

2025 年上海市杨浦区九年级下学期质量调研(二)数学试题

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列实数中, 无理数的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{4}}$

B. $\sqrt[3]{8}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\sqrt{18}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了无理数, 解答本题的关键掌握无理数的三种形式: ①开方开不尽的数, ②无限不循环小数, ③含有 π 的数.

根据无理数的定义逐个分析判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ 是有理数, 不符合题意;

B、 $\sqrt[3]{8} = 2$ 是有理数, 不符合题意;

C、 $\frac{1}{3}$ 是有理数, 不符合题意;

D、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 是无理数, 符合题意;

故选: D.

2. 用配方法解一元二次方程 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 时, 下列变形中, 正确的是 ()

A. $(x+2)^2 = 5$

B. $(x+2)^2 = 1$

C. $(x+4)^2 = 5$

D. $(x-2)^2 = 5$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了配方法解一元二次方程, 掌握配方的步骤是解题的关键; 方程变形为 $x^2 + 4x = 1$, 再配方即可.

【详解】解：由 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 变形得： $x^2 + 4x = 1$ ，

配方得： $x^2 + 4x + 4 = 1 + 4$ ，即 $(x + 2)^2 = 5$ ；

所以选：A.

3. 已知点 $A(m, n)$ 是双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上的一点，下列坐标表示的各点中，不在双曲线上的是 ()

- A. $\left(2m, \frac{1}{2}n\right)$ B. (n, m) C. $(-m, n)$ D. $(-m, -n)$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了反比例函数的性质，验证点的横纵坐标乘积是否等于 k 进行验证即可.

【详解】解： $\because$ 点 $A(m, n)$ 是双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上的一点，

$$\therefore mn = k$$

选项 A: $\because 2m \cdot \frac{1}{2}n = mn = k$ ，

$\therefore \left(2m, \frac{1}{2}n\right)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，不符合题意；

选项 B: $\because n \cdot m = mn = k$ ，

$\therefore (n, m)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，不符合题意；

选项 C: $\because (-m) \cdot n = -mn = -k$ ，

$\therefore (-m, n)$ 不在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，符合题意；

选项 D: $(-m) \cdot (-n) = mn = k$

$\therefore (-m, -n)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，不符合题意；

故选：C.

4. 上海市四月份某周七天的最高气温分别是 22°C 、 23°C 、 25°C 、 26° 、 $x^{\circ}\text{C}$ 、 27°C 、 33°C ，已知这周七天最高气温的众数是 25°C ，那么这周七天最高气温的中位数是 ()

- A. 24°C B. 25°C C. 25.5°C D. 26°C

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查众数定义和求法、中位数定义和求法，根据 22°C 、 23°C 、 25°C 、 26°C 、 x 、 27°C 、 33°C 众

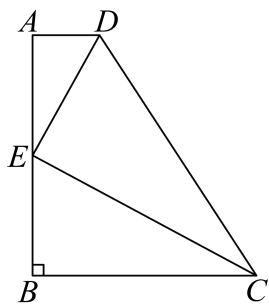
数是 25°C ，可得到 $x = 25^{\circ}\text{C}$ ，然后将数据按升序排列，由中位数定义和求法求解即可得到答案，熟记众数定义和求法、中位数定义和求法是解决问题的关键.

【详解】解析：已知这周七天最高气温的众数是 25°C ，说明 25°C 出现的次数最多，则 $x = 25^{\circ}\text{C}$ ，将数据按升序排列： $22^{\circ}\text{C}, 23^{\circ}\text{C}, 25^{\circ}\text{C}, 25^{\circ}\text{C}, 26^{\circ}\text{C}, 27^{\circ}\text{C}, 33^{\circ}\text{C}$

$\therefore$ 中位数是第 4 个数（共 7 个数据）， 25°C ，

故选：B.

5. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，点 E 是 AB 边上一点， DE 、 CE 分别平分 $\angle ADC$ 、 $\angle BCD$ ，那么下列结论中，错误的是（ ）



A. 点 E 是边 AB 的中点

B. 以 AB 为直径的圆与直线 CD 相切

C. $\triangle ADE \sim \triangle EDC$

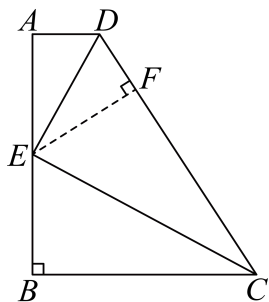
D. $AB^2 = 2AD \cdot BC$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质，直线和圆的位置关系，相似三角形的判定和性质，过 E 作 $EF \perp CD$ 交 CD 于 F ，由角平分线的性质可得 $EA = EF$ ， $EB = EF$ ，即得 $EA = EB$ ，即可判定 A；由 $EA = EB = EF$ ， $EF \perp CD$ 可判定 B；由平行线的性质和角平分线的定义可得 $\angle CDE + \angle DCE = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD) = 90^{\circ}$ ，即得 $\angle A = \angle CED = 90^{\circ}$ ，再利用余角性质可得 $\angle DEA = \angle DCE$ ，即可判定 C；证明 $\triangle ADE \sim \triangle BEC$ ，可得 $AE \cdot BE = AD \cdot BC$ ，即得 $\frac{1}{4}AB^2 = AD \cdot BC$ ，即可判定 D，综上即可求解，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解：过 E 作 $EF \perp CD$ 交 CD 于 F ，



$$\because AD \parallel BC, \quad AB \perp BC,$$

$$\therefore AB \perp AD,$$

$$\because DE、CE \text{ 分别平分 } \angle ADC、\angle BCD,$$

$$\therefore EA = EF, \quad EB = EF,$$

$$\therefore EA = EB, \text{ 即点 } E \text{ 是边 } AB \text{ 的中点, 故 A 正确;}$$

$$\because EA = EF, \quad EB = EF,$$

$$\therefore EA = EB = EF,$$

$$\because EF \perp CD,$$

$$\therefore \text{以 } AB \text{ 为直径的圆与直线 } CD \text{ 相切, 故 B 正确;}$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because DE、CE \text{ 分别平分 } \angle ADC、\angle BCD,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle DCE = \frac{1}{2} \angle ADC + \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle BCD) = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle CED = 90^\circ,$$

$$\because \angle DEA + \angle ADE = 90^\circ, \quad \angle ADE = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DCE,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle EDC, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\because \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AE}{BC},$$

$$\therefore AE \cdot BE = AD \cdot BC,$$

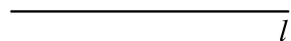
$$\because AE = BE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \frac{1}{4} AB^2 = AD \cdot BC,$$

即 $AB^2 = 4AD \cdot BC$ ，故 D 错误；

故选：D.

6. 如图，已知点 O 到直线 l 的距离为 5，如果在以点 O 为圆心的圆上有且只有两个点到直线 l 的距离为 2，那么这个圆的半径长 r 的取值范围是 ()



A. $2 < r < 5$

B. $3 \leq r < 5$

C. $2 < r \leq 7$

D. $3 < r < 7$

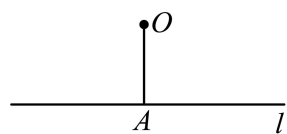
【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了圆与直线的位置关系. 要掌握直线与圆的三种位置关系中各自的特点，并根据特殊的位置关系求出相对应的半径的长度是解题的关键. 已知点 O 到直线 l 的距离为 5，要使圆上有且只有两个点到直线 l 的距离为 2. 过点 O 作直线 l 的垂线，垂足为 A . 当圆与直线 l 的位置关系满足：以 O 为圆心的圆与直线 l 相交，且在直线 l 两侧到直线 l 距离为 2 的点中，只有两个在圆上. 从距离角度看，圆的半径 r 要满足： $5 - 2 < r < 5 + 2$ ，即 $3 < r < 7$ ，得出答案.

【详解】解：已知点 O 到直线 l 的距离为 5，要使圆上有且只有两个点到直线 l 的距离为 2.

过点 O 作直线 l 的垂线，垂足为 A .



当圆与直线 l 的位置关系满足：以 O 为圆心的圆与直线 l 相交，且在直线 l 两侧到直线 l 距离为 2 的点中，只有两个在圆上.

从距离角度看，圆的半径 r 要满足： $5 - 2 < r < 5 + 2$ ，即 $3 < r < 7$.

故选：D

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. $2\frac{1}{2}$ 的倒数是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】本题主要考查了倒数的概念，熟练掌握基本概念是解题的关键.

先将带分数化为假分数，再将分子分母颠倒位置即可得到答案.

【详解】解： $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$,

$\therefore 2\frac{1}{2}$ 的倒数是 $\frac{2}{5}$,

故答案为： $\frac{2}{5}$.

8. 计算： $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1} =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了分式的加减运算；式子变形后为同分母的分式相减，再把分子相减即可求解.

【详解】解： $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0$;

故答案为： 0.

9. 函数 $y = \sqrt{x-4}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq 4$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式函数定义域的求解，解题的关键是依据二次根式中被开方数的非负性来确定自变量的取值范围.

对于二次根式函数，要使其有意义，被开方数必须大于等于 0，据此列出关于 x 的不等式并求解.

【详解】由题意可得： $x-4 \geq 0$ ，解得 $x \geq 4$ ，

所以函数 $y = \sqrt{x-4}$ 的定义域是 $x \geq 4$.

故答案为： $x \geq 4$.

10. 在一个不透明袋子中，装有 6 个红球和 2 个黑球，这些球除颜色外其他都一样. 从袋中随机摸出一个球，恰好为红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查运用概率公式求概率，根据这个公式直接计算即可.

【详解】解： $\because$ 袋子中球的总数为： $6+2=8$ ，其中 6 个红球，

$\therefore$ 摸到红的概率为： $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

11. 已知一次函数 $y = (3-a)x - 1$ 的图像经过第二、三、四象限，那么 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a > 3$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数，解题关键是掌握一次函数的图像和性质：若 $k < 0$ ， $b < 0$ ，则图像经过二、三、四象限；若 $k > 0$ ， $b < 0$ ，则图像经过一、三、四象限. 根据一次函数的图像经过第二、三、四象限，得到 $3-a < 0$ ，解不等式求解即可.

【详解】 解：∵ 一次函数 $y = (3-a)x - 1$ 的图像经过第二、三、四象限，

$$\therefore 3-a < 0,$$

$$\therefore a > 3,$$

故答案为： $a > 3$.

12. 将抛物线 $y = -2x^2 + 3$ 向左平移 2 个单位得到新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = -2(x+2)^2 + 3$

【解析】

【分析】 本题考查了函数图象的平移，用平移规律“左加右减，上加下减”直接代入函数解析式求得平移后的函数解析式.

根据二次函数图象左加右减，上加下减的平移规律进行解答.

【详解】 解：将抛物线 $y = -2x^2 + 3$ 向左平移 2 个单位，

$$\text{得： } y = -2(x+2)^2 + 3,$$

$$\text{故答案为： } y = -2(x+2)^2 + 3.$$

13. 如果将一个正多边形绕它的中心旋转 30° 后，才与原正多边形第一次重合，那么这个正多边形的边数是_____.

【答案】 12

【解析】

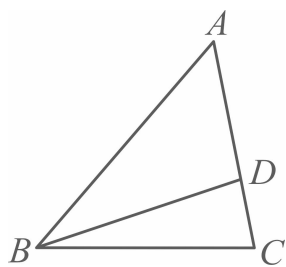
【分析】 本题主要考查了正多边形中心角与其边数的关系，正多边形的中心角等于 360 度除以其边数，根据题意可得该正多边形的中心角为 30° ，据此求解即可.

【详解】 解：由题意得，该正多边形的中心角为 30° ，

$$\therefore \text{这个正多边形的边数为 } \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12,$$

故答案为： 12.

14. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 边上一点, $AD = 2CD$, 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 是_____.



【答案】 $\frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性运算, 解题关键是理解向量的线性运算的含义.

先根据 $AD = 2CD$, 求得 AC , 再用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$.

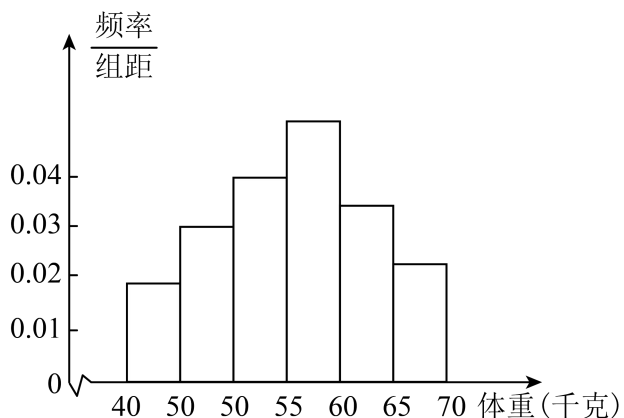
【详解】 解: $\because AD = 2CD$,

$$\therefore AC = \frac{3}{2}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

故答案为: $\frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

15. 为了解全区 4000 名初中毕业生的体重情况, 随机抽测了 200 名学生的体重, 频率分布如图所示 (每小组数据可含最小值, 不含最大值), 其中从左至右前四个小长方形的高依次为 0.02、0.03、0.04、0.05, 由此可估计全区初中毕业生的体重不小于 60 千克的学生人数约为_____人.



【答案】 1200

【解析】

【分析】 本题考查的是频率分布直方图, 熟练掌握频率直方图的意义是解题的关键.

先根据频率分布直方图，得到从左至右前四组的频率，进而得出后两组的频率之和，最后根据总数 $\times$ 频率，即可得到全区体重不小于 60 千克的学生人数.

【详解】解：由题意得，其中从左至右前四组的频率为

$$0.02 \times 5 = 0.1, 0.03 \times 5 = 0.15, 0.04 \times 5 = 0.2, 0.05 \times 5 = 0.25,$$

$$\therefore \text{后两组的频率之和为: } 1 - 0.1 - 0.15 - 0.2 - 0.25 = 0.3,$$

$$\therefore \text{全区体重不小于 60 千克的学生人数约为: } 4000 \times 0.3 = 1200 \text{ 人,}$$

故答案为：1200.

16. 已知四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AC \perp BD$ ， $\angle ABO = \angle CBO$ ，请再添加一个条件，使四边形 $ABCD$ 是菱形，可以添加的条件是_____。（只添加一个条件）

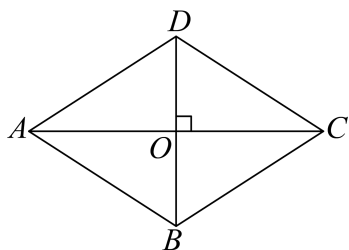
【答案】 $OB = OD$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】本题考查菱形的判定，解题的关键是结合已知条件，依据菱形的判定定理补充合适条件。

可以添加的条件 $OB = OD$ （答案不唯一）理由是：由已知、根据 (ASA) 可证 $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ，得到 $OA = OC$ ，从而根据“对角线互相垂直平分的四边形是菱形”得到：四边形 $ABCD$ 是菱形.

【详解】可以添加的条件是 $OB = OD$ （答案不唯一）



理由如下：

$$\because AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COB = 90^\circ,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle CBO \\ OB = OB \\ \angle AOB = \angle COB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COB (\text{ASA}),$$

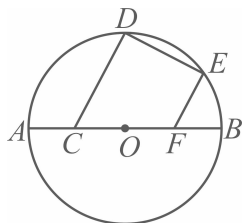
$$\therefore OA = OC,$$

$$\because OB = OD,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形 (对角线互相垂直平分的四边形是菱形)。

故答案为: $OB = OD$ (答案不唯一)。

17. 如图, 已知在 $\odot O$ 中, AB 是 $\odot O$ 直径, 点 C 是 AO 的中点, 点 D 是弧 AB 的中点, 点 E 是弧 BD 上一点, $DE \perp CD$, 过点 E 作 $FE \perp DE$, 交 AB 于点 F , 那么 $\frac{EF}{CD}$ 的值是_____。



【答案】 $\frac{3}{5}$ ## 0.6

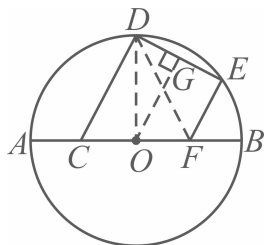
【解析】

【分析】 本题考查平行线截线段成比例, 垂直平分线的性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 垂径定理等知识, 正确做出辅助线是解题的关键. 先连接 OD , DF , 过 O 作 $OG \perp DE$ 于 G , 根据三个垂直关系得到 $DC \parallel OG \parallel EF$, 得到 $\angle CDO = \angle GOD$, $\frac{DG}{GE} = \frac{CO}{OF} = 1$, 证明 $\angle COD = 90^\circ$, 从而得到

$DF = CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{5}$, 判定 $\triangle COD \cong \triangle DGO$ 继而求出 $DG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 进而求出 DE , 用勾股

定理求出 EF , 从而得解.

【详解】 解: 连接 OD , DF , 过 O 作 $OG \perp DE$ 于 G ,



∵ $DE \perp CD, FE \perp DE$

∴ $DC \parallel OG \parallel EF$,

∴ $\angle CDO = \angle GOD$, $\frac{DG}{GE} = \frac{CO}{OF} = 1$,

设圆 O 半径为 2,

点 C 是 AO 的中点,

∴ $AC = CO = 1$,

∵ 点 D 是弧 AB 的中点,

∴ $\angle COD = 90^\circ$,

$$\therefore DF = CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \angle CDO = \angle GOD, \quad \angle COD = \angle DGO$$

$$\therefore \triangle COD \cong \triangle DGO,$$

$$\therefore \frac{CD}{DO} = \frac{CO}{DG}, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{DG},$$

$$\therefore DG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore DE = DG + GE = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

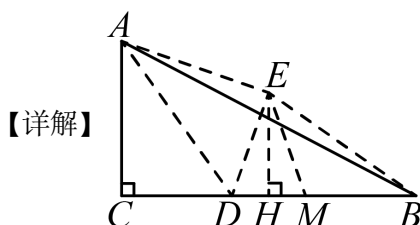
$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

18. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 8$, 点 D 是 BC 边上一点, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 折叠, 点 C 落在点 E 处, 连结 BE , 如果 $\angle CAE = 2\angle EBC$, 那么点 E 到直线 BC 的距离是_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用, 折叠的性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理等知识, 先证明 $\angle CAD = \angle EBC$, 再以点 E 为圆心, DE 为半径画圆于 BD 交于 M , 过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H , 得到 $DE = EM = BM$, $CH = \frac{1}{2}BC = 4$, 设 $CD = m$, 由 $\tan \angle CAD = \tan \angle EBC$ 求出 EH , 最后在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中利用勾股定理求出未知数求出 m 的值, 从而得解. 利用 $\angle CAE = 2\angle EBC$ 得到 $\angle CAD = \angle EBC$, 从而将二倍角转化为角度相等关系是解题的关键.



由题知: $AC = AD$, $CD = DE$, $\angle CAD = \angle EAD$, $\angle C = \angle AED = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CDE = 360^\circ - \angle C - \angle AED - \angle CAE = 180^\circ - \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAE = 180^\circ - \angle CDE = \angle EDB,$$

又 $\because \angle CAE = 2\angle EBC$,

$\therefore \angle EDB = 2\angle EBC$, $\angle CAD = \angle EBC$,

以点 E 为圆心, DE 为半径画圆于 BD 交于 M , 过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H , 即 $DE = EM$,

$\therefore \angle EMD = \angle EDB = 2\angle EBC$, $DH = MH$,

$\therefore DE = EM = BM$, $CH = \frac{1}{2}BC = 4$,

设 $CD = m$, 则 $DE = EM = BM = m$

$\therefore DH = HM = 4 - m$

$\therefore \tan \angle CAD = \tan \angle EBC$, 即 $\frac{CD}{AC} = \frac{EH}{HB}$,

$\therefore \frac{m}{3\sqrt{2}} = \frac{EH}{4}$, $EH = \frac{2\sqrt{2}}{3}m$,

在 $Rt\triangle DEH$ 中, $DH^2 + EH^2 = DE^2$, 即 $(4-m)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}m\right)^2 = m^2$,

解得: $m_1 = 3, m_2 = 6$,

$\therefore EH = \frac{2\sqrt{2}}{3}m = 2\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} + |1-\sqrt{3}| + (-2025)^0$.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 涉及二次根式的混合运算, 分数指数幂, 零指数幂及实数的绝对值等知识, 正确进行计算是解题的关键; 分母化, 计算分数指数幂, 实数的绝对值及零指数幂, 最后加减即可.

【详解】 解: 原式 $= 3 + \sqrt{3} - 3 + (-1 + \sqrt{3}) + 1$
 $= 3 + \sqrt{3} - 3 - 1 + \sqrt{3} + 1$
 $= 2\sqrt{3}$.

20. 解方程: $\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} = 1$.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程，根据解分式方程的一般步骤求解即可.

【详解】 解: $x + 3 - 6 = x^2 - 9$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$(x-3)(x+2) = 0,$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

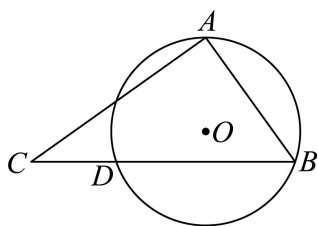
$$x_1 = 3, x_2 = -2$$

经检验: $x_1 = 3$ 是原方程的增根, $x = -2$ 是原方程的解,

所以原方程的解是 $x = -2$.

21. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$, $\odot O$ 经过点 A 、 B , 与 BC 的另一个交点为 D ,

$$\widehat{AD} = \widehat{AB}, BD = 8.$$



(1) 求 $\odot O$ 的半径长;

(2) 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】 (1) $r = 3\sqrt{2}$

(2) $8\sqrt{2}$

【解析】

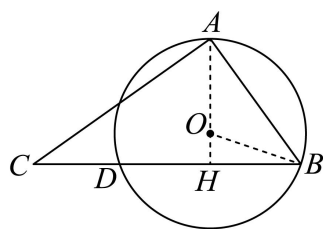
【分析】 本题主要考查了垂径定理、勾股定理、解直角三角形等知识, 正确作出辅助线是解题关键.

(1) 连接 AO 延长交 BD 于 H , 连接 BO , 结合 $\widehat{AD} = \widehat{AB}$ 易得 $AH \perp BD$, 由垂径定理可知 $BH = DH = 4$, 进而由勾股定理可解得 AH 得值, 设圆 O 半径为 r , 则 $AO = BO = r$, $OH = 4\sqrt{2} - r$, 然后由勾股定理解得 r 的值即可;

(2) 连接 AD , 证明 $\angle C = \angle BAH$, 由正切的定义可知 $\tan \angle C = \tan \angle BAH$, 即 $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$, 代入求得 $CH = 8$, 易知 $CD = CH - DH = 4$, 然后根据三角形面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：如下图，连接 AO 延长交 BD 于 H ，连接 BO ，



$$\because \widehat{AD} = \widehat{AB},$$

$$\therefore AH \perp BD,$$

$$\because BD = 8,$$

$$\therefore BH = DH = 4,$$

$$\because AB = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4^2} = 4\sqrt{2},$$

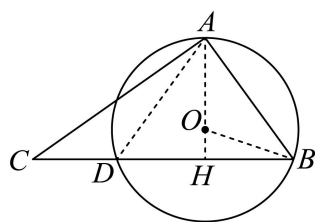
设圆 O 半径为 r ，则 $AO = BO = r, OH = 4\sqrt{2} - r$ ，

$$\therefore BH^2 + OH^2 = BO^2, \text{ 即 } 4^2 + (4\sqrt{2} - r)^2 = r^2$$

解得： $r = 3\sqrt{2}$ ；

【小问 2 详解】

连接 AD ，如下图，



$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C + \angle CAH = \angle CAH + \angle BAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle BAH,$$

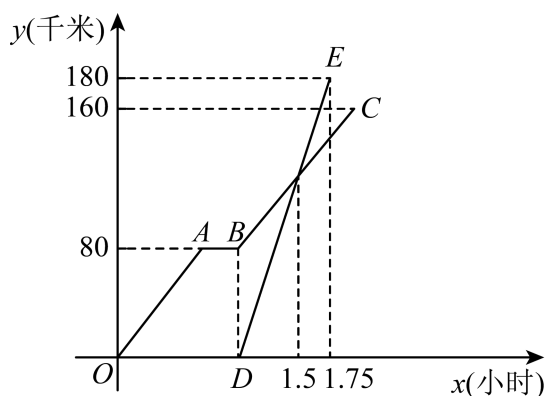
$$\therefore \tan \angle C = \tan \angle BAH, \text{ 即 } \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH},$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{2}}{CH} = \frac{4}{4\sqrt{2}}, \text{ 解得 } CH = 8,$$

$$\therefore CD = CH - DH = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AH = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

22. 五一期间，小海与小华两家人相约到乙城市某景区游玩，小海家驾驶私家车从甲城市直接前往乙城市该景区，已知小海家出发 40 分钟后，途经服务区休息了 20 分钟，继续出发，此时小华家乘高铁从甲城市出发，先到乙城市的火车站。图中的折线 $OABC$ 和线段 DE 分别反映了小海、小华两家人所行路程 y (千米) 与时间 x (小时) 的函数关系，根据图象提供的信息回答下列问题：



- (1) 线段 DE 反映了小华家乘坐高铁所行的路程 y (千米) 与时间 x (小时) 的函数关系. 请求出线段 DE 的表达式, 不用写出定义域;
- (2) 当小华家追上小海家时, 距离乙城市的火车站还有_____千米;
- (3) 当小华家到达乙城市的火车站, 小海家还需_____小时到达景区.

【答案】 (1) $y = 240x - 240$

(2) 60 (3) 0.25

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用.

- (1) 利用待定系数法求解即可;
- (2) 将 $x = 1.5$ 代入 $y = 240x - 240$, 求解即可;
- (3) 根据题意求得当小华家到达火车站时, 小海家已经行驶了 1.75 小时, 据此即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设线段 DE 的表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

由题知: $D(1, 0)$, $E(1.75, 180)$,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 0 \\ 1.75k + b = 180 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k = 240 \\ b = -240 \end{cases}$,

所以线段 DE 的表达式为 $y = 240x - 240$;

【小问 2 详解】

解: 由题意得, 将 $x = 1.5$ 代入 $y = 240x - 240$,

得 $y = 120$,

小华家到达火车站时 $y = 180$, 所以距离乙城市火车站还有 $180 - 120 = 60$ (千米);

故答案为: 60;

【小问 3 详解】

解: 小华家到达乙城市火车站用时 $1.75 - 1 = 0.75$ (小时),

小海家到达景区用时 2 小时,

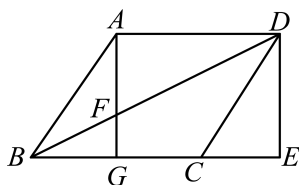
当小华家到达火车站时, 小海家已经行驶了 1.75 小时,

所以还需 $2 - 1.75 = 0.25$ (小时).

故答案为: 0.25.

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $DE \perp BC$, 垂足为点 E , 点 G 是 BC 边上一点, 连接 AG

交 BD 于点 F , $\frac{BG}{GE} = \frac{GF}{AF}$.



(1) 求证: 四边形 $AGED$ 是矩形;

(2) 连接 AC 与 BD 交于点 O , 如果 $OA^2 = OF \cdot OB$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查矩形的判定, 相似三角形的判定与性质, 菱形的判定, 正确理解题意是解题的关键:

(1) 先根据平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 推出 $\frac{BG}{AD} = \frac{GF}{AF}$, 再证明 $AD = GE$, 进而可得出结论;

(2) 连接 OG , 先证明 $AO = OG$, 再证明 $\triangle GOF \sim \triangle BOG$, 再推出 $\angle AOF = 90^\circ$, 进而可得出结论

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC$,

$$\therefore \frac{BG}{AD} = \frac{GF}{AF},$$

$$\therefore \frac{BG}{GE} = \frac{GF}{AF},$$

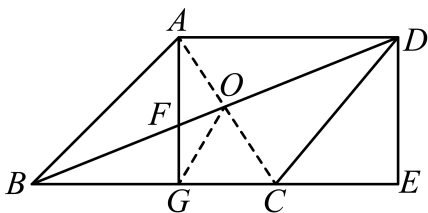
$\therefore AD = GE$,

$\because AD \parallel GE, DE \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $AGED$ 是矩形;

【小问 2 详解】

如图:



连接 OG ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore O$ 为 AC 中点,

$\because \angle AGE = 90^\circ$,

$\therefore AO = OG$,

$\because OG^2 = OF \cdot OB$,

$$\therefore \frac{OG}{OB} = \frac{OF}{OG}, \angle BOG = \angle FOG,$$

$\therefore \triangle GOF \sim \triangle BOG$,

$\angle GBO = \angle FGO$,

$\because \angle GAO = \angle FGO$,

$\therefore \angle BGO = \angle FAO$,

$\because \angle FBG + \angle BFG = 90^\circ$,

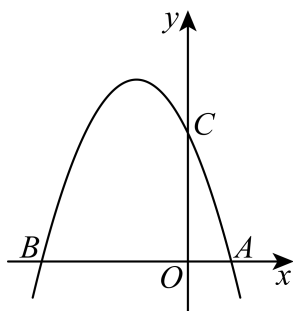
$\therefore \angle FAO + \angle AFO = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOF = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

24. 如图, 已知平面直角坐标系 xOy , 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 对称轴是直线 $x = -1$.



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 将该抛物线平移得到新抛物线, 点 A 的对应点记作点 E , 点 C 的对应点记作点 F .

①若点 E 、 F 分别落在 y 轴的负半轴和线段 BC 上, 求 $BF:BC$ 的值;

②若点 F 落在第二象限的原抛物线上, 连接 FB 、 CE , 如果 $FB \parallel CE$, 求点 F 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) ① $\frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$; ② $F(-2, 3)$

【解析】

【分析】 本题考查求二次函数的解析式,

(1) 由题意得 $c = 3$, $-\frac{b}{2a} = -1$, 求出 $B(-3, 0)$, 得出函数解析式为 $y = a(x-1)(x+3)$, 将 $C(0, 3)$ 代入, 求出 $a = -1$, 进而可得出答案;

(2) ①设 $E(0, m)$, 点 E 是由点 A 向左平移 1 个单位, 下平移 $-m$ 个单位得到, 求出 $F(-1, 3+m)$, 进而得出直线 $BC: y = x + 3$, 将 $F(-1, 3+m)$ 代入, 求出 $m = -1$, 得出 $\therefore F(-1, 2)$, 进而得出

$BF = 2\sqrt{2}, BC = 3\sqrt{2}$, 即可得出答案;

②设 $F(n, -n^2 - 2n + 3)$ 由于点 F 是由 C 平移得到, 所以点 c 向左平移 $-n$ 个单位, 向下平移 $n^2 + 2n$ 个单位, 得出 $E(1+n, -n^2 - 2n)$, 进而得出 $-n+1 = \frac{n^2 + 2n + 3}{-1-n}$, 求出 $n = -2$, 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：由题意得 $c = 3$, $-\frac{b}{2a} = -1$,

$$\therefore A(1, 0),$$

$$\therefore B(-3, 0),$$

$$\therefore y = a(x-1)(x+3),$$

将 $C(0, 3)$ 代入可得 $3 = a(0-1)(0+3)$,

解得 $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 - 2x + 3$.

【小问 2 详解】

① 设 $E(0, m)$, 点 E 是由点 A 向左平移 1 个单位, 向下平移 $-m$ 个单位得到,

$$\therefore F(-1, 3+m),$$

令 $y = -x^2 - 2x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$,

$$\therefore B(-3, 0),$$

设直线 BC 表达式为 $y = kx + 3$,

$$\text{则 } 0 = -3k + 3,$$

解得 $k = 1$,

$$\therefore y = x + 3,$$

将 $F(-1, 3+m)$ 代入得: $3+m = -1+3$,

得 $m = -1$,

$$\therefore F(-1, 2),$$

$$\therefore BF = 2\sqrt{2}, BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{2}{3};$$

② 设 $F(n, -n^2 - 2n + 3) (-3 < n < 0)$,

由于点 F 是由 C 平移得到,

所以点 C 向左平移 $-n$ 个单位, 向下平移 $n^2 + 2n$ 个单位,

$$\therefore E(1+n, -n^2-2n),$$

设直线 FB 的表达式为 $y = k_1x + b_1$,

$$\text{则} \begin{cases} -3k_1 + b_1 = 0 \\ nk_1 + b_1 = -n^2 - 2n - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 1 - n \\ b_1 = 3 - 3n \end{cases},$$

$$\therefore y = (1-n)x + 3 - 3n,$$

$$\text{同理直线 } CE \text{ 的表达式为 } y = -\frac{n^2 + 2n + 3}{n+1}x + 3$$

$$\because FB \parallel CE,$$

$$\therefore -n + 1 = -\frac{n^2 + 2n + 3}{n+1},$$

$$\therefore n = -2,$$

$$\therefore F(-2, 3)$$

25. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 点 D 是直线 BC 上一点, 点 E 是射线 CB 上一点, $\angle DAE = \angle CAB$.

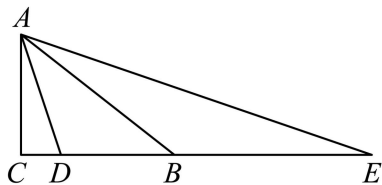
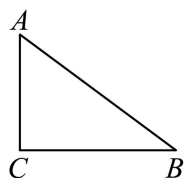


图1



备用图

- (1) 如图 1, 当 $AB = BE$ 时, 求 CD 的长;
- (2) 当点 D 在射线 CB 上时, 设 $CD = x$, $BE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 过点 B 作 $BF \perp AB$, 交射线 AE 于点 F , 如果以 D 为圆心, CD 为半径的圆与以点 F 为圆心, FB 为半径的圆有且只有一个交点, 求 CE 的长.

【答案】 (1) 1 (2) $y = \frac{25x}{9-4x} \left(0 < x < \frac{9}{4} \right)$

(3) $CE = \frac{144 \pm 75\sqrt{3}}{11}$

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定与性质，勾股定理，解直角三角形，圆的综合问题等知识，正确作出辅助线是解题的关键.

(1) 先用勾股定理求出 $AB = 5$ ，证明 $\angle CAD = \angle E$ ，再运用这两个角的正切值列出方程求解即可；

(2) 过点 E 作 AB 的垂线交 AB 延长线于点 H ，可得 $BE = y = 5n$ ，由 $\angle DAE = \angle CAB$ 同理得到

$\tan \angle CAD = \tan \angle HAE$ ，从而得到 $\frac{CD}{AC} = \frac{HE}{AH}$ ，即 $\frac{x}{3} = \frac{3n}{5+4n}$ ，求出 n ，从而得到

$$y = 5n = \frac{25x}{9-4x} \left(0 < x < \frac{9}{4} \right);$$

(3) 分当 D 在线段 BC 上时，当点 D 在线段 BC 延长线上时两者情况，运用相似三角形的判定与性质求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$,

$$\therefore AB = 5,$$

$$\because \angle DAE = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAE,$$

$$\because AB = BE,$$

$$\therefore AB = BE = 5,$$

$$\therefore CE = 9,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle E,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle E,$$

设 $CD = m$,

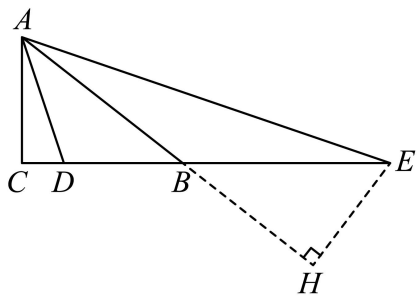
$$\therefore \tan \angle CAD = \tan \angle E,$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{CE}, \text{ 即 } \frac{m}{3} = \frac{3}{9},$$

解得： $m = 1$;

【小问 2 详解】

如图：过点 E 作 AB 的垂线交 AB 延长线于点 H ,



由 $\angle ABC = \angle EBP$,

设 $BE = y = 5n$,

$\therefore EH = 3n, BH = 4n$,

$\because \angle DAE = \angle CAB$,

$\therefore \tan \angle CAD = \tan \angle HAE$,

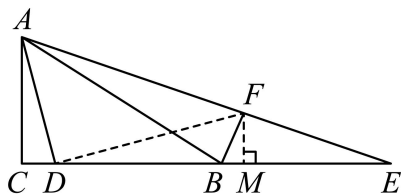
$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{HE}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{3} = \frac{3n}{5+4n},$$

$$\text{解得: } n = \frac{5x}{9-4x},$$

$$\therefore y = 5n = \frac{25x}{9-4x} \left(0 < x < \frac{9}{4} \right);$$

【小问3 详解】

解: 1° 如图: D 在线段 BC 上时, 过 F 作 $FM \perp BE$ 于 M , 连接 DF ,



$\because \angle AFB = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB + \angle ACB = 90^\circ, \angle FMB + \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle MFM = \angle CAD$,

$\because \angle ABC = \angle EBP$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle AFB$,

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BF} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{BF} \Rightarrow BF = \frac{5}{3}x,$$

$$\therefore BM = x, MF = \frac{4}{3}x,$$

$$\text{同理: } BF = \frac{5}{3}x, MF = \frac{4}{3}x, BM = x,$$

$$\sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = x + \frac{5}{3}x,$$

$$\text{解得: } x = \pm\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore MF = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$\because MF \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle MFE \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{MF}{AC} = \frac{ME}{CE} \Rightarrow \frac{ME}{CE} = \frac{4}{9}\sqrt{3},$$

$$\therefore MC = 4 - \sqrt{3},$$

$$\therefore CE = \frac{9}{9 + 4\sqrt{3}}(4 - \sqrt{3}) = \frac{144 - 75\sqrt{3}}{11},$$

$$\text{综上: } CE = \frac{144 \pm 75\sqrt{3}}{11}.$$