

浦东新区 2024 学年度第二学期期末练习卷

初三数学参考答案及评分说明

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. C; 2. A; 3. A; 4. C; 5. D; 6. B.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. a ; 8. $(4a+1)(4a-1)$; 9. $x \neq 3$;

10. $x = -5$; 11. $m \leq 9$; 12. 60° ;

13. $\frac{1}{3}$; 14. 减小; 15. 2;

16. $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$; 17. 2; 18. $\frac{2}{7}\sqrt{21} \leq r < \sqrt{3}$.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 解：原式 $= -(\sqrt{3}-2) + 1 - 3 + (2 + \sqrt{3})$
 $= 2 - \sqrt{3} + 1 - 3 + 2 + \sqrt{3}$
 $= 2.$

20. 解： $4x - (x^2 - 9) = 2(x - 3) - 2(x + 3).$

$$4x - x^2 + 9 = 2x - 6 - 2x - 6.$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0.$$

$$(x - 7)(x + 3) = 0.$$

$$x_1 = 7, x_2 = -3.$$

经检验 $x = 7$ 是原方程的根， $x = -3$ 是增根，舍去.

$\therefore$ 原方程的根是 $x = 7$.

21. 解：(1) $\because$ 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 与直线 $y = 3x - 1$ 都经过点 $A(2, m)$,

将点 $A(2, m)$ 代入 $y = 3x - 1$ ，可得 $m = 5$.

将点 $A(2, 5)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ ，可得 $k = 10$.

$\therefore m = 5, k = 10$.

(2) 过点 A 作 $AH \perp CD$ ，垂足为点 H .

点 H 坐标为 $(2, n)$.

点 D 坐标为 $(\frac{n+1}{3}, n)$.

点 C 坐标为 $(\frac{10}{n}, n)$.

$\because AC=AD$, $AH \perp CD$, 垂足为点 H ,

$$\therefore CH=DH, \text{ 即 } \frac{n+1}{3} - 2 = 2 - \frac{10}{n} \text{ 或 } 2 - \frac{n+1}{3} = \frac{10}{n} - 2$$

整理得 $n^2 - 11n + 30 = 0$, 解得 $n = 6$, $n = 5$ (不符合题意, 舍去).

$\therefore$ 点 B 坐标为 $(0, 6)$.

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(\frac{5}{3}, 6)$, 点 D 坐标为 $(\frac{7}{3}, 6)$, $CD = \frac{2}{3}$.

22. 解: (1) 28;

(2) 平时段平均每天用电量为: $\frac{221-109}{7} = 16$ (千瓦时);

4 月份平时段用电总量为: $16 \times 30 = 480$ (千瓦时).

答: 估计小明家 4 月份平时段用电总量是 480 千瓦时.

(3) 小明家每天平时段用电量的中位数是 16 千瓦时, 正确;

小明家每天平时段用电量的众数是 16 千瓦时, 错误.

理由: 将 7 个数据 12、12、16、7、17、28、20 从小到大排列为 7、12、12、16、17、

20、28, 第 4 个数据 16 在中间, 所以中位数是 16 千瓦时; 在这 7 个数据中, 12 出现了 2 次, 其余数字均出现一次, 所以众数应为 12 千瓦时.

23. 证明: 方法一: 用对角线互相垂直的平行四边形是菱形来证明.

(1) 联结 AC 与 BD 相交于点 O .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = BC$, $AD \parallel BC$, $\angle ADF = \angle CBE = 90^\circ$, $AO = CO$, $BO = DO$.

$\therefore \angle ADN = \angle CBM$.

$\text{Rt}\triangle ADF$ 和 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中, $AD = BC$, $AF = CE$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle CBE$. $\therefore \angle DAN = \angle BCM$.

$\because \angle ADN = \angle CBM$, $AD = BC$, $\angle DAN = \angle BCM$,

$\therefore \triangle ADN \cong \triangle CBM$. $\therefore DN = BM$.

$\because BO = DO$, $BM = DN$, $\therefore BO - BM = DO - DN$ 即 $OM = ON$.

又 $\because AO = CO$, $\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AC \perp BD$.

$\therefore \square AMCN$ 是菱形.

方法二: 用四边相等的四边形是菱形来证明.

(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = BC = CD$, $AD \parallel BC$, $\angle ADF = \angle CBE = 90^\circ$, $\angle ADN = \angle CDN$.

$$\therefore \angle ADN = \angle CBM.$$

Rt $\triangle ADF$ 和 Rt $\triangle CBE$ 中, $AD = BC$, $AF = CE$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle CBE. \therefore \angle DAN = \angle BCM.$$

$$\therefore \angle ADN = \angle CBM, AD = BC, \angle DAN = \angle BCM,$$

$$\therefore \triangle ADN \cong \triangle CBM. \therefore AN = CM.$$

$$\therefore AD = CD, \angle ADN = \angle CDN, DN = DN,$$

$$\therefore \triangle ADN \cong \triangle CDN. \therefore AN = CN.$$

同理可得 $AM = CM$.

$$\therefore AN = CN = CM = AM.$$

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是菱形.

(2) $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle NBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ. \text{ 同理, } \angle CDB = \frac{1}{2}\angle ADC = 45^\circ$$

$$\therefore \text{四边形 } AMCN \text{ 是菱形, } \therefore CN = CM.$$

$$\text{又 } \therefore CM^2 = MN \cdot NB, \therefore CN^2 = MN \cdot NB \text{ 即 } \frac{CN}{MN} = \frac{NB}{CM}.$$

$$\text{又 } \therefore \angle CNM = \angle BNC, \therefore \triangle NCM \sim \triangle NBC.$$

$$\therefore \angle NCM = \angle NBC = 45^\circ.$$

$$\therefore \text{四边形 } AMCN \text{ 是菱形, } \therefore \angle ACN = \angle ACM = \frac{1}{2}\angle NCM = 22.5^\circ.$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, \therefore \angle DCN = \angle BCM = 22.5^\circ.$$

$$\therefore CM \perp CP, \therefore \angle PCM = 90^\circ. \therefore \angle PCD = 22.5^\circ.$$

$$\therefore \triangle PCD \text{ 中, } \angle CDB = \angle DCN + \angle P, \therefore \angle P = 22.5^\circ.$$

$$\therefore \angle PCD = \angle P. \therefore PD = CD.$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是正方形, } \therefore BC = CD. \therefore PD = CB.$$

$$\therefore \angle PCN = \angle NBC = 45^\circ, \angle P = \angle P, \therefore \triangle PCN \sim \triangle PBC.$$

$$\therefore \frac{NC}{CB} = \frac{NP}{CP}. \text{ 即 } \frac{NC}{NP} = \frac{CB}{CP}.$$

$$\therefore PD = CB. \therefore \frac{NC}{NP} = \frac{PD}{PC}.$$

24. 解: (1) 设抛物线 C_1 的表达式为 $y = a(x+m)^2 + k (a \neq 0)$.

$$\therefore y = a(x+m)^2 + k (a \neq 0) \text{ 过顶点 } A(6, 6), \text{ 可得 } y = a(x-6)^2 + 6 (a \neq 0).$$

$$\text{又 } \therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 过原点 } (0, 0), \therefore 36a + 6 = 0. \therefore a = -\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的表达式是 } y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x.$$

(2) ①根据题意可设新抛物线 C_2 的顶点 D 的坐标为 $(6+m, 6-n)$.

$\because$ 顶点 D 恰好落在抛物线 C_1 上, $\therefore 6-n = -\frac{1}{6}(6+m-6)^2 + 6$, 可得 $m^2 = 6n$. (1

分)

$\because$ 由点 A 在线段 BD 的中垂线上, 可得 $AD = AB = 6$.

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $AD^2 = AE^2 + ED^2$ 即 $n^2 + m^2 = 36$.

整理得 $n^2 + 6n - 36 = 0$.

解得 $n = 3\sqrt{5} - 3$ (舍负取正).

根据题意可得, 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $\angle AED = 90^\circ$, $AD = 6$, $DE = 3(\sqrt{5} - 1)$,

$$\therefore \sin \angle EAD = \frac{DE}{AD} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{6} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

② $\because$ 线段 BD 交抛物线 C_1 的对称轴于点 F ,

$\therefore$ 当 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ADB$ 相似时, 可得 $\angle ABD = \angle FAD$.

$\because AF \parallel DE$, $\therefore \angle EDA = \angle FAD$. $\therefore \angle EDA = \angle ABD$.

$\because \angle AED = \angle DEB$, $\therefore \triangle EAD \sim \triangle EDB$.

$$\therefore \frac{EA}{ED} = \frac{ED}{EB}. \text{ 即 } ED^2 = EA \cdot EB.$$

$$\therefore \left(\frac{1}{6}m^2\right)^2 = m(m+6). \text{ 整理得 } m^3 - 36m = 216.$$

其他方法, 比照给分.

25. 解: (1) 联结 OE .

$$\because OE = OC, \therefore \angle OEC = \angle OCE,$$

$$\because PC = PO, \therefore \angle OCE = \angle POC, \therefore \angle OEC = \angle POC.$$

$$\because \angle ECO = \angle OCP, \therefore \triangle COE \sim \triangle CPO.$$

$$\therefore \frac{CE}{CO} = \frac{CO}{CP}.$$

$$\therefore CO^2 = CE \cdot CP.$$

(2) ①联结 AE 、 BE 、 OE .

方法一: 过点 D 作 $DH \perp AO$, 垂足为点 H .

$\because M$ 是 $\triangle PCD$ 的重心, $\therefore PE = EC$.

易得 $\angle CED = 90^\circ$, $\therefore DE$ 是线段 PC 的中垂线, $\therefore PD = DC = 4$.

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OHD \text{ 中, } DH^2 = OD^2 - OH^2 = 2^2 - OH^2.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PHD \text{ 中, } DH^2 = PD^2 - PH^2 = 4^2 - (4 - OH)^2.$$

$$\therefore 2^2 - OH^2 = 4^2 - (4 - OH)^2, \text{ 解得 } OH = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \cos \angle AOD = \frac{1}{4}. \text{ 又 } \because \angle AOD = \angle BOC,$$

$$\therefore \cos \angle BOC = \frac{1}{4}.$$

方法二: $\because M$ 是 $\triangle PCD$ 的重心, $\therefore PE = EC$.

$$\text{又 } \because PA = AO, \therefore AE \parallel OC, AE = \frac{1}{2} OC = 1.$$

$$\therefore \angle BOC = \angle BAE.$$

$$\because OE = OA = OB, \therefore \angle OAE = \angle OEA, \angle OEB = \angle OBE.$$

$$\because \angle OAE + \angle OEA + \angle OEB + \angle OBE = 180^\circ, \therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } \angle AEB = 90^\circ, AE = 1, AB = 4, \therefore \cos \angle BAE = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \cos \angle BOC = \frac{1}{4}.$$

② 联结 OE 、 AE 、 BC .

$$\because OE = OC = OD, \therefore \angle OCE = \angle OEC, \angle OED = \angle ODE.$$

$$\because \angle OCE + \angle OEC + \angle OED + \angle ODE = 180^\circ, \therefore \angle CED = 90^\circ.$$

同理可得: $\angle CBD = 90^\circ$.

分如下三种情形讨论: $BD = BE$ 、 $DB = DE$ 、 $EB = ED$.

(i) 如果 $BD = BE$, 那么点 B 在 DE 的垂直平分线上.

$\because OE = OD$, $\therefore$ 点 O 在 DE 的垂直平分线上, OB 是线段 DE 的中垂线.

又 $\angle DEC = 90^\circ$, $\therefore EC \parallel OB$, 点 P 不存在. 此种情况不符合题意, 舍去.

(ii) 如果 $DB = DE$, 那么点 D 在 BE 的垂直平分线上.

$\because OB = OE$, $\therefore$ 点 O 在 BE 的垂直平分线上.

$\therefore CD$ 垂直平分 BE , 记 CD 与 BE 交于点 F , $\therefore \angle OFB = 90^\circ$.

联结 AE , 易得 $\angle AEB = 90^\circ$, $\therefore AE \parallel OC$. $\therefore PE = EC$.

$$\because AO = OB, EF = FB, \therefore OF = \frac{1}{2} AE.$$

$$\because AE \parallel OC, \therefore \frac{AE}{OC} = \frac{PA}{PO}, \because AE = \frac{1}{2} OC = 1, OF = \frac{1}{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFO \text{ 中, } EF = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}, CF = \frac{3}{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFC \text{ 中, } \therefore CE = \sqrt{\frac{15+9}{4}} = \sqrt{6},$$

即 $PE = \sqrt{6}$.

(iii) 如果 $EB = ED$, 那么点 E 在 BD 的垂直平分线上.

$\because OB = OD$, $\therefore$ 点 O 在 BD 的垂直平分线上. $\therefore EO$ 垂直平分 BD .

联结 BC , 易得 $\angle CBD = 90^\circ$, $\therefore OE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{EO}{BC} = \frac{PE}{PC} = \frac{PO}{PB} = \frac{4}{6},$$

$$\therefore PE = 2EC, \quad BC = \frac{3}{2}OE = 3.$$

延长 EO 与 BD 交于点 G ,

$$\text{在 Rt}\triangle BDC \text{ 中, } BD = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}. \quad \therefore DG = BG = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{同理, 在 Rt}\triangle ODG \text{ 中, } OG = \sqrt{4 - \frac{7}{4}} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore EG = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}, \quad \text{在 Rt}\triangle EDG \text{ 中, } DE = \sqrt{\frac{49+7}{4}} = \sqrt{14}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEC \text{ 中, } \therefore CE = \sqrt{4^2 - 14} = \sqrt{2}, \quad PE = 2CE = 2\sqrt{2}.$$

综上所述, PE 的长为 $\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{2}$.

其他方法, 比照给分.