

松江区 2025 学年初三总复习阶段模拟练习

数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

学生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题: 没有特殊说明, 几何题均视为在同一个平面内研究问题.
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^3 - a^2 = a$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ C. $\sqrt{a^2} = a$ D. $\sqrt[3]{a^3} = a$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查整式运算、同底数幂乘法、二次根式与立方根的性质, 根据对应运算法则和性质逐一判断即可.

【详解】 解: A、 a^3 与 a^2 不是同类项, 不能合并, 该选项不符合题意;

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5 \neq a^6$, 该选项不符合题意;

C、 $\sqrt{a^2} = |a| \neq a$, 该选项不符合题意;

D、 $\sqrt[3]{a^3} = a$, 该选项符合题意.

2. 下列关于 x 的方程中, 不论 a 取什么实数值, 一定有实数根的是 ()

- A. $ax^2 + x + 1 = 0$ B. $x^2 + ax - 1 = 0$
C. $x^2 + ax + 1 = 0$ D. $x^2 + x - a = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】 利用 $\Delta = b^2 - 4ac$ 判断方程是否对任意实数 a 恒有实数根, 若 $\Delta \geq 0$ 对任意 a 恒成立, 则符合要求.

【详解】 解: A、对于方程 $ax^2 + x + 1 = 0$, 当 $a = 0$ 时, 方程为 $x + 1 = 0$, 有实数根 $x = -1$; 当 $a \neq 0$ 时,

$\Delta = 1^2 - 4a = 1 - 4a$, Δ 不一定恒大于等于 0, 故方程不一定有实数根, 故 A 不符合题意;

B、对于方程 $x^2 + ax - 1 = 0$, $\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times (-1) = a^2 + 4$, 而对任意实数 a , 都有 $a^2 \geq 0$, 故

$\Delta = a^2 + 4 > 0$ 恒成立, 不论 a 取何实数值, 方程都有实数根, 故 B 符合题意;

C、对于方程 $x^2 + ax + 1 = 0$, $\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times 1 = a^2 - 4$, Δ 不一定恒大于等于 0, 故方程不一定有实数根, 故 C 不符合题意;

D、对于方程 $x^2 + x - a = 0$, $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-a) = 1 + 4a$, Δ 不一定恒大于等于 0, 故方程不一定有实数根, 故 D 不符合题意.

3. 下列函数中, y 是 x 的反比例函数的是 ()

A. $y = x^2$

B. $y = \frac{1}{x+2}$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = \frac{x}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题根据反比例函数的定义, 逐一判断各选项即可得出结论.

【详解】解: A、 $y = x^2$ 是二次函数, 不符合反比例函数定义, 该选项不符合题意;

B、 $y = \frac{1}{x+2}$ 的分母不是 x 的单项式, 不符合反比例函数定义, 该选项不符合题意;

C、 $y = \frac{2}{x}$, 符合反比例函数定义, 该选项符合题意;

D、 $y = \frac{x}{2}$ 是正比例函数, 不符合反比例函数定义, 该选项不符合题意.

4. 已知数据: $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数是 m , 方差是 n , 那么数据 $x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_n + 2$ 的平均数和方差分别是 ()

A. m, n

B. $m, n+2$

C. $m+2, n$

D. $m+2, n+2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据方差和平均数的计算公式求解即可.

【详解】解: $\because x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数是 m , 方差是 n ,

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = m, \text{ 即 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = mn, \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n} = n,$$

那么数据 $x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_n + 2$ 的平均数为:

$$\frac{(x_1+2)+(x_2+2)+\dots+(x_n+2)}{n} = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)+2n}{n} = \frac{mn+2n}{n} = m+2;$$

$$\text{方差为: } \frac{[x_1+2-(m+2)]^2 + [x_2+2-(m+2)]^2 + \dots + [x_n+2-(m+2)]^2}{n}$$

$$= \frac{(x_1-m)^2 + (x_2-m)^2 + \dots + (x_n-m)^2}{n}$$

$$= n.$$

5. 已知命题: ①垂直于弦的直径平分这条弦; ②平分弦的直径垂直于这条弦, 下列对这两个命题的判断, 正确的是 ()

A. ①是真命题, ②是假命题

B. ①是假命题, ②是真命题

C. ①和②都是真命题

D. ①和②都是假命题

【答案】A

【解析】

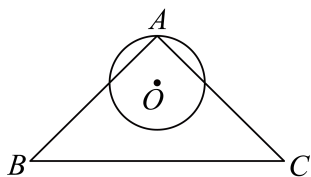
【分析】根据垂径定理及其推论求解即可.

【详解】解: 根据垂径定理, 垂直于弦的直径平分这条弦, 因此命题①是真命题;

对于命题②, 当被平分的弦是直径时, 任意两条直径互相平分, 但不一定垂直, 该命题缺少“被平分的弦不是直径”的条件, 因此命题②是假命题,

综上, ①是真命题, ②是假命题.

6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 3\sqrt{2}$, 半径为 1 的 $\odot O$ 经过点 A , 且在边 AB 、 AC 上截得的弦长相等, 点 P 在边 BC 上, 如果以 PB 为半径的 $\odot P$ 与 $\odot O$ 相交, 那么 PB 的长可能是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

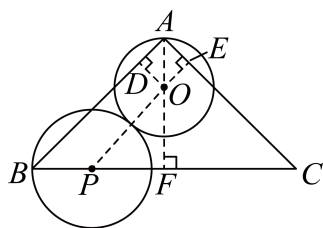
【解析】

【分析】过点 O 分别作 $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, 垂足为点 D, E , 延长 AO 交 BC 于点 F , 则 $OD = OE$, 那么 AO 平分 $\angle BAC$, 再由等腰三角形的性质得到 $AF \perp BC$, $BF = CF = \frac{1}{2}BC$, 而由勾股定理可得

$BC = \sqrt{2}AB = 6$, 那么 $BF = CF = AF = 3$, 再找到外切和内切时的临界位置, 根据勾股定理建立方程求

解即可得到 PB 的取值范围.

【详解】解：过点 O 分别作 $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ，垂足为点 D, E ，延长 AO 交 BC 于点 F ，



$\because \odot O$ 在边 AB 、 AC 上截得的弦长相等，

$\therefore OD = OE$ ，

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$

$\because AB = AC$

$\therefore AF \perp BC, BF = CF = \frac{1}{2}BC$ ，

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 3\sqrt{2}$

$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 6$ ，

$\therefore BF = CF = AF = 3$ ，

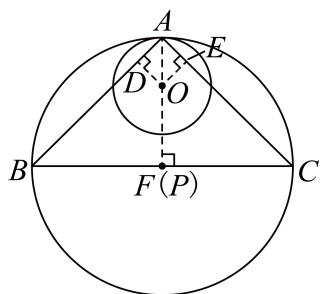
当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 外切时，连接 OP ，设 $BP = x$ ，则 $OP = 1 + x$ ， $FP = 3 - x$ ， $OF = 3 - 1 = 2$

在 $\text{Rt}\triangle OPF$ 中，由勾股定理得， $OF^2 + PF^2 = OP^2$

$$\therefore 2^2 + (3 - x)^2 = (x + 1)^2$$

解得 $x = \frac{3}{2}$ ；

当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 内切时，连接 OP ，



设 $BP = x$ ，则 $OP = x - 1$ ， $FP = x - 3$ ， $OF = 3 - 1 = 2$

在 $\text{Rt}\triangle OPF$ 中，由勾股定理得， $OF^2 + PF^2 = OP^2$

$$\therefore 2^2 + (x - 3)^2 = (x - 1)^2$$

解得 $x = 3$ ；

$\therefore \odot P$ 与 $\odot O$ 相交时, $\frac{3}{2} < x < 3$,

$\therefore B$ 符合题意.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 不等式组 $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ 4x < 3x+2 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-1 \leq x < 2$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式组的解法. 分别求出每一个不等式的解集, 根据解集确定口诀: 同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小无解, 确定不等式组的公共解集即可.

【详解】 解: 解不等式 $2x+2 \geq 0$, 移项得 $2x \geq -2$, 系数化为 1 得: $x \geq -1$,

解不等式 $4x < 3x+2$, 移项合并同类项得: $x < 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 \leq x < 2$.

8. 分解因式: $x^2 - 2xy + y^2 - 1 =$ _____.

【答案】 $(x-y+1)(x-y-1)$

【解析】

【详解】 解: $x^2 - 2xy + y^2 - 1$

$$= (x^2 - 2xy + y^2) - 1$$

$$= (x-y)^2 - 1^2$$

$$= (x-y+1)(x-y-1).$$

9. 函数 $y = \frac{1}{2x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 由于函数解析式是分式, 则要求分母不为零, 则可求得自变量的取值范围即函数的定义域.

【详解】 解: 根据题意得: $2x-1 \neq 0$,

解得: $x \neq \frac{1}{2}$.

故答案为: $x \neq \frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了求函数自变量的取值范围, 初中求自变量取值范围的常常是三类函数: 解析式是整式

时，自变量的取值范围是全体实数；解析式是分式时，分母不为零；解析式是二次根式时，被开方数非负.

10. 统计数据显示，截至 2026 年 3 月 30 日，电影《飞驰人生 3》的票房总收入约为 44 亿元. 如果该电影的平均票价是每张 40 元，那么售出的电影票大约_____张. (用科学记数法表示)

【答案】 1.1×10^8

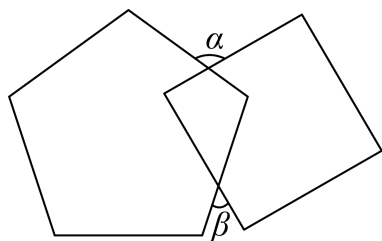
【解析】

【分析】 先将总票房统一单位为元，再根据售票张数等于总票房除以平均票价计算结果，最后将结果用科学记数法表示即可.

【详解】 解： 44 亿元 = 4400000 000 元 = 4.4×10^9 元，

根据题意计算售出电影票的张数： $\frac{4.4 \times 10^9}{40} = 1.1 \times 10^8$.

11. 如图，正五边形与正方形的两邻边相交，如果 $\angle \alpha = 110^\circ$ ，那么 $\angle \beta =$ _____ $^\circ$.

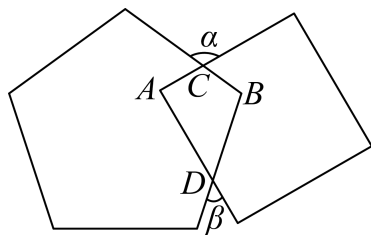


【答案】 52

【解析】

【分析】 先根据正多边形每个内角为 $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ 得到正五边形和正方形每个内角的度数，再结合四边形的内角和以及对顶角的性质可得答案.

【详解】 解： 如图，



根据题意得， $\angle A = \frac{180^\circ \times (4-2)}{4} = 90^\circ$ ， $\angle B = \frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB + \angle ACB + \angle A + \angle B = 360^\circ$ ， $\angle ACB = \angle \alpha = 110^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 110^\circ - 90^\circ - 108^\circ = 52^\circ$.

$$\therefore \angle \beta = \angle ADB = 52^\circ.$$

12. 现有三张卡片，上面分别写着 2、3、6，随机选择其中的两张，较大数能被较小数整除的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

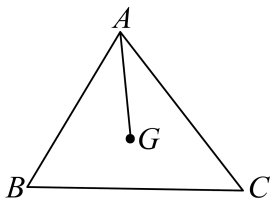
【分析】先列举出随机抽取两张卡片所有等可能的结果，再找出其中满足较大数能被较小数整除的结果个数，最后根据概率公式计算即可.

【详解】解：根据题意，从写有 2，3，6 的三张卡片中随机抽取两张，所有等可能的结果为：(2,3)，(2,6)，(3,6)，共 3 种等可能的结果，

其中较大数能被较小数整除的结果有：(2,6)，(3,6)，共 2 种，

根据概率公式，可得所求概率为 $\frac{2}{3}$.

13. 如图，已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AG} =$ _____. (结果含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

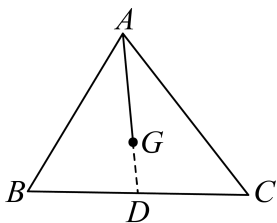


【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】延长 AG 交 BC 于点 D ，先求出 $\overrightarrow{BD}$ ，再利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AD}$ ，然后利用三角形重心的性质求解即可.

【详解】解：延长 AG 交 BC 于点 D ，



$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \vec{b},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b},$$

$\therefore$ 点 G 是 ABC 的重心,

$$\therefore AG = 2GD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b},$$

14. 小明准备去距离学校 10 千米的博物馆, 已知汽车的速度比骑自行车的速度快 30 千米/小时, 乘汽车去比骑自行车去可以早 $\frac{3}{4}$ 小时到达. 设骑自行车的速度为 x 千米/小时, 可列方程为_____.

【答案】 $\frac{10}{x} - \frac{10}{x+30} = \frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 设骑自行车的速度为 x 千米/小时, 则汽车的速度为 $(x+30)$ 千米/小时, 根据时间 = 路程 $\div$ 速度, 分别表示出骑自行车和乘汽车所需的时间, 再根据乘汽车比骑自行车早到 $\frac{3}{4}$ 小时列出方程即可.

【详解】 解: 设骑自行车的速度为 x 千米/小时.

$\therefore$ 汽车的速度比骑自行车的速度快 30 千米/小时,

$\therefore$ 汽车的速度为 $(x+30)$ 千米/小时.

$\therefore$ 路程为 10 千米,

$\therefore$ 骑自行车所需时间为 $\frac{10}{x}$ 小时, 乘汽车所需时间为 $\frac{10}{x+30}$ 小时.

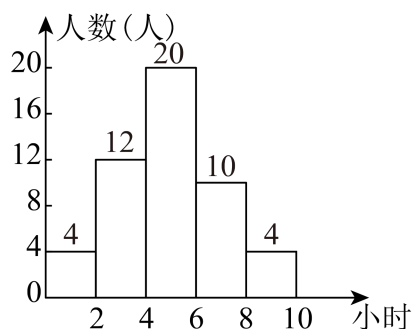
根据题意, 乘汽车去比骑自行车去可以早 $\frac{3}{4}$ 小时到达,

即骑自行车的时间减去乘汽车的时间等于 $\frac{3}{4}$ 小时,

$$\therefore \text{可列方程为 } \frac{10}{x} - \frac{10}{x+30} = \frac{3}{4}.$$

15. 为了解某年级学生每周课外阅读时长, 随机抽取部分学生进行调查, 并绘制了如图所示的频数分布直方图 (每组数据含最小值, 不含最大值). 如果该年级有 600 名学生, 估计该年级平均每周阅读时长不少于 6 小时的学生约有_____名.

每周课外阅读时长频数分布直方图



【答案】

168

【解析】

【分析】先求出样本中平均每周阅读时长不少于6小时的学生的频率，再用年级总人数乘以对应频率得到估计结果.

【详解】解：由频数分布直方图可得，抽取的样本容量为： $4+12+20+10+4=50$

样本中平均每周阅读时长不少于6小时的学生频数为： $10+4=14$ （人）

样本中对应频率为： $\frac{14}{50} = \frac{7}{25}$

因此估计该年级符合条件的学生人数为： $600 \times \frac{7}{25} = 168$ （人）.

16. 一个水池的容积是 90m^3 ，水池内蓄有一定量的水，现在保持一定的速度向水池中蓄水，1小时后水池的水量是 15m^3 ，5小时后水池的水量是 35m^3 ，那么8小时后水池的水量是_____ m^3 .

【答案】50

【解析】

【分析】设水池内原有的水量为 x ，则1小时注入水量为 $(15-x)$ ，根据题意列方程求出 $x=10$ ，再计算8小时后水池的水量即可.

【详解】解：设水池内原有的水量为 x ，则1小时注入水量为 $(15-x)$ ，

$$5(15-x) + x = 35$$

解得 $x=10$ ，

$$8\text{小时后水池的水量是 } 8 \times (15-10) + 10 = 50 (\text{m}^3).$$

17. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，点 P 、 Q 分别在边 AB 、 BC 上，如果 $\triangle ACP$ 是以 AP 为腰的等腰三角形，且 $CP \perp PQ$ ，那么 PQ 的长是_____.

【答案】 $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

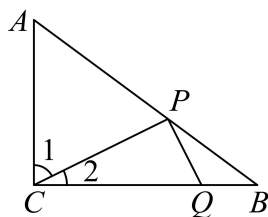
【解析】

【分析】先由勾股定理求出 AB 的长度，根据 $\triangle ACP$ 是以 AP 为腰的等腰三角形，分 $AP = AC$ 和 $AP = PC$ 两种情况讨论，利用相似三角形的判定与性质以及解直角三角形进行求解即可.

【详解】解：在 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore \text{由勾股定理得：} AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

当 $PA = PC$ 时，



$$\therefore \angle A = \angle 1,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle 2,$$

$$\therefore PC = PB,$$

$$\therefore PA = PB = PC = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\therefore \angle B = \angle 2,$$

$$\therefore \tan \angle 2 = \tan \angle B,$$

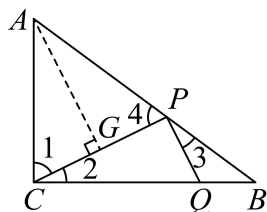
$$\therefore CP \perp PQ$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{PQ}{PC}$$

$$\therefore \frac{6}{8} = \frac{PQ}{5}$$

$$\therefore PQ = \frac{15}{4};$$

当 $AP = AC = 6$ 时，则 $BP = AB - AP = 4$ ，过点 A $AG \perp CP$ 于点 G ，



$$\therefore \angle 1 = \angle 4$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, CP \perp PQ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\because \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle BPQ \sim \triangle BCP,$$

$$\therefore \frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{BP} = \frac{PQ}{CP},$$

$$\therefore BP^2 = BQ \times BC, \text{ 即 } 4^2 = 8BQ$$

$$\text{解得 } BQ = 2,$$

$$\therefore CQ = 8 - 2 = 6, \quad \frac{2}{4} = \frac{PQ}{CP} = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } PQ = x, CP = 2x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CPQ \text{ 中, 由勾股定理得, } x^2 + (2x)^2 = 6^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ (舍负),}$$

$$\therefore PQ = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{综上所述, } PQ \text{ 的长为 } \frac{15}{4} \text{ 或 } \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

18. 联结抛物线上任意两点的线段叫做抛物线的弦. 如果抛物线的一条弦 AB 与抛物线的对称轴垂直, 垂足为点 C , 抛物线的顶点为 D , 当 $AB = 4CD$ 时, AB 的长称为这条抛物线的特征值. 我们知道, 平移不改变抛物线的特征值, 那么抛物线 $y = 3x^2 - 2x + 1$ 的特征值是_____.

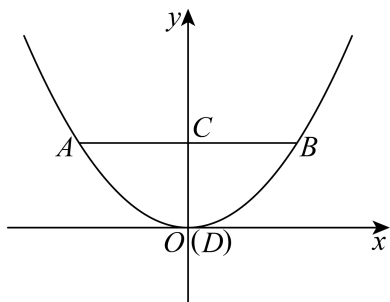
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 由于平移不改变抛物线的特征值, 抛物线 $y = 3x^2 - 2x + 1$ 的特征值是即为抛物线 $y = 3x^2$ 的特征值, 据此画出图象结合新定义求解即可.

【详解】 解: $\because$ 平移不改变抛物线的特征值,

∴ 抛物线 $y = 3x^2 - 2x + 1$ 的特征值即为抛物线 $y = 3x^2$ 的特征值，如图：



此时抛物线 $y = 3x^2$ 的对称轴为 y 轴，

$$\therefore AB = 4CD, \quad AB \perp y \text{ 轴}$$

$$\therefore AB = 2BC = 4CD, \quad \text{即 } BC = 2CD$$

$$\text{设 } BC = m, \quad \text{则 } CD = \frac{1}{2}m,$$

$$\therefore B\left(m, \frac{1}{2}m\right),$$

$$\text{将点 } B\left(m, \frac{1}{2}m\right) \text{ 代入 } y = 3x^2, \quad \text{则 } 3m^2 = \frac{1}{2}m,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{6} \text{ 或 } m = 0 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore AB = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } 8^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2} - 1)^{-1} - |1 - \sqrt{2}| - \sqrt{18}.$$

【答案】 $4 - 3\sqrt{2}$

【解析】

$$\text{【详解】 解: } 8^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2} - 1)^{-1} - |1 - \sqrt{2}| - \sqrt{18}$$

$$= 2 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - (\sqrt{2} - 1) - 3\sqrt{2}$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} - \sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2}$$

$$= 4 - 3\sqrt{2}.$$

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x-y=3 \text{ ①} \\ x^2-xy-6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

【解析】

【详解】解: 由②得, $(x-3y)(x+2y)=0$,

$\therefore x-3y=0$ 或 $x+2y=0$,

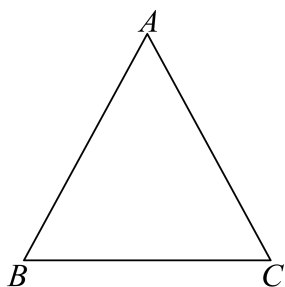
$\therefore$ 原方程组可化为 $\begin{cases} x-y=3 \\ x-3y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$,

解第一个方程组得 $\begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$;

解第二个方程组得 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2\sqrt{5}$, $\tan B=2$.



(1) 试用无刻度直尺和圆规, 在直线 BC 上作出点 D , 使 $\triangle DAC \sim \triangle ABC$, 点 D 、 A 、 C 的对应点分别是点 A 、 B 、 C . (不必写作法, 保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的基础上, 求线段 BD 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $BD=1$

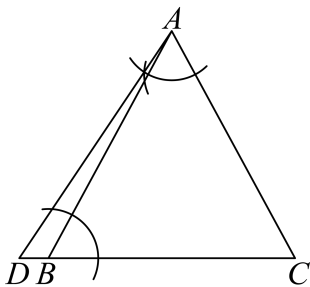
【解析】

【分析】(1) 以点 A 为顶点， AC 为一边，作 $\angle DAC = \angle ABC$ ，与 CB 延长线交于点 D ；

(2) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，根据等腰三角形三线合一得到 $BH = HC$ ，在 $Rt\triangle ABH$ 中，由 $\tan B = \frac{AH}{BH} = 2$ ，结合勾股定理列方程即可求得 BH 的长，再根据相似三角形的对应边成比例列式计算即可得到 DC 的长，最后根据线段和差关系即可得解。

【小问 1 详解】

解：如图所示，作 $\angle DAC = \angle ABC$ ，与 CB 延长线交于点 D ，即为所求；

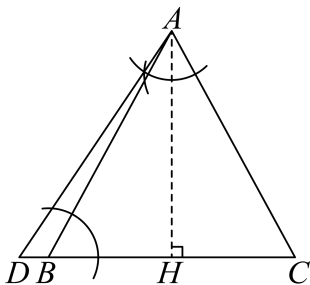


$\because \angle DAC = \angle ABC$ ， $\angle DCA = \angle ACB$ ，

$\therefore \triangle DAC \sim \triangle ABC$ ；

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，



$\because AB = AC$ ，

$\therefore BH = HC$ ，

设 $BH = HC = x$ ，

在 $Rt\triangle ABH$ 中， $\because \tan B = \frac{AH}{BH} = 2$ ，

$\therefore AH = 2BH = 2x$ ，

根据勾股定理得， $AH^2 + BH^2 = AB^2$ ，

即 $(2x)^2 + x^2 = (2\sqrt{5})^2$ ，

解得 $x = 2$ 或 $x = -2$ （负值，舍去），

即 $BH = HC = 2$,

$\therefore BC = BH + HC = 4$,

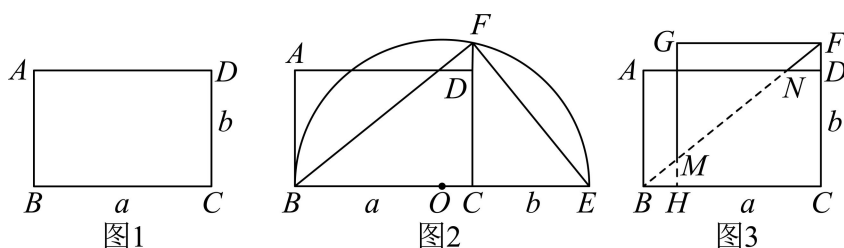
$\therefore \triangle DAC \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{DC}{2\sqrt{5}},$$

解得 $DC = 5$,

$\therefore BD = DC - BC = 5 - 4 = 1$.

22. 【问题提出】把一个长、宽分别为 a 、 b ($b < a < 4b$) 的长方形 (如图 1), 剪拼成一个正方形 (拼接的时候无缝隙、不重叠, 裁剪的损耗忽略不计)



【方案设计】某学习小组提出以下设计思考:

(1) 根据剪拼前后图形面积不变, 可知剪拼后正方形的边长为_____。(用含 a 、 b 的代数式表示)

如图 2, 延长 BC 至点 E , 使 $CE = b$, 以 BE 为直径作半圆 O . 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 F , 联结 BF 、 EF , 可得 $\angle BFE = 90^\circ$ (后续说理如需用到这一结论, 可直接使用), 他们认为: “就是所求正方形的边长”;

如图 3, 以为边, 在左侧作正方形 $CFGH$, BF 分别与 GH 、 AD 交于点 M 、 N , 沿虚线 BN 、 HM 裁剪, $\triangle BHM$ 、 $\triangle ABN$ 可以通过适当的图形运动分别与 $\triangle NDF$ 、 $\triangle GMF$ 叠合, 拼成正方形 $CFGH$.

【论证说明】

(2) 如图 2, 该学习小组认为: “ CF 是所求正方形的边长”, 试说明理由;

【论证说明】

(3) $\triangle BHM$ 可以通过怎样的图形运动与 $\triangle NDF$ 叠合, 并说明它们能够叠合的理由.

【答案】(1) $\sqrt{ab}$

(2) 见解析 (3) $\triangle BHM$ 可以通过平移运动与 $\triangle NDF$ 叠合, 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据剪拼前后图形面积不变, 可知矩形和正方形的面积都是 ab , 即可求解边长;

(2) 过点 O 作 $OT \perp BF$, 先证明 $\angle EFB = 90^\circ$, 然后得到 $\angle 1 = \angle 2$, 则 $\tan \angle 1 = \tan \angle 2$, 据此求解即可;

(3) 先证明 $\triangle BHM \sim \triangle NDF$ ，再证明 $\triangle BHM \sim \triangle BCF$ ，求证 $HM = DF$ ，即可得到 $\triangle BHM \cong \triangle NDF$ 。

【小问 1 详解】

解：由题意得，矩形的面积为 ab ，

$\therefore$ 根据剪拼前后图形面积不变，

$\therefore$ 可知剪拼后正方形的边长为 $\sqrt{ab}$ ；

【小问 2 详解】

解：如图 2，过点 O 作 $OT \perp BF$ ，则 $\angle OTB = 90^\circ$

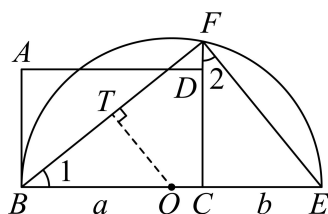


图2

$\because OT$ 经过圆心，

$\therefore TB = TF$

$\because BO = OE$

$\therefore OT \parallel EF$ ，

$\therefore \angle EFB = \angle OTD = 90^\circ$ ，

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $\angle DCB = 90^\circ$

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle BFC$ ，

$\therefore \tan \angle 1 = \tan \angle 2$

$$\therefore \frac{CF}{BC} = \frac{CE}{CF}$$

$$\therefore \frac{CF}{a} = \frac{b}{CF},$$

解得 $CF = \sqrt{ab}$ (舍负)，

$\therefore CF$ 是所求正方形的边长；

【小问 3 详解】

解： $\triangle BHM$ 可以通过平移运动与 $\triangle NDF$ 叠合，理由如下：

$\because$ 矩形 $ABCD$ ，正方形 $CFGH$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle C = \angle GHC = 90^\circ$ ， $CH = CF = \sqrt{ab}$ ， $GH \parallel CD$

$$\therefore \angle FND = \angle MBH, \quad \angle FDN = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FDN = \angle MHB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle BHM \sim \triangle NDF,$$

$$\therefore \frac{BH}{ND} = \frac{BM}{NF} = \frac{HM}{DF},$$

$$\therefore GH \parallel CD$$

$$\therefore \triangle BHM \sim \triangle BCF$$

$$\therefore \frac{BH}{BC} = \frac{HM}{CF}$$

$$\therefore \frac{a - \sqrt{ab}}{a} = \frac{HM}{\sqrt{ab}}$$

$$\text{解得 } HM = \sqrt{ab} - b,$$

$$\therefore DF = CF - CD = \sqrt{ab} - b$$

$$\therefore DF = HM,$$

$$\therefore \frac{BH}{ND} = \frac{BM}{NF} = \frac{HM}{DF} = 1,$$

$$\therefore BH = ND, BM = NF$$

$$\therefore \triangle BHM \cong \triangle NDF \text{ (SSS)}$$

$\therefore \triangle BHM$ 可以通过平移运动与 $\triangle NDF$ 叠合.

23. 已知 AB 是半圆 O 的直径, 弦 AC 、 BD 交于点 E , OC 与 BD 交于点 F , 满足 $\frac{DE}{BE} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$.

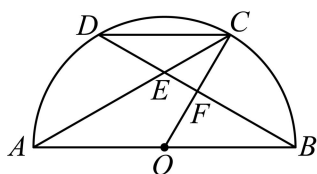


图1

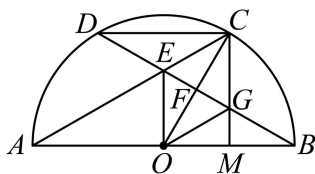


图2

(1) 求证: $OC \perp BD$;

(2) 如图 2, M 是 OB 的中点, CM 与 BD 交于点 G , 求证: 四边形 $CEOG$ 是菱形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle CED \sim \triangle AEB$, 得到 $CD = BO$, 继而可证明 $\triangle CFD \cong \triangle OFB$ (AAS), 再由垂径定理的推论即可证明;

(2) 先证明 $\triangle EAO \sim \triangle CAM$ ，则 $\angle AEO = \angle ACM$ ，故 $OE \parallel CM$ ，那么得到 $\frac{CF}{OF} = \frac{FG}{EF}$ ，由 (1) 知， $\triangle CFD \cong \triangle OFB$ ，则 $CF = OF$ ，那么 $FG = EF$ ，即可得到四边形 $CEOG$ 是平行四边形，再由对角线互相垂直即可证明菱形。

【小问 1 详解】

证明： $\because \frac{DE}{BE} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$ ， $\angle CED = \angle AEB$ ，

$\therefore \triangle CED \sim \triangle AEB$ ，

$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ ， $\angle D = \angle B$ ，

$\because AB$ 是半圆 O 的直径，

$\therefore \frac{BO}{AB} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{BO}{AB}$ ，

$\therefore CD = BO$ ，

$\because \angle D = \angle B$ ， $\angle CFD = \angle OFB$ ，

$\therefore \triangle CFD \cong \triangle OFB$ (AAS)，

$\therefore DF = BF$ ，

$\because OC$ 经过圆心，

$\therefore OC \perp BD$ ；

【小问 2 详解】

证明： $\because M$ 是 OB 的中点，

$\therefore \frac{OM}{OB} = \frac{1}{2}$ ，

$\because OA = OB$ ，

$\therefore \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2}$ ， 即 $\frac{AO}{AM} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AO}{AM}$ ，

$\therefore \angle EAO = \angle CAM$ ，

$\therefore \triangle EAO \sim \triangle CAM$ ，

$\therefore \angle AEO = \angle ACM$ ，

$$\therefore OE \parallel CM,$$

$$\therefore \frac{CF}{OF} = \frac{FG}{EF},$$

由 (1) 知, $\triangle CFD \cong \triangle OFB$,

$$\therefore CF = OF,$$

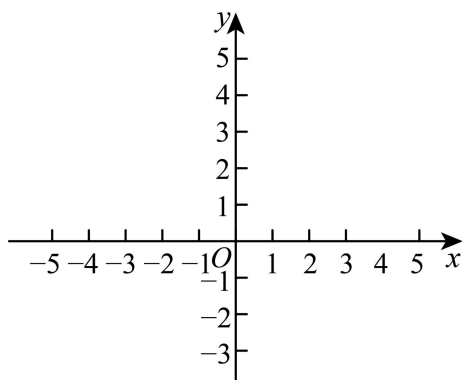
$$\therefore FG = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $CEOG$ 是平行四边形,

$\therefore OC \perp BD$, 即 $OC \perp EG$,

$\therefore$ 四边形 $CEOG$ 是菱形.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , C 是直线 AB 上一点 (不与点 A 重合), 且 $AB = BC$, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 经过 A 、 C 两点.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 D 在抛物线上, 且位于第一象限, 如果四边形 $OBCD$ 是梯形, 求梯形 $OBCD$ 的面积;

(3) 点 P 、 Q 都在第三象限, 其中点 P 在抛物线上, 点 Q 在抛物线的对称轴上, 如果 $\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似, 且边 PQ 与边 OB 对应, 求点 Q 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

(2) $4 + 2\sqrt{2}$

(3) $Q(-1, -1)$, $Q(-1, 8 - 2\sqrt{19})$

【解析】

【分析】 (1) 根据一次函数可知 A 、 B 的坐标, 进而根据 $AB = BC$ 可得点 B 是线段 AC 的中点, 然后根据待定系数法即可求得二次函数表达式;

(2) 根据 $OBCD$ 是梯形, 可知 OD 的直线解析式, 进而联立方程可知点 D 的坐标, 根据割补法即可求解;

(3) ①过点 A 作 $AG \perp GP$, 过点 Q 作 $QH \perp PH$, 进而可知 $\triangle GAP \sim \triangle HPQ$, 根据相似三角形的性质即可求解; ②过点 A 作 $AM \perp QM$ 交对称轴于 M , 过点 P 作 $PN \perp QN$ 交对称轴于 N , 证明 $\triangle NPQ \sim \triangle MQA$, 根据相似三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题可知, 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B ,

则点 $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$,

$\because C$ 是直线 AB 上一点, 且 $AB = BC$,

$\therefore$ 点 B 是线段 AC 的中点,

设点 $C(m, n)$,

$$\therefore \text{点 } B\left(\frac{m+(-4)}{2}, \frac{n+0}{2}\right),$$

$$\therefore m = 4, \quad n = 4,$$

$$\therefore \text{点 } C(4, 4),$$

将点 C , 点 A 代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$

$$\text{得} \begin{cases} 16a + 4b - 2 = 4 \\ 16a - 4b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

则抛物线的表达式为: $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$,

【小问 2 详解】

解: 由题可得图,

$\because$ 四边形 $OBCD$ 是梯形,

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$\because O$ 为原点,

则 OD 的直线解析式为: $y = \frac{1}{2}x$,

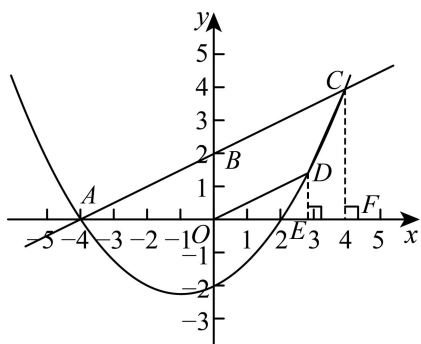
则联立函数得
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 D 在抛物线上, 且位于第一象限,

$\therefore D(2\sqrt{2}, \sqrt{2}),$

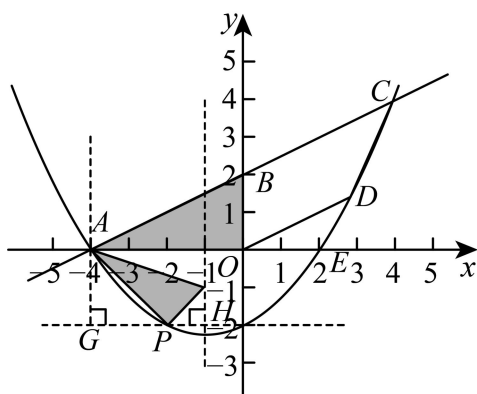
过点 D 作 $DE \perp x$ 轴, 过点 C 作 $CF \perp x$ 轴,



$$S_{\text{梯形}OBCD} = S_{\text{梯形}OBCF} - S_{\text{梯形}CDEF} - S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2}(2+4) \times 4 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}+4) \times (4-2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4+2\sqrt{2},$$

【小问3详解】

解: ①由题可得, 过点 A 作 $AG \perp GP$, 过点 Q 作 $QH \perp PH$



当 $\angle APQ = 90^\circ$, $\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似, 且边 PQ 与边 OB 对应

则
$$\frac{AP}{PQ} = \frac{AO}{OB} = \frac{4}{2} = 2,$$

抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2,$

$\therefore \angle AGP = \angle PHQ = 90^\circ,$

$$\therefore \angle GAP + \angle APG = 90^\circ, \angle APG + \angle HPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAP = \angle HPQ,$$

$$\therefore \triangle GAP \sim \triangle HPQ,$$

$$\therefore \frac{GA}{HP} = \frac{PG}{QH} = \frac{AP}{PQ} = 2$$

则抛物线的对称轴为: $x = -1$,

$$\text{设点 } Q(-1, h), \text{ 点 } P\left(k, \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right)$$

$$\therefore QH = h - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right), \quad HP = -1 - k, \quad GA = 0 - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right)$$

$$, \quad PG = k - (-4),$$

$$\text{则 } \frac{GA}{HP} = \frac{0 - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right)}{-1 - k} = 2, \quad \frac{PG}{QH} = \frac{k - (-4)}{h - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right)} = 2,$$

解得: $k = 8$ 或 $k = -2$,

$\therefore$ 点 P 、 Q 都在第三象限,

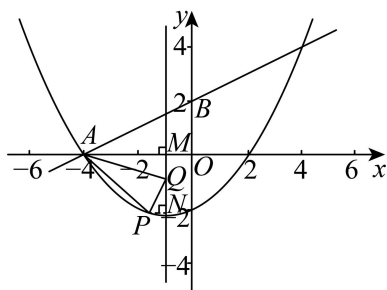
$$\therefore k = -2,$$

$$\therefore h = -1,$$

$$\therefore Q(-1, -1).$$

②由题可得, 抛物线的对称轴为 $x = -1$,

过点 A 作 $AM \perp QM$ 交对称轴于 M , 过点 P 作 $PN \perp QN$ 交对称轴于 N ,



当 $\angle AQP = 90^\circ$, $\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似, 且边 PQ 与边 OB 对应

$$\text{则 } \frac{AQ}{PQ} = \frac{AO}{OB} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\text{抛物线 } y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2,$$

$$\therefore \angle AMQ = \angle PNQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NPQ + \angle PQN = 90^\circ, \angle MQA + \angle PQN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NPQ = \angle MQA,$$

$$\therefore \triangle NPQ \sim \triangle MQA,$$

$$\therefore \frac{AM}{QN} = \frac{MQ}{PN} = \frac{AQ}{PQ} = 2$$

则抛物线的对称轴为: $x = -1$,

$$\text{设点 } Q(-1, h), P\left(k, \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right)$$

$$\therefore AM = 3, MQ = 0 - h,$$

$$QN = h - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right), PN = -1 - k.$$

$$\frac{AM}{QN} = \frac{3}{h - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - 2\right)} = 2$$

$$\frac{MQ}{PN} = \frac{0 - h}{-1 - k} = 2$$

解得: $h = 8 - 2\sqrt{19}$ 或 $h = 8 + 2\sqrt{19}$ (舍去),

$$\text{则 } \therefore Q(-1, 8 - 2\sqrt{19}).$$

综上所述, $Q(-1, -1)$, $Q(-1, 8 - 2\sqrt{19})$.

25. 已知正方形 $ABCD$, 点 E 在边 BC 上, 点 F 在 BC 的延长线上, AF 与 CD 交于点 G .

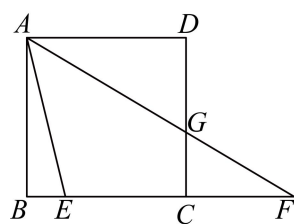


图1

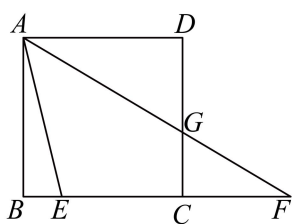
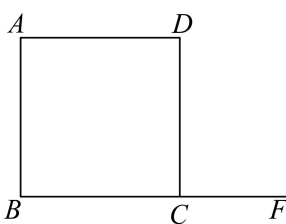


图2



备用图

- (1) 如图 1, 如果 $CE = CG$, 求证: $BC^2 = BE \cdot BF$;
- (2) 如图 2, 如果 $\angle EAF = 45^\circ$, 且 $CE = CF$, 求 $\angle F$ 的正切值;
- (3) 以点 C 为圆心 CE 为半径画圆, $\odot C$ 与以 AE 为直径的 $\odot O$ 的另一个交点记为点 P , 如果 $AB = 2$, $CF = 2CE$, $EP = CG$, 求 EF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) 2

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$ (SAS), 再证明 $\triangle BAE \sim \triangle BFA$, 即可求证;

(2) 连接 AC , 设正方形的边长为 1, $CE = CF = x$, 然后证明 $\triangle CEA \sim \triangle AEF$, 得到

$AE^2 = EC \times EF = x \cdot 2x = 2x^2$, 而由勾股定理得 $AE^2 = AB^2 + BE^2 = x^2 - 2x + 2$, 继而得到方程

$x^2 - 2x + 2 = 2x^2$, 然后解方程, 再利用正切的定义求解即可;

(3) 设以 AE 为直径的圆记为 $\odot J$, 连接 CJ 交 PE 于点 L , 过点 J 作 $JK \perp BC$ 于点 K , 由题意得可设 $CE = x$, 则 $CF = 2x$, 由 $\triangle FCG \sim \triangle FBA$, 得到 $EP = CG = \frac{2x}{x+1}$, 再由 $\triangle EJK \sim \triangle EAB$, 求出 $KJ = 1$,

$EK = 1 - \frac{1}{2}x$, 则 $KC = EK + CE = 1 + \frac{1}{2}x$, 可由勾股定理得到 $JC = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2}$, 由相交两圆得性质

可得 $CJ \perp PE$, $EL = \frac{1}{2}EP = \frac{x}{x+1}$, 再由 $\sin \angle ECL = \frac{EL}{EC} = \frac{JK}{JC}$ 建立方程求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = AB = BC = CD$, $\angle B = \angle D$, $AD \parallel BC$

$\because CE = CG$

$\therefore BC - CE = CD - CG$

$\therefore BE = DG$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle ABE$ (SAS)

$\therefore \angle DAG = \angle BAE$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAG = \angle F$,

$\therefore \angle BAE = \angle F$,

$\because \angle B = \angle B$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle BFA,$$

$$\therefore \frac{BA}{BF} = \frac{BE}{BA},$$

$$\therefore \frac{BC}{BF} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore BC^2 = BE \cdot BF;$$

【小问 2 详解】

解：连接 AC ，

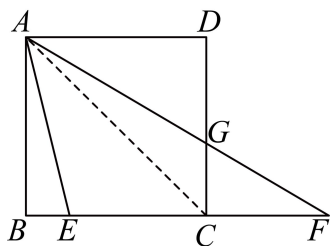


图2

设正方形的边长为1， $CE = x$ ，

由题意得， $CF = CE = x$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore BA = BC = 1, \quad \angle ECA = \frac{1}{2} \angle BCD = 45^\circ, \quad \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle AEF$$

$$\therefore \triangle CEA \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{AE}{EF},$$

$$\therefore AE^2 = EC \times EF = x \cdot 2x = 2x^2,$$

$$\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2 = 1 + (1-x)^2 = x^2 - 2x + 2,$$

$$\therefore x^2 - 2x + 2 = 2x^2,$$

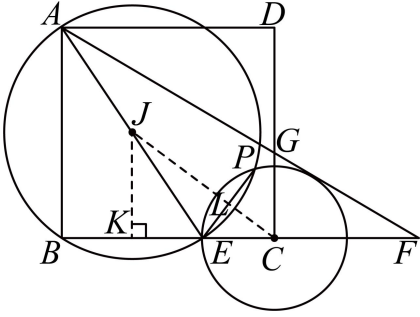
整理得， $x^2 + 2x - 2 = 0$ ，

解得 $x_1 = \sqrt{3} - 1$ ， $x_2 = -\sqrt{3} - 1$ （舍去），

$$\therefore \tan F = \frac{AB}{BF} = \frac{1}{1 + \sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 设以 AE 为直径的圆记为 $\odot J$, 连接 CJ 交 PE 于点 L , 过点 J 作 $JK \perp BC$ 于点 K ,



由题意得可设 $CE = x$, 则 $CF = 2x$,

$$\therefore EF = 3x,$$

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB \parallel CD, \quad AB = BC = 2$$

$$\therefore \triangle FCG \sim \triangle FBA$$

$$\therefore \frac{CG}{AB} = \frac{FC}{FB},$$

$$\therefore \frac{CG}{2} = \frac{2x}{2+2x},$$

$$\therefore CG = \frac{2x}{x+1},$$

$$\therefore EP = CG = \frac{2x}{x+1},$$

$$\because JK \perp BC, \quad \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = \angle JKE = 90^\circ$$

$$\therefore AB \parallel JK$$

$$\therefore \triangle EJK \sim \triangle EAB$$

$$\therefore \frac{EK}{EB} = \frac{KJ}{AB} = \frac{EJ}{EA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore KJ = \frac{1}{2} AB = 1, \quad EK = \frac{1}{2} EB = \frac{1}{2}(2-x) = 1 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore KC = EK + CE = 1 - \frac{1}{2}x + x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore JC = \sqrt{JK^2 + CK^2} = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2}$$

$\because \odot J$ 与 $\odot C$ 相交于点 E, P

$$\therefore CJ \perp PE, \quad EL = \frac{1}{2} EP = \frac{x}{x+1},$$

$$\therefore \sin \angle ECL = \frac{EL}{EC} = \frac{JK}{JC},$$

$$\therefore \frac{\frac{x}{x+1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2}},$$

$$\text{解得 } x = \frac{2}{3} \text{ 或 } x = 0 \text{ (舍)}$$

$$\therefore EF = 3 \times \frac{2}{3} = 2.$$