y = -2x + 1$ ， y 的值随 x 的值增大而减小，符合题意；

B. $y = 2x + 1$ ， y 的值随 x 的值增大而增大，不符合题意；

C. $y = x^2$ ，当 $x > 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大，当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小，不符合题意；

D 选项， $y = -\frac{2}{x}$ ，在每一象限内， y 的值随 x 的值增大而增大，不符合题意；

故选：A.

4. 小明对学校戏剧社 20 名成员进行年龄调查，结果如表所示，其中有部分数据被墨迹遮挡，那么关于这 20 名成员年龄的统计量中，能够分析得出的是（ ）

年龄（岁）	11	12	13	14
人数（名）	6	5		

A. 平均数

B. 众数

C. 中位数

D. 方差.

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查统计量的选择，解题的关键是掌握平均数、众数、中位数及方差的定义. 根据平均数、众数、中位数及方差的定义求解即可.

【详解】解：由题意知，13、14 岁的人数和为 $20 - 6 - 5 = 9$ （人），

则这组数据的中位数为 $\frac{12+12}{2}=12$ (岁),

故选: C.

5. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 下列条件中, 不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是 ()

- A. $AC = BD$ B. $OA = OB$ C. $\angle DAC = \angle BAC$ D. $\angle ABC = \angle BAD$.

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的判定, 根据矩形的判定定理: 有一个角是直角的平行四边形是矩形, 对角线相等的平行四边形是矩形分别进行分析即可.

【详解】解: A、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AC = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 故此选项不符合题意;

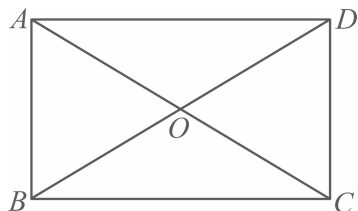
B、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA = OC, OB = OD$,

$\therefore OA = OB$,

$\therefore AC = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 故此选项不符合题意;



C、不能证明四边形 $ABCD$ 为矩形, 故此选项符合题意;

D、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle BAD$,

$\therefore \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$,

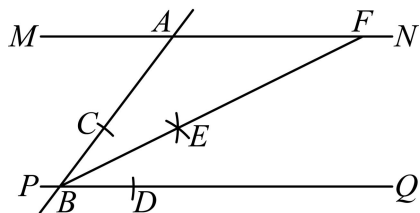
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 故此选项不符合题意.

故选: C.

6. 如图 1, 直线 $MN \parallel PQ$, 直线 AB 分别与 MN 、 PQ 相交于点 A 、 B , MN 与 PQ 之间的距离为 8,

$\sin \angle MAB = \frac{4}{5}$. 小明同学利用尺规按以下步骤作图: ①以点 B 为圆心, 以任意长为半径作弧交 AB 于点 C ,

交 BQ 于点 D ；②分别以 C 、 D 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle ABQ$ 内交于点 E ；③作射线 BE 交 MN 于点 F ．那么 AF 的长是（ ）



A. 6

B. 6.4

C. 8

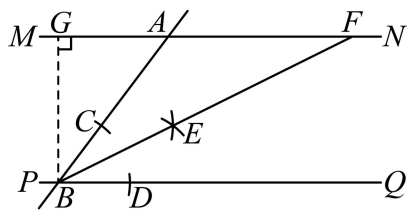
D. 10

【答案】D

【解析】

【分析】如图所示，过点 B 作 $BG \perp MN$ 交 MN 于点 G ，解直角三角形求出 $AB = 10$ ，然后利用角平分线和平行线得到 $\angle ABF = \angle AFB$ ，即可得到 $AF = AB = 10$ ．

【详解】如图所示，过点 B 作 $BG \perp MN$ 交 MN 于点 G



$\because MN$ 与 PQ 之间的距离为 8，

$\therefore BG = 8$

$$\therefore \sin \angle MAB = \frac{BG}{AB} = \frac{8}{AB} = \frac{4}{5}$$

$\therefore AB = 10$

由作图得， BF 平分 $\angle ABQ$

$$\therefore \angle ABF = \angle QBF$$

$$\because MN \parallel PQ$$

$$\therefore \angle AFB = \angle QBF$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB$$

$$\therefore AF = AB = 10.$$

故选：D.

【点睛】本题考查了平行线的性质，角平分线的基本作图，解直角三角形，等角对等边，解题的关键是掌

握以上知识点.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 计算: $(-2a)^2 =$ _____.

【答案】 $4a^2$

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方, 根据积的乘方运算进行计算, 即可求解.

【详解】 解: $(-2a)^2 = 4a^2$

故答案为: $4a^2$.

8. 计算: $\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查同分母的分式的加减法运算, 分母不变, 分子相减, 再进行约分即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$;

故答案为: 2.

9. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 k 的值是_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 根据一元二次方程有两个相等的实数根, 得到 $\Delta = 0$, 列出方程求解即可. 掌握根的判别式与根的个数之间的关系, 是解题的关键.

【详解】 解: 由题意, 得: $\Delta = (-3)^2 - 4k = 0$,

解得: $k = \frac{9}{4}$;

故答案为: $\frac{9}{4}$.

10. 不等式组 $\begin{cases} x-3 < 0 \\ 2(x+2) \geq x \end{cases}$ 的解集是_____:

【答案】 $-4 \leq x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查的是解一元一次不等式组，先求出每个不等式的解集，再根据口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无解了，确定不等式组的解集.

【详解】 解：
$$\begin{cases} x-3 < 0 \textcircled{1} \\ 2(x+2) \geq x \textcircled{2} \end{cases}$$

解不等式①得： $x < 3$

解不等式②得： $x \geq -4$

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-4 \leq x < 3$

故答案为： $-4 \leq x < 3$.

11. 已知反比例函数的图像经过点 $A(2, m)$ 和点 $B(n, -1)$ ，如果点 A 与 B 关于原点对称，那么该反比例函数的解析式是_____.

【答案】 $y = \frac{2}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，熟练掌握该知识点是解答本题的关键. 根据反比例函数图象上点的坐标特征解答本题即可.

【详解】 解： $\because$ 反比例函数的图象经过点 $A(2, m)$ 和点 $B(n, -1)$ ，且点 A 与 B 关于原点对称，

$\therefore n = -2, m = 1,$

$\therefore A(2, 1), B(-2, -1),$

设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，代入点 A 坐标可得 $k = 2$ ，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{2}{x}$.

故答案为： $y = \frac{2}{x}$.

12. 如果将抛物线 $y = (x-4)^2$ 先向下平移 3 个单位，再向左平移 5 个单位，那么所得新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = (x+1)^2 - 3$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数图象的平移，根据平移规则：左加右减，上加下减，进行解即可. 熟练掌握平移规则，是解题的关键.

【详解】解：由题意，平移后所得新抛物线的表达式是： $y = (x - 4 + 5)^2 - 3 = (x + 1)^2 - 3$ ；

故答案为： $y = (x + 1)^2 - 3$ 。

13. 某学校的一个小品节目入选区艺术节汇演. 参与该小品表演的全体成员中，六年级学生有 4 名，七年级学生有 6 名，八年级学生有 5 名，九年级学生有 3 名. 如果随机选取参加该小品表演的 1 位成员接受采访，那么选到九年级学生的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

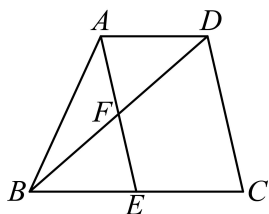
【分析】 本题主要考查了简单的概率计算，直接用九年级学生人数除以学生总数即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 一共有 $4 + 6 + 5 + 3 = 18$ 名学生，其中九年级有 3 名学生，且每个学生被选到的概率相同，

$\therefore$ 随机选取参加该小品表演的 1 位成员接受采访，选到九年级学生的概率 $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ ，

故答案为： $\frac{1}{6}$ 。

14. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，点 E 是边 BC 的中点，连接 AE 、 BD 交于点 F ，设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ，那么用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BF}$ 是_____.



【答案】 $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量、梯形、平行四边形的判定与性质，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题. 依题意得出 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ，四边形 $AECD$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ，进而得出 $EF = \frac{1}{2}CD$ ，进而根据 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 点 E 是边 BC 的中点，

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because BC = 2AD,$$

$$\therefore BE = CE = AD,$$

$\because AD \parallel BC,$

$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} = \vec{a},$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} = \vec{b}, AE \parallel CD$

$\because$ 点 E 是边 BC 的中点,

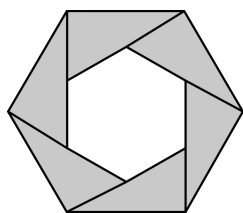
$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD$$

$$\therefore \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

故答案为: $a - \frac{1}{2}b$.

15. 如图, 由六块相同的含 30° 的直角三角形拼成一个大的正六边形, 内部留下一个小的正六边形空隙. 如果直角三角形最短边的长为 2, 那么小正六边形的边心距是_____.

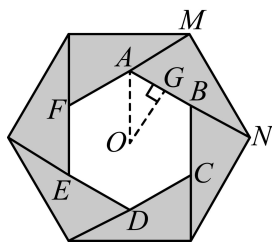


【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查正多边形和圆, 掌握直角三角形的边角关系以及正六边形的性质是正确解答的关键. 根据直角三角形的边角关系以及正六边形的性质进行计算即可.

【详解】 解: 如图,



由题意得, 在 $Rt\triangle AMN$ 中, $AM = 2$, $\angle ANM = 30^\circ$,

$\therefore AN = 2AM = 4$, 又 $\because BN = AM = 2$,

$\therefore AB = 4 - 2 = 2$,

即正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2,

设正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O , 连接 OA , 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ,

则 $AG = BG = \frac{1}{2}AB = 1$, $\angle AOG = \frac{360^\circ}{6} \times \frac{1}{2} = 30^\circ$

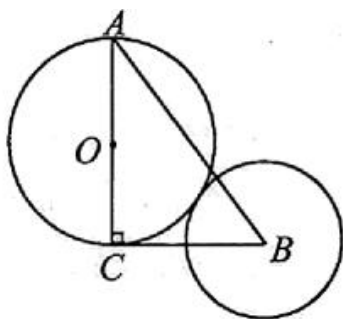
在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中, $AG = 1$, $\angle AOG = 30^\circ$,

$$\therefore OG = \frac{AG}{\tan \angle AOG} = \frac{AG}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} AG = \sqrt{3},$$

即正六边形 $ABCDEF$ 的边心距为 $\sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{3}$.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $AB = 5$, 如果以点 B 为圆心的 $\odot B$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切, 那么 $\odot B$ 的半径长是_____.

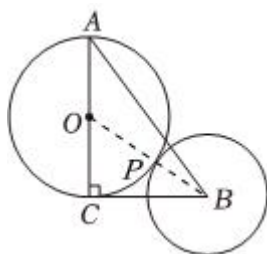


【答案】 $\sqrt{13} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了圆与圆的位置关系和勾股定理, 明确两圆相切时, 两圆的圆心连线过切点是解题的关键. 连接 OB , 由 $\odot B$ 与 $\odot O$ 外切, 则 OB 经过切点 P , 利用勾股定理求得 BC , 然后利用勾股定理求得 OB , 进一步即可求得结果.

【详解】 解: 如图, 连接 OB ,



$\because \odot B$ 与 $\odot O$ 外切,

$\therefore OB$ 经过切点 P ,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $AB = 5$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3,$$

$\because AC$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore OC = \frac{1}{2} AC = 2,$$

$$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

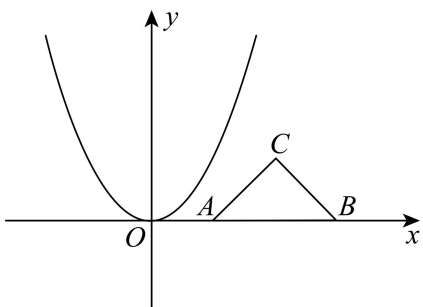
$$\because OB = OP + BP = OC + BP,$$

$$\therefore BP = OB - OC = \sqrt{13} - 2,$$

$$\therefore \odot B \text{ 的半径长是 } \sqrt{13} - 2;$$

故答案为: $\sqrt{13} - 2$.

17. 如图, 已知点 $A(2,0)$ 、 $B(6,0)$ 和 $C(4,2)$, 平移 $\triangle ABC$ 得到 $\triangle A'B'C'$, 顶点 A 、 B 、 C 分别与顶点 A' 、 B' 、 C' 对应. 如果点 A' 、 B' 都在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上, 那么点 C 到点 C' 的距离是_____.



【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了图形平移与抛物线, 掌握平移的性质以及得出 A' 、 B' 纵坐标相同是解题的关键; 已知 $A(2,0)$ 、 $B(6,0)$ 和 $C(4,2)$, 则 $A(2, 0)$ 平移后 A' 的坐标为 $(2+m, 0+n)$, B' 的坐标为 $(6+m, 0+n)$, A' 、 B' 都在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上, 且 A' 、 B' 纵坐标相同, 可求得 m , 进而求的 n , $CC' = \sqrt{m^2 + n^2}$, 即可求得点 C 到点 C' 的距离.

【详解】 解: 设 $\triangle ABC$ 沿 x 轴方向平移了 m 个单位, 沿 y 轴方向平移了 n 个单位, 则 $A(2,0)$ 平移后 A' 的坐标为 $(2+m, 0+n)$, B' 的坐标为 $(6+m, 0+n)$,

$\because A'$ 、 B' 都在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上, 且 A' 、 B' 纵坐标相同,

$$\therefore \frac{1}{2}(2+m)^2 = \frac{1}{2}(6+m)^2,$$

∴ 解得 $m = -4$,

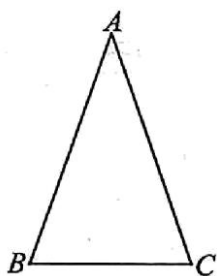
将 $m = -4$ 代入 $y = \frac{1}{2}(2+m)^2$

∴ $n = 2$,

$$CC' = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

18. 我们把只有一组邻边相等, 且对角互补的四边形叫做“邻补四边形”. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $\cos B = \frac{1}{3}$, 点 M 、 N 分别在边 AC 、 BC 上. 如果四边形 $ABNM$ 是“邻补四边形”, 那么四边形 $ABNM$ 的面积是_____.



【答案】 $\frac{32}{25}\sqrt{2}$ 或 $\frac{16}{9}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形, “邻补四边形”的定义. 分四种情况讨论, 作 $NG \perp MC$ 于点 G , 利用四边形 $ABNM$ 的面积 $= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MNC}$, 列式计算即可求解.

【详解】 解: 作 $AD \perp BC$ 于点 D ,

∵ $AB = AC$, $AD \perp BC$,

∴ $BD = CD$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{3}$,

∴ $AB = 3$,

∴ $BD = CD = 1$,

∴ $BC = 2$, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 2\sqrt{2}$,

∴ 四边形 $ABNM$ 是“邻补四边形”,

分情况讨论,

①当 $AB = BN$ 时,

∴ $AB = 3$, $BC = 2$,

∴这种情况不符合题意，舍去；

②当 $AB = BN$ 时，由题意得 $\angle B + \angle AMN = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle CMN = 180^\circ - \angle AMN = \angle B,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle CMN = \angle C,$$

∴点 M 和点 C 重合，

∴这种情况不符合题意，舍去；

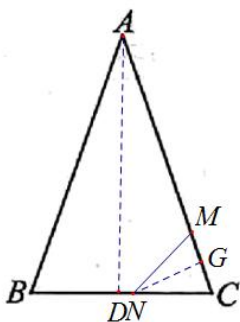
③当 $MN = BN$ 时，同②得 $\angle CMN = \angle B = \angle C$ ，

$$\therefore MN = CN,$$

$$\therefore MN = CN = BN,$$

$$\therefore MN = CN = BN = \frac{1}{2}BC = 1,$$

作 $NG \perp MC$ 于点 G ，



$$\therefore MG = CG,$$

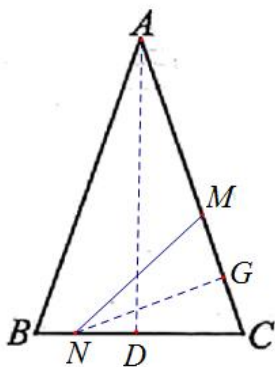
$$\therefore \cos B = \cos C = \frac{CG}{CN} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CG = \frac{1}{3}, \quad CM = 2CG = \frac{2}{3},$$

$$\therefore NG = \sqrt{CN^2 - CG^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABNM \text{ 的面积是 } = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{9}\sqrt{2};$$

④当 $MN = AM$ 时，



同理 $\angle CMN = \angle B = \angle C$,

$$\therefore MN = CN,$$

设 $CG = x$, 则 $CM = 2CG = 2x$, $MN = AM = CN = 3 - CM = 3 - 2x$,

$$\because \cos B = \cos C = \frac{CG}{CN} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CN = 3CG, \text{ 即 } 3 - 2x = 3x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{5},$$

$$\text{则 } CG = \frac{3}{5}, \quad CM = \frac{6}{5}, \quad NG = \sqrt{CN^2 - CG^2} = \frac{6}{5}\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABNM \text{ 的面积是 } = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}\sqrt{2} = \frac{32}{25}\sqrt{2};$$

$$\text{故答案为: } \frac{32}{25}\sqrt{2} \text{ 或 } \frac{16}{9}\sqrt{2}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } (\pi - 3.14)^0 + (3 - 2\sqrt{2})^{-1} - \sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\text{【答案】 } 14 + 2\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 分母有理化, 涉及零指数幂、负整数指数幂、立方根、幂的乘方, 掌握相关运算法则是解题关键. 先计算零指数幂、负整数指数幂、负整数指数幂、立方根、幂的乘方, 再分母有理化, 最后计算加减法即可.

$$\text{【详解】 解: } (\pi - 3.14)^0 + (3 - 2\sqrt{2})^{-1} - \sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - (-2) + \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= 1 + \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} - (-2) + \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \\
&= 1 + 3 + 2\sqrt{2} + 2 + 8 \\
&= 14 + 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

20. 解方程组: $\begin{cases} 3x - y = 4 & \text{①} \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases}$

【解析】

【分析】本题考查了解二元二次方程组，由②得 $(3x + y)^2 = 4$ ，则原方程组为 $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$ ，

分别解二元一次方程组，即可求解.

【详解】解: $\begin{cases} 3x - y = 4 & \text{①} \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$

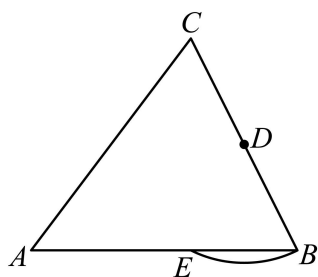
由②得 $(3x + y)^2 = 4$

$\therefore 3x + y = \pm 2$

$\therefore$ 原方程组为 $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

解得: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases}$

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5\sqrt{5}$ ， $\tan C = 2$ ，点 D 为边 BC 的中点，以 D 为圆心，以 DB 为半径作弧交边 AB 于点 E ，求 BC 和 BE 的长.

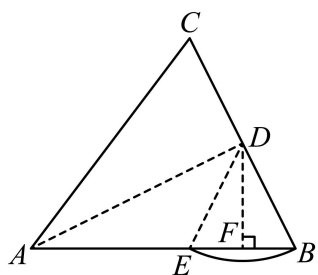


【答案】 $BC = 10$ ， $BE = 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形和等腰三角形的性质，勾股定理，解题的关键是熟练掌握解直角三角形的方法和等腰三角形的性质. 连接 AD ， DE ，作 $DF \perp BE$ 于点 F ，根据等腰三角形的性质得 $AD \perp BC$ ， $BD = CD = \frac{1}{2}BC$ ， $\angle B = \angle C$ ，解直角三角形和勾股定理即可求出 $BC = 10$ ，根据尺规作图和等腰三角形的性质得 $DE = DB$ ， $BE = 2BF$ ，再根据解直角三角形和勾股定理即可求出答案.

【详解】 解：如图，连接 AD ， DE ，作 $DF \perp BE$ 于点 F ，



$\because AB = AC = 5\sqrt{5}$ ，点 D 为边 BC 的中点，

$\therefore AD \perp BC$ ， $BD = CD = \frac{1}{2}BC$ ， $\angle B = \angle C$ ，

$\therefore \tan C = \frac{AD}{CD} = 2$ ，

设 $CD = x$ ，则 $AD = 2x$

$\because AD^2 + CD^2 = AC^2$ ，

$\therefore 4x^2 + x^2 = 125$ ，

解得 $x = 5$ (负值舍去)，

$\therefore BD = CD = 5$ ，

$\therefore BC = 10$ ，

$\because$ 以 D 为圆心，以 DB 为半径作弧交边 AB 于点 E ，

$\therefore DE = DB$ ，

$$\begin{aligned} \because DF \perp BE, \\ \therefore BE = 2BF, \\ \because \tan B = \tan C = 2, \\ \therefore \frac{DF}{BF} = 2, \end{aligned}$$

设 $BF = y$ ，则 $DF = 2y$

$$\begin{aligned} \because BF^2 + DF^2 = BD^2, \\ \therefore y^2 + 4y^2 = 25, \end{aligned}$$

解得 $y = \sqrt{5}$ (负值舍去),

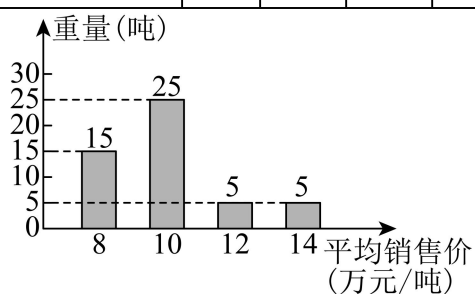
$$\therefore BF = \sqrt{5},$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{5}.$$

22. 其工厂采购蓝莓并加工成蓝莓蜜饯进行销售，该工厂一年最多能生产 200 吨，已知蓝莓的采购成本价 y (万元/吨) 与蓝莓的采购量 x (吨) 成一次函数关系，其中的几组数据如表 2 所示. 每吨原材料 (蓝莓) 的加工费为 1 万元，减重率为 50%，蓝莓蜜饯销售价格会随季节、市场供需等波动，从一年中随机抽取若干单交易作为样本进行统计，并绘制了条形统计图 (如图).

表 2

x (吨)	50	100	150	200
y (万元/吨)	1.9	1.8	1.7	1.6



- (1) 求 y 与 x 的函数解析式 (不写定义域);
- (2) 求样本中蓝莓蜜饯的平均销售价;
- (3) 根据样本中蓝莓蜜饯的平均销售价，该工厂一年能否恰好获得 780 万元的利润: 如果能，求需要采购蓝莓的重量; 如果不能，请说明理由.

(备注: 蓝莓从新鲜状态制成蓝莓蜜饯后重量减轻，衡量这一变化的指标通常叫做“减重率”，其计算公

式: 减重率 = $\frac{\text{原始重量} - \text{最终重量}}{\text{原始重量}} \times 100\%$

【答案】(1) $y = -0.002x + 2$

(2) 10万元/吨

(3) 需要采购蓝莓的重量为300吨

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用，一元二次方程的应用，求平均数，理解题意是解题的关键；

(1) 设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，待定系数法求解析式，即可求解；

(2) 根据条形统计图，根据加权平均数求得平均数，即可求解.

(3) 根据题意列出一元二次方程，解方程，即可求解.

【小问1详解】

解: 设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$

代入 $(100, 1.8), (200, 1.6)$,

$$\therefore \begin{cases} 1.8 = 100k + b \\ 1.6 = 200k + b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -0.002 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore y = -0.002x + 2$$

【小问2详解】

解: 依题意，平均销售价为 $\frac{15 \times 8 + 25 \times 10 + 5 \times 12 + 5 \times 14}{15 + 25 + 5 + 5} = 10$ (万元/吨)

【小问3详解】

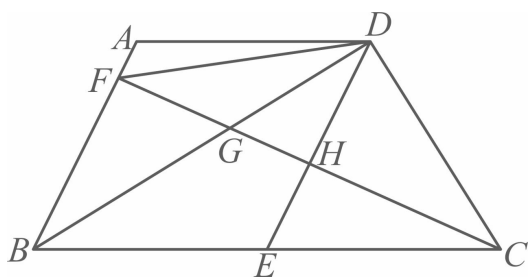
解: 依题意， $10 \times \frac{x}{2} - (-0.002x + 2)x - 1 \times x = 780$

原方程组整理得， $x^2 + 1000x - 390000 = 0$

解得: $x_1 = 300, x_2 = -1300$ (舍去)

答: 需要采购蓝莓的重量为300吨

23. 如图9，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，连接 BD ， $\angle BDC = 90^\circ$ ，点 E 在 BC 上，连接 DE ，使得 $\angle EDC = \angle ECD$ ，点 F 在边 AB 上，连接 CF ，分别交 BD 、 ED 于点 G 、 H ，且 $FH = CH$ ，连接 DF 。



(1) 求证：四边形 $ABED$ 为菱形；

(2) 如果 $\angle BDE = \angle DFC$ ，求证： $4EH \cdot BE = BG \cdot BD$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

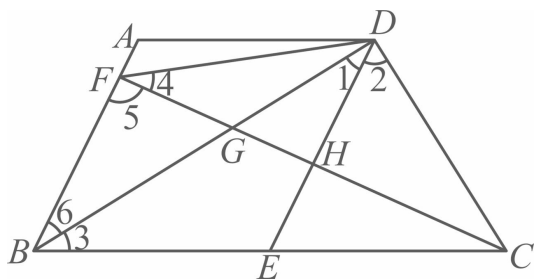
【分析】 本题考查了菱形的判定，相似三角形的性质与判定，三角形中位线的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键；

(1) 根据题意得出 $\angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle ECD$ 进而得出 $BE = CE$ ， 根据中位线的性质可得出 $EH \parallel BF$ ， 结合已知可得四边形 $ABED$ 是平行四边形， 根据 $BE = DE$ ， 即可得证；

(2) 证明 $\triangle FGD \sim \triangle BGC$ ， 得出 $\frac{FG}{BG} = \frac{DB}{GC}$ 进而证明 $\triangle FGB \sim \triangle DGC$ 得出 $\angle 5 = \angle BDC$ ， 证明 $\angle 6 = \angle 3$ ， 即可证明 $\triangle BFG \sim \triangle BDC$ 得出 $BF \cdot BC = BG \cdot BD$ ， 进而根据 $FH = 2EH$ ， $BC = 2BE$ ， 即可得证.

【小问 1 详解】

证明： 如图，



$\because \angle BDC = 90^\circ$ ， 即 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\therefore \angle 3 + \angle ECD = 90^\circ$

$\because \angle EDC = \angle ECD$ ， 即 $\angle 2 = \angle ECD$

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

$\therefore BE = DE$

又 $\because \angle 2 = \angle ECD$

$\therefore DE = CE$

$\therefore BE = CE$ ， 即 E 是 BC 的中点，

又 $\because FH = CH$ ，

$\therefore H$ 是 CF 的中点,

$\therefore EH \parallel BF$

又 $\because AD \parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形,

$\therefore BE = DE$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为菱形;

【小问 2 详解】

证明: $\because \angle BDE = \angle DFC$, 即 $\angle 4 = \angle 1$

又 $\angle 1 = \angle 3$

$\therefore \angle 4 = \angle 3$

$\therefore \angle FGD = \angle BGC$

$\therefore \triangle FGD \sim \triangle BGC$

$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{DB}{GC}$$

又 $\because \angle FGB = \angle DGC$

$\therefore \triangle FGB \sim \triangle DGC$

$\therefore \angle 5 = \angle BDC$

$\therefore AB \parallel DE$

$\therefore \angle 1 = \angle 6$

又 $\angle 1 = \angle 3$

$\therefore \angle 6 = \angle 3$

$\therefore \triangle BFG \sim \triangle BDC$

$$\therefore \frac{BF}{BD} = \frac{BG}{BC}$$

$\therefore BF \cdot BC = BG \cdot BD$

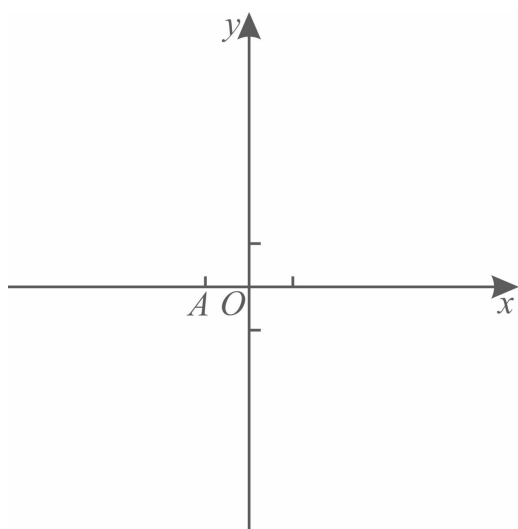
又 $\because EH$ 是 $\triangle BFC$ 的中位线,

$\therefore FH = 2EH$

又 $BC = 2BE$

$\therefore BF \cdot BC = 4EH \cdot BE = BG \cdot BD$ 即 $4EH \cdot BE = BG \cdot BD$

24 如图, 已知抛物线 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 交 y 轴于点 C .



- (1) 求直线 AC 的表达式，并用含 n 的代数式表示该抛物线的对称轴；
- (2) 已知直线 $x = -4$ 与抛物线交于点 D ，与直线 AC 交于点 E ，如果 $m < 0$ 且 $DE = 12$ ，求抛物线的表达式；
- (3) 已知抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，点 P 在抛物线上且位于第一象限，连接 AP 、 BC ，线段 AP 与 y 轴相交于点 E ，点 F 在线段 BC 上，连接 PF 、 EF ，如果 $\angle PFE = 90^\circ$ ，且 $S_{\triangle PEF} = 4AE^2$ ，求点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = -3x - 3$

(2) $y = -x^2 - 4x - 3$

(3) P 点不存在

【解析】

【分析】(1) 先求得 $C(0, -3)$ ，进而待定系数法得出直线 AC 解析式为 $y = -3x - 3$ ，将 $A(-1, 0)$ 代入 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 得： $0 = m - 2n - 3$ 得出 $m = 2n + 3$ ，进而根据抛物线对称轴公式，即可求解；

(2) 由 (1) 抛物线解析式为 $y = (2n + 3)x^2 + 2nx - 3$ ，得出 $D(-4, 24n + 45)$ ，进而求得 $E(-4, 9)$ 得出 $DE = 12$ ，可得 $|24n + 45 - 9| = 12$ 解方程得出 n 点的值，即可求解。

(3) 过 P 作 $PH \parallel y$ 轴交 x 轴于 K ，过 F 作 $TH \parallel x$ 轴交 y 轴于 T ，交 PH 于 H ，则 $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形， $\triangle CFT$ 为等腰直角三角形，根据 $OE \parallel PK$ 得出 $\triangle AOE \sim \triangle AKP$ ，进而得出 $OE = t - 3$ ，证明 $\triangle ETF \cong \triangle FHP$ (AAS)，得出 $\triangle EFP$ 是等腰直角三角形，根据 $S_{\triangle PEF} = 4AE^2$ 得出 $PE = 4AE$ ，进而求得 $P(4, 5)$ ，最后判断得出 $F(4, 1)$ 不在线段 BC 上，故 P 点不存在。

【小问 1 详解】

解：在 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 中，令 $x = 0$ 得 $y = -3$ ，

$$\therefore C(0, -3),$$

设直线 AC 解析式为 $y = kx + b$,

把 $A(-1, 0)$, $C(0, -3)$ 代入得：

$$\begin{cases} -k + b = 0 \\ b = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -3 \\ b = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 解析式为 $y = -3x - 3$,

把 $A(-1, 0)$ 代入 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 得： $0 = m - 2n - 3$,

解得 $m = 2n + 3$,

$\therefore$ 抛物线 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{2n}{2m} = -\frac{n}{m} = -\frac{n}{2n+3}$

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $m = 2n + 3$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = (2n + 3)x^2 + 2nx - 3$,

$\because m < 0$,

$\therefore 2n + 3 < 0$,

解得 $n < -\frac{3}{2}$,

令 $x = -4$ 得 $y = 16(2n + 3) - 8n - 3 = 24n + 45$,

$\therefore D(-4, 24n + 45)$,

在 $y = -3x - 3$ 中，令 $x = -4$ 得 $y = 12 - 3 = 9$,

$\therefore E(-4, 9)$,

$\therefore DE = 12$,

$\therefore |24n + 45 - 9| = 12$,

解得 $n = -1$ (舍去) 或 $n = -2$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 - 4x - 3$;

【小问 3 详解】

$$\therefore -\frac{n}{2n+3} = -1$$

∴ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

解得 $x = -1$ 或 $x = 3$,

 $\therefore C(0, -3),$
$$\therefore \angle OCB = 45^\circ,$$

设 $P(t, t^2 - 2t - 3)$, $CT = FT = m$, 则 $FH = t - x$,

$$\therefore \Delta AOE \sim \Delta AKP$$

$$\therefore OE = t - 3,$$

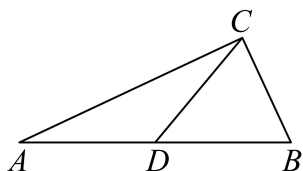
$$\therefore ET = CE - CT = t - x,$$

$\therefore FH = ET$,
 $\because \angle PFE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EFT = 90^\circ - \angle PFH = \angle FPH$,
 $\because \angle ETF = 90^\circ = \angle H$,
 $\therefore \triangle ETF \cong \triangle FHP (\text{AAS})$,
 $\therefore EF = FP$,
 $\therefore \triangle EFP$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} EF^2 = \frac{1}{4} PE^2$
 $\because S_{\triangle PEF} = 4AE^2$,
 $\therefore \frac{1}{4} PE^2 = 4AE^2$
 $\therefore PE = 4AE$,
 $\because OE \parallel PK$,
 $\therefore OK = 4OA = 4$, 即 $t = 4$,
 $\therefore P(4,5)$.
 $\therefore E(0,1)$,
 $\because A(-1,0)$
 $\therefore AO = EO$
 $\therefore \triangle EAO$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore \angle EAO = 45^\circ = \angle PEF$
 $\therefore \angle OEF = 90^\circ$
 $\therefore EF \parallel x$ 轴, 则 $F(4,1)$ 不在线段 BC 上, 故 P 点不存在.

【点睛】 本题考查二次函数综合应用, 相似三角形判定与性质, 待定系数法, 等腰直角三角形判定与性质等知识, 解题的关键是作辅助线, 构造相似三角形和全等三角形解决问题.

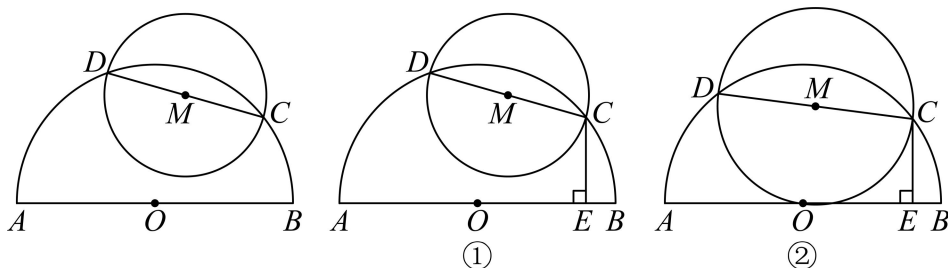
25. 阅读材料:

我们学过有关直角三角形的性质定理: 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 这条定理的逆命题“如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半, 那么这个三角形是直角三角形”也是真命题.



如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 为 AB 上的中线，如果 $CD = \frac{1}{2} AB$ ，那么 $\angle ACB = 90^\circ$ 。也可以说，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $CD = AD = BD$ ，那么 $\angle ACB = 90^\circ$ 。

根据上面的阅读材料，完成下列问题：（若需要，可直接运用直角三角形性质定理的逆命题）如图， AB 为半圆 O 的直径， CD 是半圆 O 的弦，以 CD 为直径作 $\odot M$ 。



(1) 如图①，过点 C 作 $CE \perp AB$ ，垂足为 E 。

①求证： $CE^2 = AE \cdot BE$ ；

②已知 $BE = 1$ ， $CE = 3$ ，如果 $\odot M$ 经过点 O （如图②），求直线 CD 与直线 AB 夹角的正弦值；

(2) 已知 $\odot M$ 与线段 AB 相交于点 P 、 Q ， $CD = 6\sqrt{2}$ ，如果 $AP: PQ: BQ = 7:4:9$ ，求 AB 的长。

【答案】 (1) ①见解析；② $\frac{\sqrt{2}}{10}$

(2) $AB = \frac{120\sqrt{103}}{103}$ 或 $AB = \frac{24\sqrt{39}}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质，圆的性质，解直角三角形，分类讨论是解题的关键；

(1) ①证明 $\triangle AEC \sim \triangle CEB$ ，根据相似三角形的性质，即可得证；

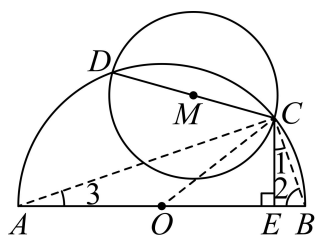
②根据①的结论，结合已知得出 $AE = 9$ ，进而得出 $OA = OB = OC = 5$ ，过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ，连接 OC, OD, OM 得出 $\triangle DHO \cong \triangle OEC$ (AAS) 则 $EH = OH + OE = 7$ 过点 C 作 $CF \parallel AB$ 交 DH 于点 F ，则四边形 $CEHF$ 是矩形，得出直线 CD 与直线 AB 夹角的为 $\angle DCF$ ，进而根据正弦的定义，即可求解；

(2) 设 $AP = 7k, PQ = 4k, BQ = 9k$ ，根据题意画出图形，分当 P 在 Q 的左侧时，当 P 在 Q 的右侧时，分别求得 AB ， HO, HQ ，进而在 $\text{Rt}\triangle MHO$ ， $\text{Rt}\triangle MPH$ 中， $MH^2 = OM^2 - OH^2 = MP^2 - PH^2$ ，根据

勾股定理求得 k 的值，即可求解.

【小问 1 详解】

解：①如图



$$\because OA = OB = OC$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\text{又} \because CE \perp AB$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \quad \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3$$

$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle CEB$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{CE}{BE} \text{ 即 } CE^2 = AE \cdot BE;$$

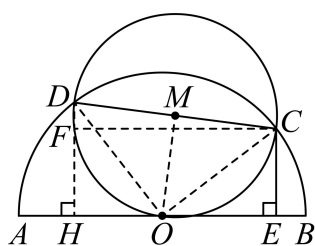
$$\textcircled{2} \because CE^2 = AE \cdot BE, \quad BE = 1, \quad CE = 3$$

$$\therefore AE = 9,$$

$$\therefore AB = AE + EB = 9 + 1 = 10$$

$$\therefore OA = OB = OC = 5$$

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ，连接 OC, OD, OM ，如图，



$$\because MD = MC = MO$$

$$\therefore \angle DOC = 90^\circ,$$

$$\because \angle HDO = 90^\circ - \angle HOD = \angle COE, \quad \angle DHO = \angle OEC = 90^\circ, \quad OD = OC$$

$$\therefore \triangle DHO \cong \triangle OEC \text{ (AAS)}$$

$$\therefore OH = EC = 3, \quad DH = OE = 5 - 1 = 4,$$

$$\therefore EH = OH + OE = 7$$

过点 C 作 $CF \parallel AB$ 交 DH 于点 F ，则四边形 $CEHF$ 是矩形，

$$\therefore CF = EH = 7, FH = CE = 3$$

$$\therefore DF = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore CD = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin \angle DCF = \frac{DF}{CD} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

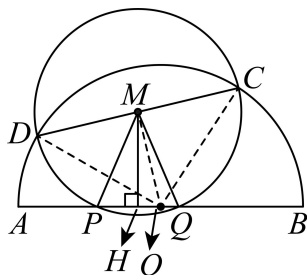
$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 与直线 } AB \text{ 夹角的正弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{10}$$

【小问 2 详解】

解： $\because AP: PQ: BQ = 7:4:9$ ，

$$\therefore \text{设 } AP = 7k, PQ = 4k, BQ = 9k$$

①当 P 在 Q 的左侧时，如图，连接 OM ， OC ，过点 M 作 $MH \perp AB$ 于点 H ，



$$\therefore AB = AP + PQ + BQ = 20k$$

$$\therefore OD = 10k$$

$$\therefore CD = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore OM \perp CD,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}CD = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore OM^2 = (10k)^2 - (3\sqrt{2})^2$$

$$\text{又} \because OQ = OB - BQ = 10k - 9k = k,$$

$$\therefore MH \perp AB$$

$$\therefore PH = QH = \frac{1}{2}PQ = 2k$$

