

## 浦东新区初三年级模拟考试数学试卷

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题.
2. 试卷满分 150 分，考试时间 100 分钟.
3. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

### 一、选择题（本大题共 24 分，每小题 4 分）

1. 下列实数中，是无理数的是（ ）

A.  $27^{\frac{1}{3}}$

B.  $\frac{22}{7}$

C.  $\frac{\pi}{3}$

D.  $0.0\dot{1}0\dot{1}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了无理数的概念，分数指数幂，无理数就是无限不循环小数，理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称，即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数，由此即可判断选项.

【详解】解：A、 $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$  是有理数，故本选项不符合题意；

B、 $\frac{22}{7}$  是有理数，故本选项不符合题意；

C、 $\frac{\pi}{3}$  是无理数，故本选项符合题意；

D、 $0.0\dot{1}0\dot{1}$  是有理数，故本选项不符合题意；

故选：C.

2. 下列单项式中， $ab^3$  的同类项是（ ）

A.  $5ab^3$

B.  $-a^3b$

C.  $a^2b^3$

D.  $-a^2b^2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了同类项的定义，同类项定义中的两个“相同”：所含字母相同；相同字母的指数相同，是易混点，还有注意同类项定义中隐含的两个“无关”：①与字母的顺序无关；②与系数无关. 根据同类项的定义，所含字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项，可得答案.

【详解】解：A. 所含字母相同且相同字母的指数也相同，故 A 符合题意；

B. 所含相同字母的指数不同，故 B 不符合题意；

C. 所含相同字母的指数不同，故 C 不符合题意；

D. 所含相同字母的指数不同，故 D 不符合题意；

故选：A.

3. 不等式组  $\begin{cases} 3x-15 \leq 0 \\ \frac{4-x}{2} > 1 \end{cases}$  的解集是 ( )

A.  $x < 2$

B.  $x < 3$

C.  $x \leq 5$

D.  $2 < x \leq 5$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次不等式组，解题的关键是熟练掌握解一元一次不等式组的方法和步骤；先分别求出每个不等式的解集，再根据同小取小即可得解.

【详解】解：  $\begin{cases} 3x-15 \leq 0 \textcircled{1} \\ \frac{4-x}{2} > 1 \textcircled{2} \end{cases}$  ,

解①得：  $x \leq 5$  ,

解②得：  $x < 2$  ,

$\therefore$  原不等式组的解集为：  $x < 2$  ,

故选：A.

4. 下列四个函数中，图象经过原点的是 ( )

A.  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

B.  $y = -\frac{2}{x}$

C.  $y = x^2 + 2x$

D.  $y = (x+1)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查函数图象上的点，函数图象上的点的坐标适合函数解析式，令  $x = 0$ ，函数值也等于 0，则图象经过原点. 据此判断即可.

【详解】解：A、令  $x = 0$ ，则  $y = \frac{3}{2}$ ，故不符合题意；

B、 $x = 0$  无意义，故不符合题意；

C、 $x = 0$ ，则  $y = 0$ ，故符合题意；

D、 $x = 0$ ，则  $y = 1$ ，故不符合题意.

故选：C.

5. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）

- A. 直角三角形                  B. 扇形                  C. 平行四边形                  D. 正八边形

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形的定义，解题的关键是掌握这两个概念，熟悉一些常见图形的对称性.

根据轴对称图形和中心对称图形的定义，逐个进行判断即可.

【详解】解：A. 直角三角形不是轴对称图形（等腰直角三角形除外），又不是中心对称图形，故该选项不符合题意；

B. 扇形是轴对称图形，不是中心对称图形，故该选项不符合题意；

C. 平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，故该选项不符合题意；

D. 正八边形既是轴对称图形又是中心对称图形，故该选项符合题意；

故选：D.

6. 对于命题：①一个圆上所有的点都在另一个圆的外部，那么这两个圆外离；②一个圆上所有的点都在另一个圆的内部，那么这两个圆内含. 下列说法正确的是（ ）

- A. ①正确②错误                  B. ①错误②正确                  C. ①和②都正确                  D. ①和②都错误

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了命题的判断，圆与圆的位置关系，掌握命题的定义及分类并能运用所学知识判断命题的真假是解题的关键. 根据圆与圆的位置关系判断即可.

【详解】解：①一个圆上所有的点都在另一个圆的外部，那么这两个圆外离或内含，①错误；

②一个圆上所有的点都在另一个圆的内部，那么这两个圆内含，②正确.

故选：B.

## 二、填空题（本大题共 48 分，每小题 4 分）

7. 计算： $a^{-2} \cdot a^3 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $a$

【解析】

【分析】本题考查了负整数指数幂，同底数幂的乘法，解题的关键是熟练掌握运算法则；根据同底数幂的乘法运算求解即可.

【详解】解：  $a^{-2} \cdot a^3 = a$ ，

故答案为：  $a$ 。

8. 分解因式：  $16a^2 - 1 =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $(4a+1)(4a-1)$

【解析】

【分析】 直接利用平方差公式进行分解因式即可.

【详解】  $16a^2 - 1 = (4a+1)(4a-1)$ 。

故答案为：  $(4a+1)(4a-1)$ 。

【点睛】 本题主要考查因式分解，熟练掌握平方差公式是关键.

9. 函数  $y = \frac{x-1}{3-x}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \neq 3$

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是求自变量的取值范围，解题关键是明确要使函数  $y = \frac{x-1}{3-x}$  有意义，则  $3-x \neq 0$ 。

由  $3-x \neq 0$  即可得解.

【详解】 解： 要使函数  $y = \frac{x-1}{3-x}$  有意义，

则  $3-x \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 3$ ，

即函数  $y = \frac{x-1}{3-x}$  的定义域为  $x \neq 3$ 。

故答案为：  $x \neq 3$ 。

10. 方程  $\sqrt{15-2x} = -x$  的解是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x = -5$

【解析】

【分析】 先将无理方程转化为一元二次方程，求解后再结合二次根式的性质判断后即可得解.

【详解】 解：  $\sqrt{15-2x} = -x$ ，

$$15 - 2x = x^2,$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0,$$

$$(x+5)(x-3) = 0,$$

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 3,$$

经检验  $x = 3$  是原方程的增根，舍去，

$\therefore$  原方程的根为  $x = -5$ .

故答案为：  $x = -5$ .

【点睛】 本题考查的知识点是解无理方程、解一元二次方程、二次根式的性质，解题关键是熟练掌握解无理方程.

11. 如果关于  $x$  的方程  $x^2 - 6x + m = 0$  有实数根，那么实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $m \leq 9$

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是根的判别式，解题关键是熟练掌握根据一元二次方程根的情况求参数的方法.

方程  $x^2 - 6x + m = 0$  有实数根，即根的判别式  $\Delta = (-6)^2 - 4m \geq 0$ .

【详解】 解：  $\because$  方程  $x^2 - 6x + m = 0$  有实数根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4m \geq 0,$$

$$\therefore m \leq 9.$$

故答案为：  $m \leq 9$ .

12. 在平行四边形  $ABCD$  中，  $\angle A = 2\angle B$ ，则  $\angle D =$ \_\_\_\_\_.

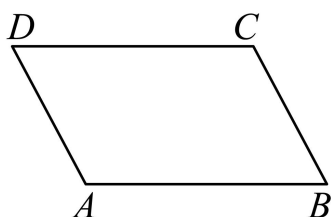
【答案】  $60^\circ$  ## 60 度

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质；熟记平行四边形的对角相等，邻角互补是解决问题的关键.

由平行四边形的性质得出  $\angle B = \angle D$ ，  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，由已知条件求出  $\angle B = 60^\circ$ ，即可得出结果.

【详解】 解： 如图，



∵ 四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore \angle B = \angle D, \quad AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A = 2\angle B,$$

$$\therefore 2\angle B + \angle B = 180^\circ,$$

$$\text{解得: } \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle B = 60^\circ;$$

故答案为:  $60^\circ$ .

13. 有一枚质地均匀的正方体骰子, 它的六个面上分别标有 1、2、3、4、5、6 六个数字, 掷这枚骰子, 向上的一面出现合数的概率是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了概率公式. 由于一枚质地均匀的正方体骰子, 骰子向上的一面点数可能为 1、2、3、4、5、6, 共有 6 种可能, 合数为 4, 6, 共 2 种, 则根据概率公式计算即可求解.

【详解】 解: 掷一枚质地均匀的正方体骰子, 骰子向上的一面点数共有 6 种可能, 合数为 4, 6, 共 2 种, 所以这个骰子向上一面的数字是合数概率是  $\frac{1}{3}$ .

故答案为:  $\frac{1}{3}$ .

14. 如果正比例函数  $y = kx$  ( $k$  为常数, 且  $k \neq 0$ ) 的图像经过点  $(-2, 3)$ , 那么函数值  $y$  随着  $x$  的值增大而\_\_\_\_\_. (填“增大”或“减小”)

【答案】 减小

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是判断一次函数的增减性, 解题关键是熟练掌握判断一次函数的增减性. 先根据该图像经过点  $(-2, 3)$  求出  $k$  值, 再根据  $k > 0$  时, 函数值  $y$  随着  $x$  的值增大而增大;  $k < 0$  时, 函数值  $y$  随着  $x$  的值增大而减小即可得解.

【详解】 解: ∵ 正比例函数  $y = kx$  ( $k$  为常数, 且  $k \neq 0$ ) 的图像经过点  $(-2, 3)$ ,

$$\therefore -2k = 3, \quad k = -\frac{3}{2} < 0,$$

∴ 函数值  $y$  随着  $x$  的值增大而减小.

故答案为: 减小.

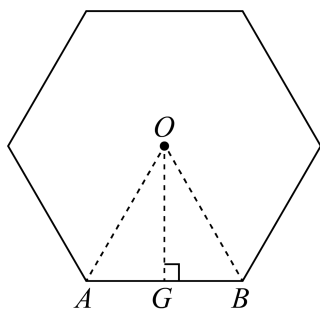
15. 如果一个正六边形的边心距的长度为  $\sqrt{3}\text{cm}$ ，那么它的半径的长度为\_\_  $\text{cm}$  .

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查正多边形与圆，设正六边形的中心是  $O$ ，一边是  $AB$ ，过  $O$  作  $OG \perp AB$  与  $G$ ，在直角  $\triangle OAG$  中，根据三角函数即可求得  $OA$  .

【详解】 解： 如图，过  $O$  作  $OG \perp AB$  与  $G$ ，



$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \quad OA = OB,$$

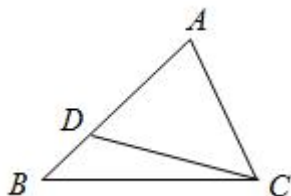
$$\therefore \angle AOG = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ,$$

在  $\text{Rt}\triangle AOG$  中，  $OG = \sqrt{3}$ ，  $\angle AOG = 30^\circ$ ，

$$\therefore OA = OG \div \cos 30^\circ = \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,$$

故答案为： 2.

16. 如图，在  $\triangle ABC$  中，点  $D$  在边  $AB$  上，  $\angle ACD = \angle B$ ，  $AD = 2$ ，  $AC = \sqrt{6}$ ， 设  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ，  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ， 那么  $\overrightarrow{CD} =$ \_\_\_\_\_ . (用向量  $\vec{a}$ ，  $\vec{b}$  的式子表示).



【答案】  $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$

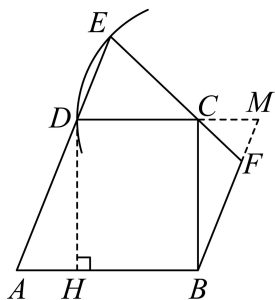
【解析】

【分析】 根据  $\angle A = \angle A$ ，  $\angle ACD = \angle B$ ， 可证  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ， 则有  $AC^2 = AD \cdot AB$ ， 可得  $AB = 3$ ，  $BD$



结合  $DC = EC$ ，证明  $CF = CM = AH$ ，再结合  $\tan A = \frac{5}{2}$ ，即可求解。

【详解】解：如图，分别延长  $DC$ ， $BF$  交于  $M$ ，过  $D$  作  $DH \perp AB$  于  $H$ ；



$\because AB \parallel CD$ ， $BM \parallel AD$ ，

$\therefore$  四边形  $ABMD$  为平行四边形，四边形  $BCDH$  为矩形，则  $AB = DM$ ， $CD = BH$ ，

$\because DC = EC$ ，

$\therefore \angle CED = \angle CDE$ ，

$\because BM \parallel AD$ ，

$\therefore \angle CED = \angle CFM$ ， $\angle CDE = \angle M$ ，则  $\angle M = \angle CFM$

$\therefore CM = CF$ ，

$\therefore CF = CM = AH$ ，

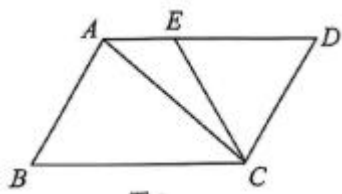
$\because BC = DH = 5$ ， $\tan A = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore \tan A = \frac{DH}{AH} = \frac{BC}{AH} = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore AH = 2$ ，则  $CF = 2$ 。

故答案为：2。

18. 如图，在  $\square ABCD$  中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，点  $E$  在边  $AD$  上，且  $\triangle DEC$  是等边三角形，点  $O$  是对角线  $AC$  上一点。如果  $\odot O$  经过点  $E$  且与边  $BC$  没有公共点，那么  $\odot O$  的半径  $r$  的取值范围是\_\_\_\_\_。



【答案】  $\frac{2\sqrt{21}}{7} \leq r \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了直线与圆的位置关系、平行四边形的性质、勾股定理、解直角三角形的应用，解题关键是找到界点时的情况计算.

根据题意，需要找到当  $OE = GE$  时， $\odot O$  半径最小；当点  $O$  与点  $A$  重合时， $\odot O$  半径最大，计算出长度即可解答.

【详解】 解：作  $AM \perp BC$  交  $BC$  于点  $M$ ，

在  $\square ABCD$  中，

$$\therefore \angle B = \angle D = 60^\circ, \quad AD \parallel BC, \quad AD = BC = 6, \quad DC = AB = 4,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACB,$$

$\because \triangle DEC$  是等边三角形，

$$\therefore \angle D = 60^\circ, \quad DE = DC = 4,$$

在直角  $\triangle ABM$  中，

$$\therefore BM = \frac{1}{2} AB = 2, \quad AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\because BC = 6,$$

$$\therefore CM = BC - BM = 6 - 2 = 4,$$

在直角  $\triangle ACM$  中，

$$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = 2\sqrt{7},$$

在直角  $\triangle ACM$  中，

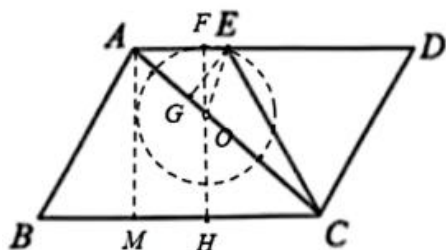
$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{AM}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

作  $EG \perp AC$  交  $AC$  于点  $G$ ，

$$\therefore \sin \angle EAC = \frac{EG}{AE},$$

$$\therefore \frac{EG}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$$\therefore EG = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7},$$



⊙O 与 BC 相切时,  $AM = 2r = 2\sqrt{3}$ , 即  $r = \sqrt{3}$ ,

当  $OE = GE$  时, ⊙O 半径最小, 即  $r = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ ;

当点 O 与点 A 重合时,  $AE = AD - DE = 6 - 4 = 2$ , 即  $r = 2$ ,

$\because \sqrt{3} < 2$ ,

$\therefore$  ⊙O 半径最大为 2,

综上所述,  $\frac{2\sqrt{21}}{7} \leq r \leq 2$ .

### 三、解答题 (本大题共 78 分)

19. 计算:  $|\sqrt{3} - 2| + (\pi - 2025)^0 - \sqrt{9} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ .

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算, 分母有理化, 零指数幂, 解题的关键是熟练掌握相关运算法则; 根据实数的混合运算, 分母有理化, 零指数幂的运算法则计算即可.

【详解】解: 原式  $= 2 - \sqrt{3} + 1 - 3 + 2 + \sqrt{3}$   
 $= 2$ .

20. 解方程:  $\frac{4x}{x^2 - 9} - 1 = \frac{2}{x + 3} - \frac{2}{x - 3}$ .

【答案】 $x = 7$

【解析】

【分析】本题考查了可化为一元二次方程的分式方程, 去分母转化为一元二次方程是解题的关键; 先去分母化为一元二次方程, 再解一元二次方程并检验即可得解.

【详解】解: 等式两边同乘以  $(x^2 - 9)$  得,

$$4x - (x^2 - 9) = 2(x - 3) - 2(x + 3),$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0,$$

$$(x - 7)(x + 3) = 0,$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -3,$$

经检验:  $x_2 = -3$  是原方程的增根, 舍去;

所以原方程的解为  $x = 7$ .

21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数, 且  $k \neq 0$ ) 与直线  $y = 3x - 1$  都经过点  $A(2, m)$ .

(1) 求  $m$  与  $k$  的值;

(2) 过点  $B(0, n)$  ( $n > 0$ ) 作平行于  $x$  轴的直线, 与双曲线  $y = \frac{k}{x}$  相交于点  $C$ , 与直线  $y = 3x - 1$  相交于点  $D$ ,

在  $\triangle ACD$  中, 当  $AC = AD$  时, 求边  $CD$  的长度.

【答案】(1)  $m = 5$ ;  $k = 10$

(2)  $CD = \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 将  $x = 2$  代入直线方程  $y = 3x - 1$  求出  $m$  后可得点  $A$  坐标, 再将该坐标代入双曲线方程即可得到  $k$ ;

(2) 结合题意得出  $A(2, 5)$ ,  $C\left(\frac{10}{n}, n\right)$ ,  $D\left(\frac{n+1}{3}, n\right)$ , 根据垂直平分线的判定推得  $2 - \frac{n+1}{3} = \frac{10}{n} - 2$ ,

解方程后可得  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 6$ , 将  $n$  的值代入求得点  $C$  和点  $D$  坐标, 满足存在  $\triangle ACD$  即可.

【小问 1 详解】

解: 已知直线  $y = 3x - 1$  过点  $A(2, m)$ ,

将  $x = 2$  代入直线方程  $y = 3x - 1$ ,

$$\therefore m = 3 \times 2 - 1 = 5,$$

$\because$  双曲线  $y = \frac{k}{x}$  过点  $A(2, 5)$ , 把  $x = 2$ ,  $y = 5$  代入  $y = \frac{k}{x}$ ,

$$\therefore k = 2 \times 5 = 10;$$

【小问 2 详解】

解: 由题知:  $A(2, 5)$ ,  $C\left(\frac{10}{n}, n\right)$ ,  $D\left(\frac{n+1}{3}, n\right)$ ,

$$\because AC = AD,$$

$\therefore A$  点在  $CD$  的垂直平分线上,

$$\therefore 2 - \frac{n+1}{3} = \frac{10}{n} - 2,$$

$$n^2 - 11n + 30 = 0,$$

$$(n-5)(n-6)=0,$$

$$\therefore n_1=5, \quad n_2=6,$$

$$\text{当 } n=6 \text{ 时, } C\left(\frac{5}{3}, 6\right), \quad D\left(\frac{7}{3}, 6\right), \quad \therefore CD = \left|\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\right| = \frac{2}{3},$$

当  $n=5$  时,  $C(2, 5)$ ,  $D(2, 5)$ , 此时  $C$ 、 $D$  重合, 舍去,

$$\text{综上: } CD = \frac{2}{3}.$$

【点睛】 本题考查的知识点是一次函数与反比例函数综合、垂直平分线的判定、两点间的距离、一元二次方程的实际应用, 解题关键是运用数形结合思想解题.

22. 小明乔迁的新居使用的是分时电表, 按平时段 (06:00~22:00) 和谷时段 (22:00~次日 6:00) 分别计费. 为了解 2025 年 4 月新居的平时段用电量, 小明连续 8 天, 每天 22:00 记录了电表平时段的读数, 如下表:

| 星期                  | 日   | 一   | 二   | 三   | 四   | 五   | 六   | 日   |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 平时段的读数<br>(单位: 千瓦时) | 109 | 121 | 133 | 149 | 156 | 173 | 201 | 221 |

根据表格提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 小明家这几天中, 平时段单日电量最大的那天的用电量是\_\_\_\_\_千瓦时;
- (2) 计算小明家 4 月份平时段用电总量约是多少千瓦时?
- (3) 小明计算出这几天平时段单日电量的中位数和众数都是 16 千瓦时, 你认为正确吗? 请简要说明理由.

【答案】 (1) 28

$$(2) \quad 4 \text{ 月份平时段用电总量约为 } 112 \times \frac{30}{(8-1)} = 480 \text{ 千瓦时}.$$

(3) 小明的说法不正确, 理由见解析.

【解析】

【分析】 (1) 分别计算每日平时段用电量, 比较后即可得到平时段单日电量最大的那天的用电量;

(2) 计算出这几天的用电总量, 再结合 4 月的总天数进行计算即可;

(3) 将数据从小到大排列后, 根据中位数和众数的定义即可得解.

【小问 1 详解】

解: 分别计算每日平时段用电量:

周日：  $121 - 109 = 12$ ；

周一：  $133 - 121 = 12$ ；

周二：  $149 - 133 = 16$ ；

周三：  $156 - 149 = 7$ ；

周四：  $173 - 156 = 17$ ；

周五：  $201 - 173 = 28$ ；

周六：  $221 - 201 = 20$ ，

比较可得用电量最大的是周五，为 28 千瓦时。

故答案为： 28。

【小问 2 详解】

解：这 8 天平时段用电总量：  $221 - 109 = 112$  千瓦时，

4 月份有 30 天，则 4 月份平时段用电总量约为  $112 \times \frac{30}{(8-1)} = 480$  千瓦时。

答：4 月份平时段用电总量约为  $112 \times \frac{30}{(8-1)} = 480$  千瓦时。

【小问 3 详解】

解：这几天平时段日用电量，从小到大排序为 7、12、12、16、17、20、28，

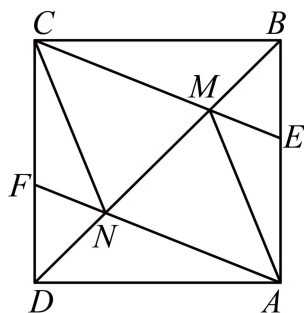
中位数：数据个数为 7，是奇数个，中位数取最中间的数据，即 16 千瓦时；

12 出现的次数最多，则众数是 12 千瓦时。

所以小明的说法不正确。

【点睛】 本题考查的知识点是有理数的运算法则、中位数定义、众数定义，解题关键是熟练掌握中位数和众数的定义。

23. 已知：如图，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$ 、 $F$  分别在边  $AB$ 、 $CD$  上，且  $AF = CE$ 。对角线  $BD$  分别交  $EC$ 、 $AF$  于点  $M$ 、 $N$ ，联结  $AM$ 、 $CN$ 。



(1) 求证：四边形  $AMCN$  是菱形；

(2) 过点  $C$  作  $CP \perp CE$  交  $BD$  的延长线于点  $P$ , 如果  $CM^2 = MN \cdot NB$ , 求证:  $\frac{NC}{NP} = \frac{PD}{PC}$ .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

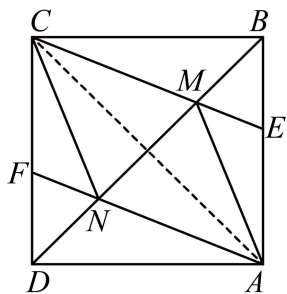
【解析】

【分析】(1) 联结  $AC$ , 根据正方形的性质先证  $\triangle BEC \cong \triangle DFA$  (HL), 再证四边形  $AECF$  是平行四边形, 进而可证明  $\triangle CBM \cong \triangle ADN$  (ASA), 得  $CM = AN$ , 四边形  $AMCN$  是平行四边形, 结合  $AC \perp BD$  可证得结论;

(2) 根据正方形及菱形的性质先证  $\triangle CND \cong \triangle CMB$ , 得  $\angle DCN = \angle BCM$ , 由  $CM^2 = MN \cdot NB$ , 可证得  $\triangle CNM \sim \triangle BNC$ , 得  $\angle NCM = \angle NBC = 45^\circ$ , 再证  $\triangle NCD \sim \triangle NPC$ , 得  $\frac{CN}{PN} = \frac{CD}{PC}$ ,  $\angle DCN = \angle P$ , 再证  $\angle BCM = \angle DCN = \angle DCP = \angle P$ , 得  $CD = DP$ , 即可证得结论.

【小问 1 详解】

证明: 联结  $AC$ ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = CD = BC = AD$ ,  $AC \perp BD$ ,

$\therefore AF = CE$ ,

$\therefore \triangle BEC \cong \triangle DFA$  (HL),

$\therefore BE = FD$ ,  $\angle BCM = \angle DAN$ ,

$\therefore AE = CF$ ,

$\therefore$  四边形  $AECF$  是平行四边形,

$\therefore AF \parallel CE$ ,

$\therefore AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$ ,

$$\therefore \triangle CBM \cong \triangle ADN (\text{ASA}),$$

$$\therefore CM = AN,$$

$\therefore$  四边形  $AMCN$  是平行四边形

又  $\because AC \perp BD$ , 即  $AC \perp MN$ ,

$\therefore$  平行四边形  $AMCN$  是菱形;

【小问 2 详解】

证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,  $BD$  是对角线

$$\therefore \angle CDB = \angle CBD = 45^\circ, \quad \angle BCD = 90^\circ,$$

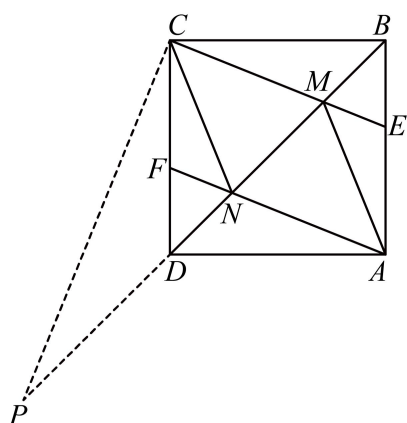
由 (1) 得四边形  $AMCN$  是菱形,

$$\therefore CM = CN, \text{ 则 } \angle CNM = \angle CMN,$$

$$\therefore \angle CND = \angle CMB,$$

$$\therefore \triangle CND \cong \triangle CMB,$$

$$\therefore \angle DCN = \angle BCM,$$



$$\therefore CM^2 = MN \cdot NB,$$

$$\therefore CN^2 = MN \cdot NB$$

$$\therefore \frac{CN}{MN} = \frac{NB}{CN},$$

$$\therefore \angle CNM = \angle BNC,$$

$$\therefore \triangle CNM \sim \triangle BNC,$$

$$\therefore \angle NCM = \angle NBC = 45^\circ,$$

$$\therefore CP \perp CE, \text{ 则 } \angle PCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCN = \angle CDN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CND = \angle PNC,$$

$$\therefore \triangle NCD \sim \triangle NPC,$$

$$\therefore \frac{CN}{PN} = \frac{CD}{PC}, \quad \angle DCN = \angle P,$$

$$\therefore \angle BCM + \angle DCM = \angle DCM + \angle DCP = 90^\circ, \quad \angle DCN = \angle BCM,$$

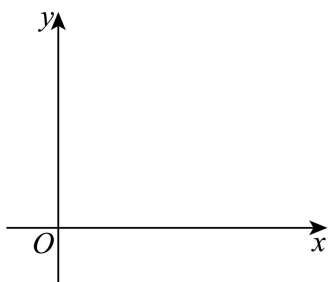
$$\therefore \angle BCM = \angle DCN = \angle DCP = \angle P,$$

$$\therefore CD = DP,$$

$$\therefore \frac{CN}{PN} = \frac{DP}{PC}.$$

【点睛】 本题考查正方形的性质，全等三角形的判定及性质，菱形的判定及性质，相似三角形的判定及性质，熟练掌握相关图形的性质是解决问题的关键.

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中 (如图), 顶点为  $A(6,6)$  的抛物线  $C_1$  经过原点, 直线  $y=6$  交  $y$  轴于点  $B$ .



(1) 求抛物线  $C_1$  的表达式;

(2) 将抛物线  $C_1$  先向右平移  $m(m > 0)$  个单位, 再向下平移  $n(n > 0)$  个单位, 使得新抛物线  $C_2$  的顶点  $D$  恰好落在抛物线  $C_1$  上. 抛物线  $C_2$  的对称轴交直线  $AB$  于点  $E$ . 连接  $BD$ .

①连接  $AD$ , 当线段  $BD$  的中垂线经过点  $A$  时, 求  $\sin \angle DAE$  的值;

②线段  $BD$  交抛物线  $C_1$  的对称轴于点  $F$ , 当  $\triangle ADF$  与  $\triangle ADB$  相似时, 求代数式  $m^3 - 36m$  的值.

【答案】 (1)  $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$

(2) ①  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ; ② 216

【解析】

【分析】 (1) 设抛物线  $C_1$  的表达式为  $y = a(x-6)^2 + 6$ , 然后把  $(0,0)$  代入求解即可;

(2) ①根据平移求出  $D(6+m, 6-n)$ , 代入  $C_1$  并化简得  $n = \frac{1}{6}m^2$ , 根据线段垂直平分线的性质得出

$AB = AD = 6$ ，由两点间距离公式求出  $m^2 + n^2 = 36$ ，联立方程组并化简得  $n^2 + 6n = 36$ ，解方程求出  $n$  的值，最后根据正弦的定义求解即可；

②过  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ ，则  $AF \parallel DE$ ，则  $BE = 6 + m$ ， $DE = n$ ， $AE = m$ ， $\angle DAF = \angle ADE$ ，由题知： $\triangle AFD \sim \triangle BAD$ ，则  $\angle FAD = \angle ABD = \angle ADE$ ，根据等角的正切值相等可得出  $\frac{AE}{DE} = \frac{ED}{BE}$ ，则  $n^2 = m(m + 6)$ ，

结合①中  $n = \frac{1}{6}m^2$ ，可得  $\left(\frac{1}{6}m^2\right)^2 = m(m + 6)$ ，然后化简即可。

#### 【小问 1 详解】

解：已知抛物线顶点为  $A(6, 6)$ ，

设抛物线  $C_1$  的表达式为  $y = a(x - 6)^2 + 6$ ，

因为抛物线经过原点  $(0, 0)$ ，

$$0 = a(0 - 6)^2 + 6,$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{6},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的表达式为 } y = -\frac{1}{6}(x - 6)^2 + 6 = -\frac{1}{6}x^2 + 2x;$$

#### 【小问 2 详解】

解：①抛物线  $C_1$  向右平移  $m(m > 0)$  个单位，再向下平移  $n(n > 0)$  个单位后新抛物线  $C_2$  顶点

$$D(6 + m, 6 - n),$$

因为  $D$  在  $C_1$  上，

$$\text{把 } D \text{ 坐标代入 } C_1, \text{ 得 } 6 - n = -\frac{1}{6}m^2 + 6,$$

$$\therefore n = \frac{1}{6}m^2,$$

$\therefore$  直线  $AB$ ：  $y = 6$  交  $y$  轴于点  $B$ ，

$$\therefore B(0, 6),$$

$$\text{又 } A(6, 6), D(6 + m, 6 - n),$$

$$\therefore AD^2 = m^2 + n^2, BD^2 = (6 + m)^2 + n^2, AB = 6,$$

$\therefore$  线段  $BD$  的中垂线经过点  $A$ ，

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 + n^2 = 36 \\ n = \frac{1}{6}m^2 \end{cases},$$

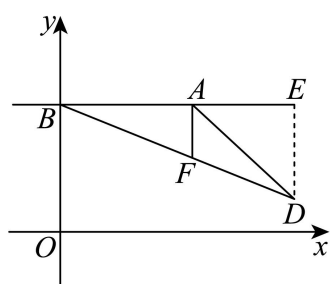
$$\therefore n^2 + 6n = 36,$$

$$\therefore n = 3\sqrt{5} - 3 \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore \sin \angle DAE = \frac{n}{6} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

②抛物线  $C_1$  对称轴为  $x = 6$ ,

设  $F(6, y_F)$ , 由  $B(0, 6)$ ,  $D(6+m, 6-n)$ ,



过  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ , 则  $AF \parallel DE$

$$\therefore BE = 6 + m, \quad DE = n, \quad AE = m, \quad \angle DAF = \angle ADE,$$

由题知:  $\triangle AFD \sim \triangle BAD$ ,

$$\therefore \angle FAD = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABD,$$

$$\therefore \tan \angle ADE = \tan \angle ABD,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{ED}{BE},$$

$$\therefore n^2 = m(m+6),$$

$$\text{由①知: } n = \frac{1}{6}m^2,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{6}m^2\right)^2 = m(m+6),$$

$$\text{化简, 得 } m^4 - 36m^2 = 216m,$$

$$\text{又 } m > 0$$

$$\therefore m^3 - 36m = 216.$$

【点睛】是二次函数的综合题, 考查了待定系数法求解析式、二次函数图象的平移、相似三角形的判定与

性质，解直角三角形等知识，掌握平移变换后点以及抛物线变化的规律是解题的关键.

25. 如图 1,  $AB$  和  $CD$  是半径为 2 的  $\odot O$  的两条直径, 点  $P$  是  $BA$  延长线上的一点. 连接  $PC$  交  $\odot O$  于点  $E$  (点  $E$  在线段  $PC$  上, 且不与点  $P$ 、点  $C$  重合).

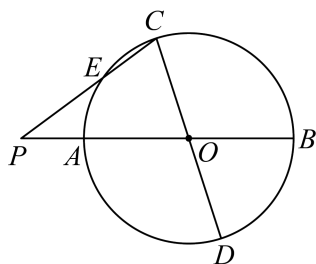


图1

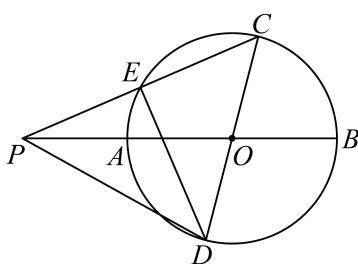
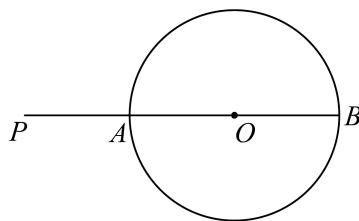


图2



备用图

(1) 当  $PC = PO$  时, 求证:  $CO^2 = CE \cdot CP$ ;

(2) 连接  $DE$ , 交半径  $OA$  于点  $M$ , 已知  $PA = 2$ .

①连接  $PD$ , 如图 2, 当点  $M$  是  $\triangle PCD$  的重心时, 求  $\angle BOC$  的余弦值;

②连接  $BD$ 、 $BE$ , 当  $BDE$  为等腰三角形时, 求线段  $PE$  的长.

**【答案】** (1) 见解析 (2) ①  $\frac{1}{4}$ ; ②  $\sqrt{6}$  或  $2\sqrt{2}$

**【解析】**

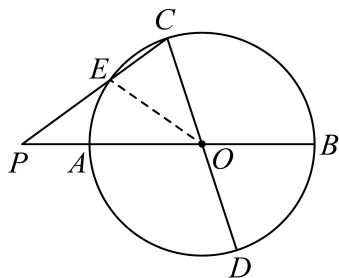
**【分析】** (1) 连接  $OE$ , 根据等腰三角形的性质可得  $\angle OEC = \angle OCE = \angle POC$ , 进而可得  $\triangle POC \sim \triangle OCE$ , 根据相似三角形的性质即可得解;

(2) ①过  $P$  作  $PH \perp OD$  于  $H$ , 根据直径对直角可得  $\angle DEC = 90^\circ$ , 根据等腰三角形的性质可得  $OH = \frac{1}{2}OD = 1$ , 再根据余弦的定义即可得解;

②分三种情况讨论, 当  $BD = BE$  时, 不符合题意; 当  $ED = BE$  时, 连接  $EO$ ,  $EA$ , 证明  $\triangle PEA \sim \triangle POE$ , 即可得解; 当  $DE = DB$  时, 连接  $EA$ , 设  $CD$  与  $BE$  交于  $G$ , 先证明  $AE$  是  $\triangle POC$  的中位线,  $OG$  是  $\triangle BAE$  的中位线, 可得  $EA = \frac{1}{2}CO = 1$ ,  $OG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}$ , 再根据勾股定理即可得解.

**【小问 1 详解】**

解: 连接  $OE$ ,

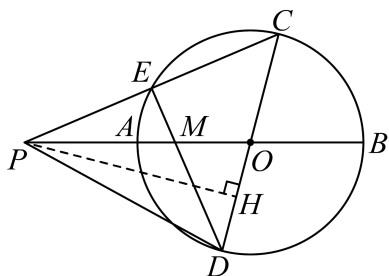


$\therefore EO = CO$ ,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle OEC = \angle OCE, \\
&\because PC = PO, \\
&\therefore \angle PCO = \angle POC, \\
&\therefore \angle OEC = \angle OCE = \angle POC, \\
&\because \angle C = \angle C, \\
&\therefore \triangle POC \sim \triangle OEC, \\
&\therefore \frac{OC}{CE} = \frac{PC}{OC}, \\
&\therefore CO^2 = CE \cdot CP;
\end{aligned}$$

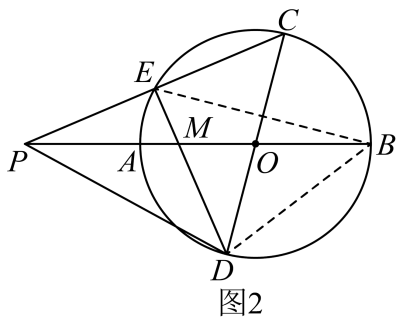
【小问2 详解】

解：①过  $P$  作  $PH \perp OD$  于  $H$ ,



$$\begin{aligned}
&\because CD \text{ 是直径}, \\
&\therefore \angle DEC = 90^\circ, \\
&\therefore DE \perp PC, \\
&\because \text{点 } M \text{ 是 } \triangle PCD \text{ 的重心}, \\
&\therefore PE = CE, \\
&\therefore PD = DC = 4, \\
&\because PA = 2, \text{ 半径为 } 2, \\
&\therefore PO = 4, \\
&\therefore PO = PD, \\
&\because PH \perp OD \\
&\therefore OH = \frac{1}{2}OD = 1, \\
&\therefore \cos \angle BOC = \cos \angle POH = \frac{OH}{PO} = \frac{1}{4};
\end{aligned}$$

②当  $BD = BE$  时, 如图,



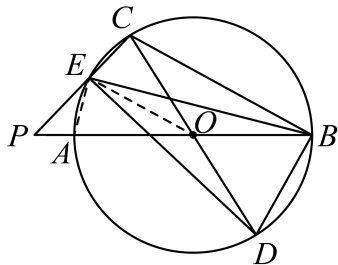
$$\because BD = BE,$$

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{BE},$$

$$\therefore OM \perp DE,$$

由 (1) 知  $DE \perp PC$ , 不符合题意;

当  $ED = BE$  时, 连接  $EO$ ,  $EA$ ,



$\because AB$  和  $CD$  是  $\odot O$  的两条直径,

$$\therefore \angle BEA = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\because ED = BE,$$

$$\therefore \widehat{ED} = \widehat{BE},$$

$$\therefore OD \perp BD,$$

$$\therefore \angle BEO = \angle DEO,$$

$$\because OE = OB,$$

$$\therefore \angle EBO = \angle BEO = \angle DEO,$$

$$\therefore \angle EOP = \angle DEB = 2\angle DEO,$$

$$\because \angle PEA + \angle AED = \angle BED + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEA = \angle BED,$$

$$\therefore \angle EOP = \angle DEB,$$

$$\because \angle P = \angle P,$$

$$\therefore \triangle PEA \sim \triangle POE,$$

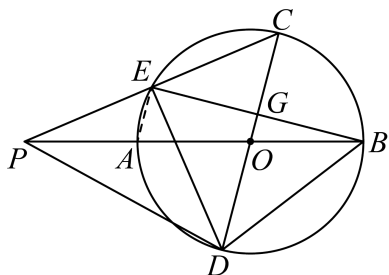
$$\therefore \frac{EP}{OP} = \frac{AP}{PE},$$

$$\therefore PE^2 = AP \cdot OP,$$

$$\therefore PE^2 = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore PE = 2\sqrt{2},$$

当  $DE = DB$  时, 连接  $EA$ , 设  $CD$  与  $BE$  交于  $G$ ,



$$\because DE = DB,$$

$$\therefore \widehat{ED} = \widehat{DB},$$

$$\therefore CD \perp BE, \quad BG = EG,$$

$$\because AB \text{ 是直径,}$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BE,$$

$$\therefore EA \parallel CO,$$

$$\therefore \frac{PE}{CE} = \frac{PA}{AO},$$

$$\because PA = AO,$$

$$\therefore PE = EC,$$

$$\therefore AE \text{ 是 } \triangle POC \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore EA = \frac{1}{2}CO = 1,$$

$$\because OA = OB, BG = EG,$$

$$\therefore OG \text{ 是 } \triangle BAE \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore OG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CG = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - EA^2} = \sqrt{15},$$

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BE = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$\therefore PE = EC = \sqrt{CG^2 + EG^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{6},$$

综上所述，线段  $PE$  的长  $\sqrt{6}$  或  $2\sqrt{2}$  .

**【点睛】** 本题考查了圆综合，勾股定理，三角函数，中位线，等腰三角形的性质，相似三角形的性质和判定等知识点，解题的关键是综合运用以上知识点，运用分类讨论思想；