

2025 年上海市松江区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列单项式中，与 ab^2 是同类项的是（ ）

- A. $2ab$ B. $2a^2b$ C. $-ab^2$ D. $-a^2b^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查同类项的定义，所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，这样的项叫做同类项.

【详解】解：A、相同字母的指数不相同，不是同类项；

B、相同字母的指数不相同，不是同类项；

C、符合同类项的定义，是同类项；

D、相同字母的指数不相同，不是同类项；

故选：C.

2. 某商店在一周内卖出某品牌运动鞋的尺寸记录如：39，36，38，39，37，41，39，37，41，39，40. 如果商店老板要再购进一批同样品牌的运动鞋，他应该关注这组数据的（ ）

- A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查统计量的选择，主要包括平均数、中位数、众数以及方差. 根据题意，商店老板最应关注的销售数据是众数.

【详解】解：如果商店老板要再购进一批同样品牌的运动鞋，他应该关注这组数据的众数.

故选：B.

3. 某商场对一款无人机进行降价促销，其售价由最初的 400 元经过两次降价后变为 225 元，且两次降价的百分率相同. 设每次降价的百分率为 x ，可列方程为（ ）

- A. $400(1-x^2) = 225$ B. $225(1+x)^2 = 400$
C. $400(1-x)^2 = 225$ D. $400(1-2x) = 225$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查由实际问题抽象出一元二次方程，根据题意和题目中的数据，可以列出相应的方程.

【详解】解：由题意可得，

$$400(1-x)^2 = 225,$$

故选：C.

4. 下列命题中，是真命题的是（ ）

A. 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形

B. 两条对角线相等的四边形是矩形

C. 两条对角线互相垂直的四边形是菱形

D. 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【答案】A

【解析】

【分析】根据特殊四边形的判定方法进行判断.

【详解】解：对角线互相平分的四边形是平行四边形，故选项 A 符合题意；

对角线相等的平行四边形是矩形，故选项 B 不符合题意；

对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故选项 C 不符合题意；

对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形，故选项 D 不符合题意.

故选：A.

5. 已知 $\odot O_1$ 的半径是 5， $\odot O_2$ 的半径是 6. 圆心 O_2 在 $\odot O_1$ 上. 那么两圆的公共弦长是（ ）

A. $\frac{24}{5}$

B. $\frac{48}{5}$

C. 10

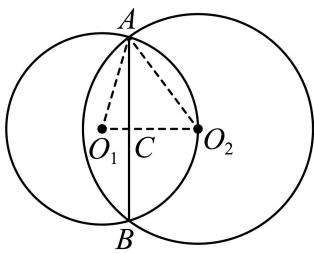
D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了相交两圆的性质，先根据题意画出图形，设 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A, B ，连接 $AB, O_1O_2, O_1A, O_2B, O_1O_2$ ，设 AB 与 O_1O_2 相交于点 C ，设 $O_1C = a$ ，则 $O_1A = O_1O_2 = 5$ ， $O_2A = 6$ ， $AC = BC$ ， $AB \perp O_1O_2$ ， $O_2C = 5 - a$ ， $AB = 2AC$ ，在 $Rt\triangle O_1AC$ 和 $Rt\triangle O_2AC$ 中，由勾股定理得 $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = O_2A^2 - O_2C^2$ ，则 $5^2 - a^2 = 6^2 - (5 - a)^2$ ，由此解出 $a = \frac{7}{5}$ ，则 $AC = \frac{24}{5}$ ，进而即可得出公共弦 AB 的长.

【详解】解：设 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A, B ，连接 $AB, O_1O_2, O_1A, O_2B, O_1O_2$ ，设 AB 与 O_1O_2 相交于点 C ，如图所示：



设 $O_1C = a$,

$\because \odot O_1$ 的半径是 5, $\odot O_2$ 的半径是 6. 圆心 O_2 在 $\odot O_1$ 上,

$\therefore O_1A = O_1O_2 = 5$, $O_2A = 6$, $AC = BC$, $AB \perp O_1O_2$,

$\therefore O_2C = O_1O_2 - O_1C = 5 - a$, $AB = 2AC$,

在 $Rt \triangle O_1AC$ 和 $Rt \triangle O_2AC$ 中, 由勾股定理得: $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = O_2A^2 - O_2C^2$,

$$\therefore 5^2 - a^2 = 6^2 - (5 - a)^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{7}{5},$$

$$\therefore O_1C = \frac{7}{5},$$

$$\therefore AC = \sqrt{O_1A^2 - O_1C^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{24}{5},$$

$$AB = 2AC = 2 \times \frac{24}{5} = \frac{48}{5}.$$

故选: B

6. 我们把一个等腰三角形的腰与底边的比值叫做这个等腰三角形的“特征值”. 设等腰 $\triangle ABC$ 的特征值是 k , 下列命题中假命题是 ()

A. 如果 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形

B. 如果 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\triangle ABC$ 有一内角为 30°

C. 如果 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 那么 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 如果 $\triangle ABC$ 有一内角为 30° , 那么 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质、勾股定理、锐角三角函数，根据“特征值”的定义，再利用等腰三角形的性质，根据等腰三角形的特征值求出三角形的两角的度数，或根据等腰三角形中角的度数求出它们的特征值，根据计算结果判断各选项的正误即可.

【详解】 解：A 选项：当 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，可设腰长为 $\sqrt{2}$ ，则底长为 2，

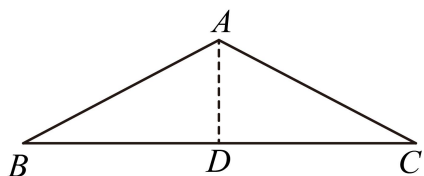
$$\therefore (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形是直角三角形，

故

A 选项正确，不符合题意；

B 选项：如下图所示，过 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，



$$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 设 $AB = \sqrt{3}$ ，则 $BC = 3$ ，

$\therefore AD \perp BC$ ，且 $AB = AC$ ，

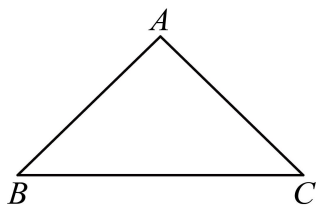
$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

故 B 选项正确，不符合题意；

C 选项：如下图所示， $AB = AC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

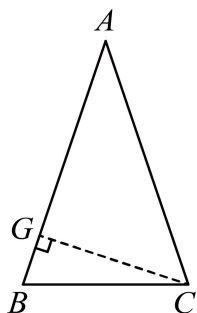
故 C 选项正确，不符合题意；

D 选项：当这个角底角为 30° 时，由选项 B 可知，此时 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

当顶角为 30° 时，

如下图所示， $AB = AC$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

过 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G，



在 $Rt \triangle ACG$ 中，设 $CG = 1$ ，则 $AC = AB = 2$ ， $AG = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore BG = 2 - \sqrt{3},$$

在 $Rt \triangle BCG$ 中， $BC = \sqrt{BG^2 + CG^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2 \times \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1)$ ，

$$\therefore k = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故 D 选项错误，符合题意；

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算： $(-2\sqrt{3})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质计算即可求解.

【详解】 解： $(-2\sqrt{3})^2 = (-2)^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ ，

故答案为：12.

【点睛】 此题考查的是二次根式的化简，掌握二次根式的性质是解题关键.

8. 因式分解 $a^2 - a - 6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a+2)(a-3)$

【解析】

【分析】 利用公式 $x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$ 公式进行因式分解.

【详解】 解: $a^2 - a - 6 = a^2 + (-3+2)a + (-3) \times 2 = (a-3)(a+2)$,

故填 $(a-3)(a+2)$

【点睛】 本题考查因式分解, 基本步骤是一提二套三检查.

9. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 的解是__.

【答案】 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了高次方程, 因为 $x + y = 1$, $x^2 - y^2 = 5$, 求出 $x - y = 5$, 得到新的方程组: $\begin{cases} x + y = 1 \text{①} \\ x - y = 5 \text{②} \end{cases}$,

求出 x 、 y 即可.

【详解】 解: 因为 $x + y = 1$, $x^2 - y^2 = 5$,

所以 $(x+y)(x-y) = 5$,

即 $1 \times (x-y) = 5$,

得 $x - y = 5$,

此时得到新的方程组:

$$\begin{cases} x + y = 1 \text{①} \\ x - y = 5 \text{②} \end{cases},$$

① + ②得: $2x = 6$, $x = 3$,

将 $x = 3$ 代入①得: $y = -2$,

所以方程组的解是: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

故答案为: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

10. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq \frac{1}{4}$ 或 $a \leq 0.25$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 解答本题的关键是明确一元二次方程有实数根时 $\Delta \geq 0$.

根据一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根, 可知 $\Delta \geq 0$, 然后即可求得 a 的取值范围.

【详解】 解: 由题意得: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times a \geq 0$,

解得: $a \leq \frac{1}{4}$,

故答案为: $a \leq \frac{1}{4}$.

11. 如果一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-2, 3)$, 且与 x 轴的交点在原点右侧, 那么函数值 y 随 x 的增大而___ (填“增大”或“减小”).

【答案】 减小

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的图象与性质, 根据一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-2, 3)$, 可知函数图象经过第二象限, 根据函数图象与 x 轴的交点在原点右侧, 可知函数图象经过第一象限, 所以可知该函数图象经过第一、二、四象限, 所以函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-2, 3)$,

$\therefore$ 函数图象经过第二象限,

$\because$ 函数图象与 x 轴的交点在原点右侧,

$\therefore$ 函数图象经过第一象限,

$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象不经过第三象限,

$\therefore$ 该函数图象经过第一、二、四象限,

$\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小.

故答案为: 减小.

12. 去年我国成为全球第一大汽车出口国, 全年共出口汽车约 6.3×10^6 辆, 平均每月约出口汽车___ 辆. (用科学记数法表示)

【答案】 5.25×10^5

【解析】

【分析】 本题考查科学记数法—表示较大的数，将一个数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种表示数的方法叫做科学记数法，据此即可得出答案.

【详解】 解：平均每月约出口汽车： $6.3 \times 10^6 \div 12 = 5.25 \times 10^5$ （辆）.

故答案为： 5.25×10^5

13. 一般情况下路口会设置红色、黄色、绿色三种颜色的信号灯. 已知某路口三种信号灯的时长依次是：红灯 40 秒、黄灯 4 秒、绿灯 36 秒，一辆汽车行驶到该路口遇到绿灯的概率是_____.

【答案】 0.45

【解析】

【分析】 本题考查简单概率的计算，熟练掌握概率公式是解题的关键，根据题意找到事件中的部分和整体，利用概率公式即可求得答案.

【详解】 解：一辆汽车行驶到该路口遇到绿灯的概率是： $\frac{36}{40+4+36} = 0.45$,

故答案为：0.45.

14. 已知 $A(2, a)$ 、 $B(m, b)$ 是抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 上不同的两点，如果 $a = b$ ，那么 $m = \underline{\quad}$.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数的对称性是解题的关键；先求出对称轴，再根据纵坐标相等的两点关于对称轴对称即可得解；

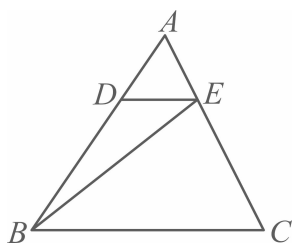
【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 的对称轴为：直线 $x = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$ ， $a = b$ ，

$$\therefore \frac{2+m}{2} = -1,$$

$$\therefore m = -4.$$

故答案为：-4.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别在 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $BD = 2AD$. 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BE}$ 可用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的运算，相似三角形的判定与性质，熟练掌握向量的运算是解题关键．先根据相似三角形的判定与性质可得 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{b}$ ，由 $BD = 2AD$ 可得 $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{a}$ ，再根据向量的加法即可得解．

【详解】 解： $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}，$$

$\because BD = 2AD$ ，

$\therefore AB = 3AD$ ，

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{3AD} = \frac{1}{3}，$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{b}，$$

$\because BD = 2AD$ ，

$$\therefore BD = \frac{2}{3}AB，$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{a}，$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}，$$

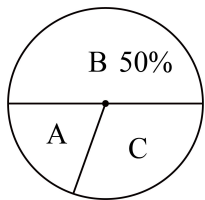
故答案为： $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ．

16. 某学习小组想了解本校学生课外阅读时间的情况，在全校随机调查了部分学生，对他们一周的课外阅读时长进行统计、整理，并绘制成两幅不完整的统计图表．

编 码	课外阅读时长（分钟）	人 数
A	$0 < x \leq 120$	10

B	$120 < x \leq 240$	25
C	$x > 240$	a

如果该校有 1200 名学生，那么该校一周课外阅读时长超过 240 分钟的学生大约有__人.



【答案】 360

【解析】

【分析】 此题考查了扇形统计图和统计表. 先求出样本容量，得到 a 的值，再利用样本估计总体即可求出答案.

【详解】 解：由题意得，样本容量为： $25 \div 50\% = 50$ ，

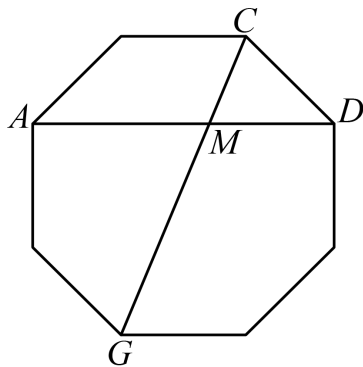
故 $a = 50 - 10 - 25 = 15$ ，

$$1200 \times \frac{15}{50} = 360 \text{ (人)},$$

即该校一周课外阅读时长超过 240 分钟的学生大约有 360 人.

故答案为： 360

17. 如图，正八边形的对角线 AD 、 CG 交于点 M ，那么 $\frac{AM}{MD}$ 的值为__.



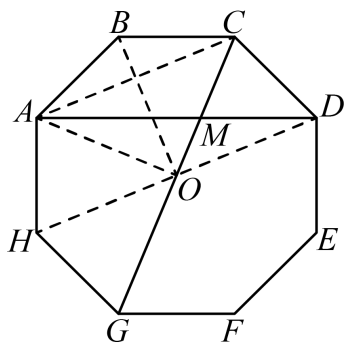
【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正多边形的内角和，勾股定理，相似三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先算出 $\angle GOH = \angle HOA = \angle AOB = \angle BOC = 45^\circ$ ，得出 $OD = OC = OA$ ，运用勾股定理表示

$CA = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{2}OD$ ，因为 $CA \parallel OD$ ，证明 $\triangle ACM \sim \triangle DOM$ ，则 $\frac{AM}{MD} = \frac{CA}{OD} = \frac{\sqrt{2}OD}{OD} = \sqrt{2}$ ，即可作答.

【详解】解：如图，设正八边形 $ABCDEFGH$ 的中心为点 O ，连接 OB 、 OA 、 OH ，



则 $\angle GOH = \angle HOA = \angle AOB = \angle BOC = \frac{1}{8} \times 360^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle GOH + \angle HOA + \angle AOB + \angle BOC = 4 \times 45^\circ = 180^\circ$ ，

$\therefore G$ 、 O 、 C 三点在同一条直线上，

$\therefore$ 点 O 在 CG 上，

连接 CA 、 OD ，

则 $OD = OC = OA$ ，

$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OCA = \angle OAC = 45^\circ$ ，

则 $CA = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}OD$ ，

$\therefore \angle OCA = \angle COD$ ，

$\therefore CA \parallel OD$ ，

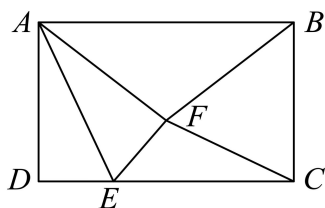
$\therefore \angle CAD = \angle ODA$ ， $\angle ACM = \angle DOM$ ，

$\therefore \triangle ACM \sim \triangle DOM$ ，

$\therefore \frac{AM}{MD} = \frac{CA}{OD} = \frac{\sqrt{2}OD}{OD} = \sqrt{2}$ ，

故答案为： $\sqrt{2}$ 。

18. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $AD = 5$ ，点 E 在边 CD 上，将 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 翻折，点 D 落在点 F 处，联结 BF 、 CF 。如果 $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形，那么 DE 的长是_____。



【答案】 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】分两种情况讨论，一是 $BF = BC$ ，由折翻折得 $AF = AD = BC = 5$ ，所以 $AF = BF$ ，过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G ，交 DC 于点 H ，则 $AG = BG = 4$ ，四边形 $AGHD$ 是矩形，所以 $DH = AG = 4$ ， $GH = AD = 5$ ，求得 $GF = \sqrt{AF^2 - AG^2} = 3$ ，则 $FH = 2$ ，由勾股定理得 $(4 - DE)^2 + 2^2 = DE^2$ ，求得 $DE = \frac{5}{2}$ ；二是 $BF = CF$ ，连接 DF ，过点 F 作 $FQ \perp BC$ 于点 Q ，交 AD 于点 P ，则 $BQ = CQ = \frac{5}{2}$ ，四边形 $APQB$ 是矩形，所以 $AP = BQ = \frac{5}{2}$ ，可证明 PQ 垂直平分 AD ，则 $AF = AD = DF$ ，所以 $\angle DAF = 60^\circ$ ，则 $\angle DAE = \angle FAE = 30^\circ$ ，所以 $AE = 2DE$ ，由 $AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{3}DE = 5$ ，求得 $DE = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ，于是得到问题的答案.

【详解】解：如图 1， $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形，且 $BF = BC$ ，

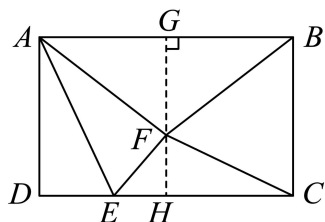


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 8$ ， $AD = 5$ ，

$\therefore AD = BC$ ， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\because$ 将 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 翻折，点 D 落在点 F 处，

$\therefore AF = AD = BC = 5$ ，

$\therefore AF = BF$ ，

过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G ，交 DC 于点 H ，则 $AG = BG = \frac{1}{2}AB = 4$ ，

$\because \angle AGH = \angle GAD = \angle ADH = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AGHD$ 是矩形，

$\therefore DH = AG = 4$ ， $GH = AD = 5$ ， $\angle DHG = 90^\circ$ ，

$\because GF = \sqrt{AF^2 - AG^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

$\therefore FH = GH - GF = 5 - 3 = 2$ ，

$$\because EH^2 + FH^2 = FE^2, \text{ 且 } EH = 4 - DE, \quad FE = DE,$$

$$\therefore (4 - DE)^2 + 2^2 = DE^2,$$

$$\text{解得 } DE = \frac{5}{2};$$

如图 2, $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形, 且 $BF = CF$,

连接 DF , 过点 F 作 $FQ \perp BC$ 于点 Q , 交 AD 于点 P , 则 $BQ = CQ = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$,

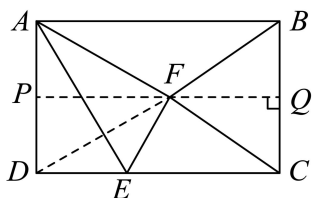


图2

$$\because \angle PQB = \angle ABQ = \angle BAP = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $APQB$ 是矩形,

$$\therefore AP = BQ = \frac{5}{2}, \quad \angle APQ = 90^\circ,$$

$$\therefore AP = DP = \frac{5}{2},$$

$\therefore PQ$ 垂直平分 AD ,

$$\therefore AF = DF,$$

$$\therefore AF = AD = DF,$$

$\therefore \triangle ADF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle DAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FAE = \frac{1}{2} \angle DAF = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2DE,$$

$$\because AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{(2DE)^2 - DE^2} = \sqrt{3}DE = 5,$$

$$\therefore DE = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

综上所述, DE 的长是 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】此题重点考查矩形的判定与性质、翻折变换的性质、等腰三角形的性质、等边三角形的判定与性质、直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半、勾股定理、分类讨论数学思想的运用等知识与方法，正确地作出辅助线是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题)

19. 计算: $8^{\frac{1}{2}} + |\sqrt{2} - 2| + \left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}}\right)^0 - (\sqrt{2} - 1)^{-1}$.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查零次幂、负指数幂及分数指数幂，熟练掌握各个运算是解题的关键；因此此题可根据零次幂、负指数幂及分数指数幂进行求解即可.

【详解】解: 原式 $= 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$$= \sqrt{2} + 3 - (\sqrt{2} + 1)$$

$$= \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} - 1$$

$$= 2.$$

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x - 2 < 2(1 - x) \\ \frac{x - 10}{3} < 2x \end{cases}.$$

【答案】 $-2 < x < \frac{4}{5}$

【解析】

【分析】本题考查的是解一元一次不等式组，分别求出各不等式的解集，再根据“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则求出其公共解集即可.

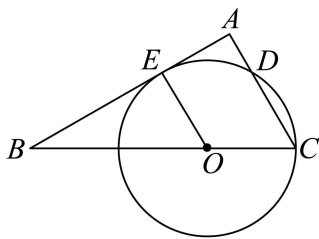
【详解】解:
$$\begin{cases} 3x - 2 < 2(1 - x) \text{ ①} \\ \frac{x - 10}{3} < 2x \text{ ②} \end{cases},$$

由①得, $x < \frac{4}{5}$,

由②得, $x > -2$,

故不等式组的解集为: $-2 < x < \frac{4}{5}$

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 点 O 在边 BC 上, 以 O 为圆心, OC 为半径的圆与边 AC 交于点 D , 与边 AB 相切于点 E .



(1) 当 $BC = 12$ 时, 求 $\odot O$ 的半径长;

(2) 求 $\frac{AD}{CD}$ 的值.

【答案】(1) $\odot O$ 的半径长为 4

(2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】此题考查了切线的性质、含 30° 角的直角三角形的性质、等边三角形的判定和性质等知识, 熟练掌握切线的性质、等边三角形的判定和性质是解题的关键.

(1) 利用切线的性质和含 30° 角的直角三角形的性质得到 $OB = 2OE = 2OC$, 即可求出答案;

(2) 连接 OD 、 ED , 则 $OD = OC = OE$, 证明 $\triangle COE$ 和 $\triangle EOD$ 是等边三角形, 再利用含 30° 角的直角三角形的性质即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because \odot O$ 与 AB 边相切于点 E ,

$\therefore AB \perp OE$ 于点 E ,

$\therefore \angle OEB = 90^\circ$,

$\because \angle B = 30^\circ$, $OE = OC$,

$\therefore OB = 2OE = 2OC$,

$\because OB + OC = BC = 12$,

$\therefore 2OC + OC = 12$,

$\therefore OC = 4$,

$\therefore \odot O$ 的半径长为 4.

【小问 2 详解】

连接 OD 、 ED , 则 $OD = OC = OE$,



图1

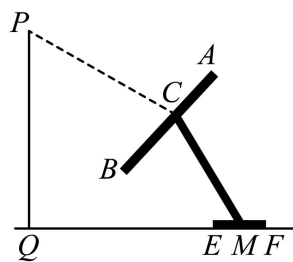


图2

【答案】任务 1: 展板最低点 B 到地面 EF 的距离为 60cm; 任务 2: 当点 P 为“最佳观测点”时, 求点 B 到 PQ 的距离为 50cm

【解析】

【分析】(1) 过 C 作 $CH \perp QM$ 于 H , 过 B 点作 $BN \perp CH$ 于 N , 作 $BG \perp QM$ 于 G , 解直角三角形求出 $CH = CM \cdot \sin 53^\circ \approx 125 \times \frac{4}{5} = 100(\text{cm})$, $CN = BC \cdot \sin \angle CBN = 50 \times \frac{4}{5} = 40(\text{cm})$, 最后求出结果即可;

(2) 过 C 点作 $CO \perp PQ$ 于 O 点, 作 $BK \perp PQ$ 于 K 点, 设 $BK = x$, 则 $CO = BK + BN = x + 30$, 根据 $\tan \angle P = \tan 53^\circ = \frac{CO}{PO} = \frac{x+30}{60} \approx \frac{4}{3}$, 求出结果即可.

【详解】解: (1) 如图 2, 过 C 作 $CH \perp QM$ 于 H , 过 B 点作 $BN \perp CH$ 于 N , 作 $BG \perp QM$ 于 G ,

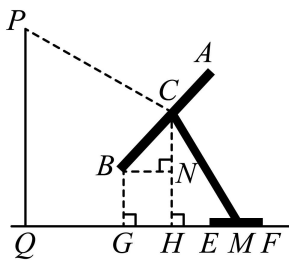


图2

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle CHM$ 中, $CM = 125\text{cm}$, $\angle CME = 53^\circ$,

$$\therefore CH = CM \cdot \sin 53^\circ \approx 125 \times \frac{4}{5} = 100(\text{cm}),$$

$$\because \angle ACM = 106^\circ,$$

$$\therefore \angle BCM = 180^\circ - \angle ACM = 74^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle HCM = 90^\circ - \angle CME = 37^\circ,$$

$$\therefore \angle NCB = 37^\circ,$$

$$\therefore \angle CBN = 90^\circ - \angle NCB = 53^\circ,$$

$$\because CB = 50,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BCN \text{ 中, } CN = BC \cdot \sin \angle CBN = 50 \times \frac{4}{5} = 40(\text{cm}),$$

$$\therefore BG = NH = CH - CN = 100 - 40 = 60(\text{cm}),$$

答: 展板最低点 B 到地面 EF 的距离为 60cm;

(2) 如图, 过 C 点作 $CO \perp PQ$ 于 O 点, 作 $BK \perp PQ$ 于 K 点,

$\therefore$ 由 (1) 知 $CN = 40\text{cm}$, $CB = 50\text{cm}$,

$\therefore BN = 30\text{cm}$,

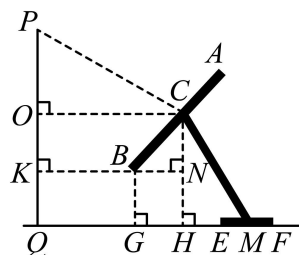


图2

$\therefore PC \perp AB$, $\angle PKB = 90^\circ$,

$\therefore \angle P + \angle CBK = 180^\circ$,

$\therefore \angle CBK + \angle CBN = 180^\circ$,

$\therefore \angle P = \angle CBN = 53^\circ$,

设 $BK = x$,

$\therefore CO = BK + BN = x + 30$,

$\therefore PQ = 160$, $NH = 60\text{cm}$, $CN = 40\text{cm}$,

$\therefore PO = PQ - NH - CN = 60\text{cm}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle POC$ 中, $\tan \angle P = \tan 53^\circ = \frac{CO}{PO} = \frac{x+30}{60} \approx \frac{4}{3}$,

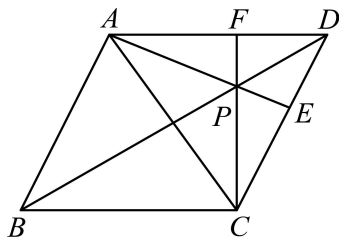
$\therefore x = 50$,

$\therefore BK = 50\text{cm}$,

答: 当点 P 为“最佳观测点”时, 求点 B 到 PQ 的距离为 50cm .

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的应用, 解题的关键是熟练掌握三角函数定义, 作出辅助线.

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, P 是对角线 BD 上一点, 连结 AP 、 CP 并延长, 分别与边 CD 、 AD 交于点 E 、 F .



(1) 求证: $AE = CF$;

(2) 如果 $\angle APF = 2\angle ABD$, 求证: $BP \cdot BD = 2AB^2$.

【答案】 (1) 证明详见解析

(2) 证明详见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质，相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，熟练掌握以上基本性质是解答本题的关键.

(1) 由菱形的性质可知 $AD = CD$ ， BD 垂直平分 AC ，继而可知 $\angle ACD = \angle CAD$ ， $PA = PC$ ，求得 $\angle PAC = \angle PCA$ ，进而判定 $\triangle ACE \cong \triangle CAF$ (ASA)，得出结论；

(2) 由菱形的性质和已知条件，根据角的和差计算易得 $\angle BLA = \angle BAP = 90^\circ$ ，进而可判定 $\triangle ABL \sim \triangle PBA$ ，再根据相似三角形的对应线段成比例即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD = CD$ ， BD 垂直平分 AC ，

$\therefore \angle ACD = \angle CAD$ ，

$\because$ 点 P 在 BD 上，

$\therefore PA = PC$ ，

$\therefore \angle PAC = \angle PCA$ ，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CAF$ 中，

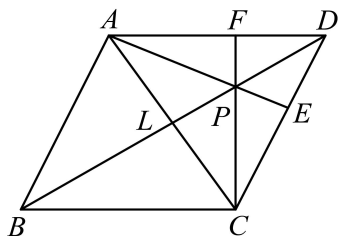
$$\begin{cases} \angle ACE = \angle CAF \\ AC = CA \\ \angle EAC = \angle FCA \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CAF$ (ASA)，

$\therefore AE = CF$.

【小问 2 详解】

设 AC 交 BD 于点 L ，则 $LB = LD = \frac{1}{2}BD$ ，



$\because AB = CB$ ， $BD \perp AC$ ，

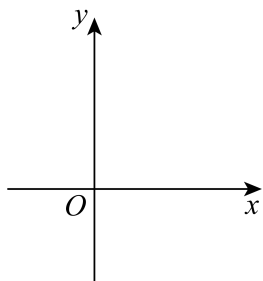
$\therefore \angle ABD = \angle CBD$ ，

$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD$ ，

$\therefore \angle APF = 2\angle ABD$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle APF = \angle ABC, \\
&\therefore \angle ABC + \angle APC = \angle APF + \angle APC = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BAP + \angle BCP = 360^\circ - (\angle ABC + \angle APC) = 180^\circ, \\
&\because \angle BAC = \angle BCA, \quad \angle PAC = \angle PCA, \\
&\therefore \angle BAP = \angle BAC + \angle PAC = \angle BCA + \angle PCA = \angle BCP, \\
&\therefore 2\angle BAP = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BAP = 90^\circ, \\
&\because \angle ABL = \angle PBA, \\
&\therefore \triangle ABL \sim \triangle PBA, \\
&\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{LB}{AB}, \\
&\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{\frac{1}{2}BD}{AB}, \\
&\therefore BP \cdot BD = 2AB^2.
\end{aligned}$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, (点 A 在点 B 的右侧) 与 y 轴正半轴交于点 C , 顶点为 P .



- (1) 求 PC 的长;
- (2) 当 $AC \perp PC$ 时, 求抛物线的表达式;
- (3) 将该抛物线平移, 新抛物线的顶点 P_1 落在 y 轴上, 与原抛物线交于点 D , 如果点 P_1 与点 C 关于原点对称, 且 $P_1D \parallel PC$, 求 $\triangle PP_1C$ 的面积.

【答案】 (1) $CP = 2\sqrt{5}$

(2) $y = -x^2 + 4x + \frac{9}{4}$

(3) 8

【解析】

【分析】 本题考查二次函数与一次函数的综合，熟练掌握待定系数法求函数解析式，二次函数与一次函数的交点问题是解题的关键，

(1) 由抛物线的表达式知，其对称轴为直线 $x = 2$ ，从而得到点 $P(2, c+4)$ ，再利用点 $C(0, c)$ 、 P 的坐标得 $CP^2 = 2^2 + (c+4-c)^2 = 20$ ，进而求得 CP 的长；

(2) 根据点 $C(0, c)$ 、 P 的坐标得直线 CP 的表达式为： $y = 2x + c$ ，由于 $AC \perp PC$ ，可得直线 AC 的表达式为： $y = -\frac{1}{2}x + c$ ，则点 $A(2c, 0)$ ，代入点 A ，求得 c ，进而得到抛物线的表达式；

(3) 由于点 P_1 与点 $C(0, c)$ 关于原点对称，可得点 $P_1(0, -c)$ ，则新抛物线的表达式为： $y = -x^2 - c$ ，联立两个抛物线的表达式得点 $D\left(-\frac{1}{2}c, -\frac{1}{4}c^2 - c\right)$ ，由点 D 、 P_1 的坐标得，该直线表达式函数值中的 $k = \frac{1}{2}c$ ，

而直线 CP 的表达式为： $y = 2x + c$ ，再根据 $P_1D \parallel PC$ ，可求得 $c = 4$ ，进而求得 $\triangle PP_1C$ 的面积。

【小问 1 详解】

解： $\because y = -x^2 + 4x + c$ ，

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 2$ ，

当 $x = 2$ 时， $y = -x^2 + 4x + c = c + 4$ ，

$\therefore$ 点 $P(2, c+4)$ ，

$\because$ 点 $C(0, c)$ ，

$\therefore CP^2 = 2^2 + (c+4-c)^2 = 20$ ，

$\therefore CP = 2\sqrt{5}$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 点 $C(0, c)$ 、 $P(2, c+4)$ ，设直线 CP 的表达式为： $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} b = c \\ 2k + b = c + 4 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = 2 \\ b = c \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 CP 的表达式为： $y = 2x + c$ ，

$\because AC \perp PC$ ，

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的表达式为: } y = -\frac{1}{2}x + c,$$

$$\therefore \text{点 } A(2c, 0),$$

$$\text{将点 } A \text{ 的坐标代入抛物线表达式得: } 0 = -4c^2 + 8c + c,$$

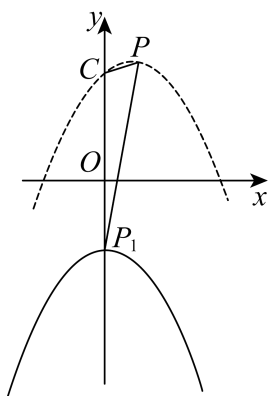
$$\therefore c = 0 \text{ (舍去) 或 } \frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为: } y = -x^2 + 4x + \frac{9}{4};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because \text{点 } P_1 \text{ 与点 } C(0, c) \text{ 关于原点对称},$$

$$\therefore \text{点 } P_1(0, -c),$$



$$\therefore \text{新抛物线的表达式为: } y = -x^2 - c,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -x^2 + 4x + \frac{9}{4} \\ y = -x^2 - c \end{cases}$$

$$\text{整理得: } -x^2 + 4x + c = -x^2 - c,$$

$$\text{解得: } x = -\frac{1}{2}c,$$

$$\therefore \text{点 } D\left(-\frac{1}{2}c, -\frac{1}{4}c^2 - c\right),$$

$$\text{设直线 } DP_1 \text{ 的表达式为: } y = kx + b,$$

$$\begin{cases} b = -c \\ k \cdot \left(-\frac{1}{2}c\right) + b = -\frac{1}{4}c^2 - c \end{cases}$$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{2}c,$$

$\therefore$ 直线 DP_1 的表达式为: $y = \frac{1}{2}cx - c$,

$\therefore$ 直线 CP 的表达式为: $y = 2x + c$, 且 $P_1D \parallel PC$,

$$\therefore 2 = \frac{1}{2}c,$$

$$\therefore c = 4,$$

$$\therefore \triangle PP_1C \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times CP_1 \times x_P = \frac{1}{2}(2c) \times 2 = 2c = 8.$$

25. 已知 AB 是半圆 O 的直径, P 是弦 AC 延长线上一点.

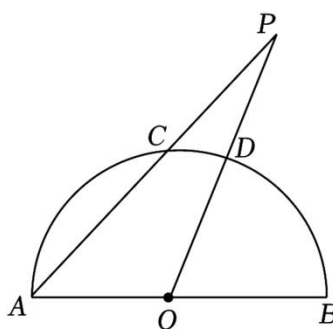


图1

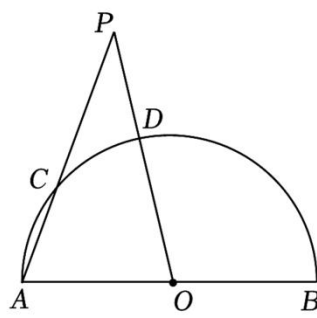
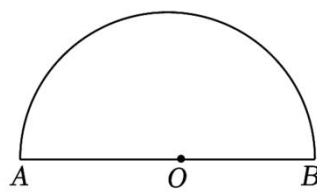


图2



备用图

(1) 联结 PO 与半圆交于点 D .

①如图 1, 如果点 C 是弧 AB 的中点, 且 $\tan P = \frac{1}{3}$, $PC = 2\sqrt{2}$, 求 PD 的长;

②如图 2, 如果点 C 是弧 AD 的中点, 且 $PA = PO$, 求 $\frac{PC}{PD}$ 的值.

(2) 设 M 是弦 AC 的中点, 如果以点 A 为圆心、 AP 为半径的圆与 $\odot O$ 相切, 以点 P 为圆心、 PM 为半径的圆与直线 AB 相切, 求 $\sin \angle PAB$ 的值.

【答案】 (1) ① $2\sqrt{5} - 2$; ② $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $\frac{3}{5}$

【解析】

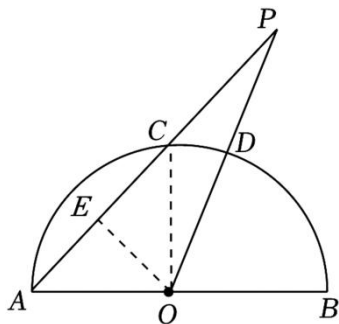
【分析】 (1) ①连接 OC , 过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E , 求出 $OE = EC = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}OA$, 设 $OE = EC = x$, 则 $PE = PC + CE = 2\sqrt{2} + x$, 由 $\tan P = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{3}$ 求出 $x = \sqrt{2}$, 得到 $PE = 3\sqrt{2}$, $OE = \sqrt{2}$, $OA = \sqrt{2}OE = 2$, 则 $PO = \sqrt{PE^2 + OE^2} = 2\sqrt{5}$, 即可求出答案; ②连接 OC , CD , BD , 证明 $\triangle AOC \sim \triangle APO$, 得到 $\angle AOC = \angle P$, 得到 $PC = OC = OA = OD$, 则 $AC = PD$. 设 $PC = OC = OA = OD = x$, $PD = AC = y$, 则

$PO = x + y$ ，证明 $\triangle AOC \sim \triangle APO$ ，得到 $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ ，即可求出答案.

(2) 设 PM 为半径的圆与直线 AB 相切于点 E ，连接 OM ， PE ，证明 $\text{Rt} \triangle PMO \cong \text{Rt} \triangle PEO$ (HL)，得到 $OM = OE$ ，设 $OM = OE = a$ ，证明 $\triangle OAM \sim \triangle PAE$ ，得到 $PE = PM = 2a$ ，则 $AM = AP - PM = 2r - 2a$ ， $AP = 2r = \frac{10}{3}a$ ，即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：①连接 OC ，过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E ，如图，



$\because AB$ 是半圆 O 的直径，点 C 是弧 AB 的中点，

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ,$$

$\because OA = OC$ ， $OE \perp AC$ ，

$$\therefore OE = EC = AE = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}OA,$$

设 $OE = EC = x$ ，则 $PE = PC + CE = 2\sqrt{2} + x$ ，

$$\because \tan P = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{x}{x + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3},$$

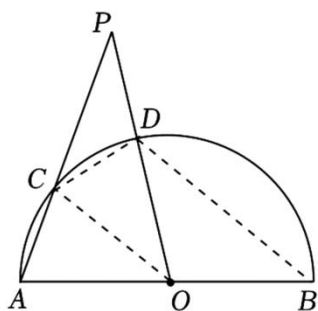
$$\therefore x = \sqrt{2},$$

$$\therefore PE = 3\sqrt{2}, \quad OE = \sqrt{2}, \quad OA = \sqrt{2}OE = 2,$$

$$\therefore PO = \sqrt{PE^2 + OE^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore PD = PO - OD = 2\sqrt{5} - 2.$$

②连接 OC ， CD ， BD ，如图，



$\because$ 点 C 是弧 AD 的中点,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore AC = CD, \quad \angle AOC = \angle DOC = \frac{1}{2} \angle AOD,$$

$$\because \angle B = \frac{1}{2} \angle AOD,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \angle B.$$

$$\because PA = PO,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle POA,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle POA,$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle APO,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle P,$$

$$\therefore \angle P = \angle DOC,$$

$$\therefore PC = OC,$$

$$\therefore PC = OC = OA = OD,$$

$\because$ 四边形 $ABDC$ 为圆的内接四边形,

$$\therefore \angle PCD = \angle B,$$

$$\therefore \angle PCD = \angle P,$$

$$\therefore PD = CD,$$

$$\therefore AC = PD.$$

设 $PC = OC = OA = OD = x$, $PD = AC = y$, 则 $PO = x + y$,

$$\because \triangle AOC \sim \triangle APO,$$

$$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{PO}{OC},$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}.$$

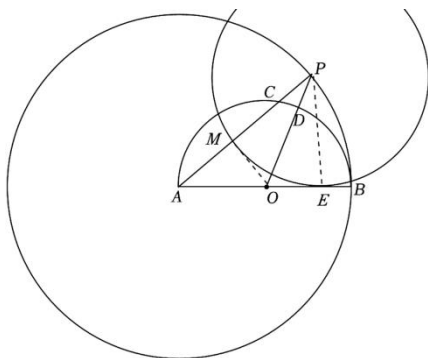
$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y \quad (\text{负数不合题意, 舍去}),$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{PC}{PD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

【小问2 详解】

设 PM 为半径的圆与直线 AB 相切于点 E , 连接 OM , PE , 如图,



$\because$ 点 A 为圆心、 AP 为半径的圆与 $\odot O$ 相切,

$\therefore$ 点 B 为切点,

$$\therefore AP = AB,$$

设 $AP = AB = 2r$, 则 $OA = r$,

$\because M$ 是弦 AC 的中点,

$$\therefore OM \perp AC, \quad AM = MC = \frac{1}{2} AC,$$

$\because PM$ 为半径的圆与直线 AB 相切于点 E ,

$$\therefore PE \perp AB, \quad PE = PM,$$

在 $Rt \triangle PMO$ 和 $Rt \triangle PEO$ 中,

$$\begin{cases} PM = PE \\ PO = PO \end{cases},$$

$$\therefore Rt \triangle PMO \cong Rt \triangle PEO (HL),$$

$$\therefore OM = OE,$$

$$\text{设 } OM = OE = a,$$

$$\because \angle A = \angle A, \quad \angle AMO = \angle AEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAM \sim \triangle PAE,$$

$$\therefore \frac{OM}{PE} = \frac{AM}{AE} = \frac{OA}{AP} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2} PE, \quad AM = \frac{1}{2} AE,$$

$$\therefore AE = AC = AO + OE = r + a, \quad PE = 2a,$$

$$\therefore PM = 2a,$$

$$\therefore AM = AP - PM = 2r - 2a,$$

$$\because AM = \frac{1}{2} AC = \frac{r+a}{2},$$

$$\therefore 2r - 2a = \frac{r+a}{2},$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}a.$$

$$\therefore AP = 2r = \frac{10}{3}a,$$

$$\therefore \sin \angle PAB = \frac{PE}{PA} = \frac{2a}{\frac{10}{3}a} = \frac{3}{5}$$

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质、解直角三角形、切线的性质、全等三角形的判定和性质、垂径定理等知识，综合性较强，熟练掌握相似三角形的判定和性质、解直角三角形是解题的关键.