

2025 学年第二学期九年级命题指导研修

数学样卷

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 24 题. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
4. 填空题须在对应矩形框内作答, 超出对应边框作答无效.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列关于 $(x^2)^3$ 计算所得的结果中, 正确的是 ()

- A. x^5 B. x^6 C. x^8 D. x^9

【答案】 B

【解析】

【详解】解: $(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6$.

2. 已知 a 是 b 的相反数, 且 $a \neq 0$, 那么下列式子中正确的是 ()

- A. $a + b = 0$ B. $a - b = 0$ C. $a \cdot b = 1$ D. $a \div b = 1$

【答案】 A

【解析】

【详解】解: $\because a$ 是 b 的相反数,

$\therefore a + b = 0$, 故 A 正确,

$\because a \neq 0$,

$\therefore a \neq b$, 即 $a - b \neq 0$, 故 B 错误;

$\because a \cdot b = a \cdot (-a) = -a^2 < 0$, 故 C 错误;

$\because a \div b = -1$, 故 D 错误.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么下列各数中, m 可以取的值是

()

A. -3

B. -2

C. -1

D. 0

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次方程有两个不相等的实数根，可得根的判别式 $\Delta > 0$ ，计算得到 m 的取值范围后，即可结合选项选出正确答案.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 4 + 4m > 0,$$

解得 $m > -1$,

只有 $0 > -1$ ，符合要求，

因此 m 可以取的值是0.

4. 某校举办校园歌手大奖赛，在评委评定的十个分数中，去掉一个最高分，去掉一个最低分，剩余的八个分数与原来的十个分数相比，一定不会变化的统计量是（ ）

A. 平均数

B. 众数

C. 中位数

D. 方差

【答案】C

【解析】

【详解】解：将10个分数从小到大排序，原中位数是排序后第5个和第6个数据的平均数，

$\therefore$ 去掉一个最高分和一个最低分后，剩余8个数据排序后，中间的两个数仍是原数据的第5个和第6个，

$\therefore$ 中位数一定不变，故C正确.

对选项A： $\because$ 去掉最高分和最低分后，数据总和发生改变，

$\therefore$ 平均数可能变化，A错误.

对选项B：若原数据的众数是最高分或最低分，去掉后众数会发生改变，

因此众数可能变化，B错误.

对选项D：方差反映数据的波动程度，去掉两端数据后数据的波动程度通常改变，

因此方差可能变化，D错误.

5. 已知一个正多边形的中心角等于 60° ，那么下列关于这个正多边形的结论中，错误的是（ ）

A. 边数为6

B. 每个外角都等于 60°

C. 边长与半径长的比为1:2

D. 既是轴对称图形也是中心对称图形

【答案】C

【解析】

【分析】先根据正多边形中心角和为 360° 求出正多边形边数，再结合正多边形的性质逐一判断选项即可.

【详解】解：∵该正多边形的中心角为 60° ，

$$\therefore \text{边数 } n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6,$$

∴该多边形为正六边形.

A、边数为6，结论正确，故选项不符合题意；

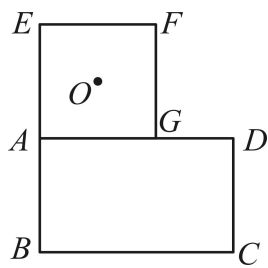
B、正六边形每个外角为 $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ，结论正确，故选项不符合题意；

C、∵正六边形可被中心与顶点的连线分为6个全等的等边三角形，正多边形的半径为等边三角形的边长，

∴正六边形的边长等于半径，边长与半径的比为1:1，结论错误，故选项符合题意；

D、正六边形既是轴对称图形，也是中心对称图形，结论正确，故选项不符合题意.

6. 如图1，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 10$. 正方形 $AEFG$ 的顶点 E 在 BA 的延长线上， $AE = AB$ ，点 G 在边 AD 上， O 为正方形 $AEFG$ 的中心，如果过点 O 的一条直线平分这个组合图形的面积，且这条直线分别交 EF 、 BC 于点 M 、 N ，那么线段 MN 的长为 ()



A. $2\sqrt{17}$

B. $4\sqrt{10}$

C. $6\sqrt{5}$

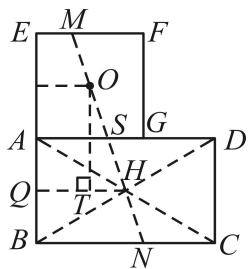
D. 13

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AC ， BD 交于点 H ，过点 O 和点 H 的直线 MN 平分该组合图形的面积，交 AD 于 S ，取 AE 中点 P ，取 AB 中点 Q ，连接 OP ， HQ ，过点 O 作 $OT \perp QH$ 于 T ，由三角形中位线定理可求 $QH = \frac{1}{2}BC = 5$ ， $QH \parallel BC$ ， $AQ = BQ = 3$ ， $PO = \frac{1}{2}AG = 3$ ， $PO \parallel AG$ ， $EP = AP = 3$ ，由平行线分线段成比例可得 $MO = OS = SH = NH$ ，由勾股定理可求 OH 的长，即可求解.

【详解】解：如图，连接 AC ， BD 交于点 H ，过点 O 和点 H 的直线 MN 平分该组合图形的面积，交 AD 于 S ，取 AE 中点 P ，取 AB 中点 Q ，连接 OP ， HQ ，过点 O 作 $OT \perp QH$ 于 T ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AH = HC$,

∵ Q 是 AB 中点,

∴ $QH = \frac{1}{2}BC = 5$, $QH \parallel BC$, $AQ = BQ = 3$,

∵ 四边形 $AEFG$ 是正方形, $AE = AB$,

∴ $AG = AE = AB = 6$,

同理可求 $PO = \frac{1}{2}AG = 3$, $PO \parallel AG$, $EP = AP = 3$,

∴ $PO \parallel AD \parallel BC \parallel EF \parallel QH$, $EP = AP = AQ = BQ$,

∴ $MO = OS = SH = NH$, $\angle OPQ = \angle PQH = 90^\circ$,

∵ $OT \perp QH$,

∴ 四边形 $POTQ$ 是矩形,

∴ $PO = QT = 3$, $OT = PQ = 6$,

∴ $TH = QH - QT = 2$,

∴ $OH = \sqrt{OT^2 + TH^2} = 2\sqrt{10}$,

∴ $MN = 2OH = 4\sqrt{10}$,

二、填空题: (本大题共 11 题, 每题 4 分, 满分 44 分)

7. 计算: $2x^2 \cdot 3xy =$ _____.

【答案】 $6x^3y$

【解析】

【分析】 根据整式乘法法则即可计算.

【详解】 $2x^2 \cdot 3xy = 6x^3y$

【点睛】 此题主要考查整式的乘法, 解题的关键是熟知整式乘法法则进行计算.

8. 方程 $\sqrt{2x+3}=2$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 将方程两边平方，把原方程转化为一元一次方程，求解后检验即可得到原方程的解.

【详解】 解： $\sqrt{2x+3}=2$

两边平方，得 $2x+3=4$

移项，得 $2x=4-3$

合并同类项，得 $2x=1$

系数化为1，得 $x = \frac{1}{2}$

检验：当 $x = \frac{1}{2}$ 时，方程左边 $= \sqrt{2 \times \frac{1}{2} + 3} = \sqrt{4} = 2 =$ 右边，

因此 $x = \frac{1}{2}$ 是原方程的解.

9. 函数 $y = \frac{x+1}{x^2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 0$

【解析】

【详解】 解：依题意得 $x^2 \neq 0$ ，解得 $x \neq 0$.

10. 已知正比例函数的图像经过第二、四象限，点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在该正比例函数的图像上，如果 $x_1 < x_2$ ，那么 y_1 _____ y_2 、(填“>”、“<”或“=”)

【答案】 >

【解析】

【分析】 先根据正比例函数图象经过的象限判断比例系数的符号，再结合正比例函数的增减性，比较 y_1 与 y_2 的大小.

【详解】 解：设该正比例函数的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$ ，

因为正比例函数的图像经过第二、四象限，

所以可得 $k < 0$ ，

根据正比例函数的性质，当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小.

又因为 $x_1 < x_2$ ，

所以 $y_1 > y_2$.

11. 已知点 $A(2,3)$ 、 $B(3,b)$ 在同一反比例函数的图像上, 那么 $b =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 先利用点 A 的坐标求出反比例函数的比例系数, 再将点 B 的横坐标代入, 即可求出 b 的值.

【详解】 解: 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

因为点 $A(2,3)$ 在反比例函数图象上, 所以 $k = 2 \times 3 = 6$,

即反比例函数的解析式为 $y = \frac{6}{x}$,

因为点 $B(3,b)$ 在该反比例函数图象上,

所以, 将 $x = 3$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得 $b = \frac{6}{3} = 2$.

12. 有 3 张分别写有数字 2、3、5 的卡片, 如果从这三张卡片中任意抽取两张卡片, 卡片上的数字的积恰好为偶数的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 先列出从三张卡片中任抽两张的所有等可能结果, 再统计积为偶数的结果数, 利用概率公式计算所求概率.

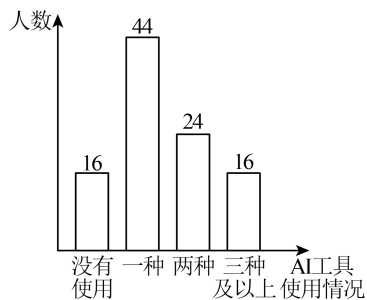
【详解】 解: 从三张卡片中任意抽取两张, 所有等可能的结果如下:

1. 抽取数字 2 和 3, 积为 $2 \times 3 = 6$, 是偶数;
2. 抽取数字 2 和 5, 积为 $2 \times 5 = 10$, 是偶数;
3. 抽取数字 3 和 5, 积为 $3 \times 5 = 15$, 是奇数;

可得共有 3 种等可能的结果, 其中积为偶数的结果有 2 种,

$\therefore$ 卡片上的数字的积恰好为偶数的概率是 $\frac{2}{3}$.

13. 近年来, AI 工具逐渐融入学生学习生活中, 某校为了了解本校学生使用 AI 工具的情况, 随机抽取了部分学生进行问卷调查, 并将调查所得数据整理后绘制成如图的条形统计图. 如果该校共有 1000 名学生, 那么根据调查结果, 估计该校学生中使用两种及以上 AI 工具约有_____人.



【答案】 400

【解析】

【分析】 本题考查用样本频率估计总体频率.

【详解】 解: 由统计图可知该校学生中使用两种及以上 AI 工具的样本频率为

$$\frac{24+16}{24+16+16+44} \times 100\% = 40\%,$$

故 1000 名学生中使用两种及以上 AI 工具约有 $1000 \times 40\% = 400$ (人).

14. 2025 年中国国内生产总值 (GDP) 约为 1.4×10^{14} 元, 预计 2026 年将比 2025 年 GDP 增长 5%, 那么预计 2026 年比 2025 年 GDP 增长_____元. (结果用科学记数法表示)

【答案】 7×10^{12}

【解析】

【分析】 求出 2026 年比 2025 年 GDP 增长的钱数, 再用科学记数法表示即可.

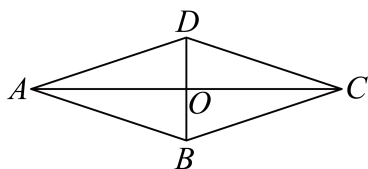
【详解】 解: 由题意可得, 增长的 GDP 为: $1.4 \times 10^{14} \times 5\%$

$$= 1.4 \times 10^{14} \times 0.05$$

$$= 0.07 \times 10^{14}$$

$$= 7 \times 10^{12}.$$

15. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 如果 $AO = 3BO$, 那么 $|\overrightarrow{CD}| : |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{6} : \frac{1}{6}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】由菱形性质、勾股定理及向量加法的平行四边形法则求解即可.

【详解】解: $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$,

$$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|,$$

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ,

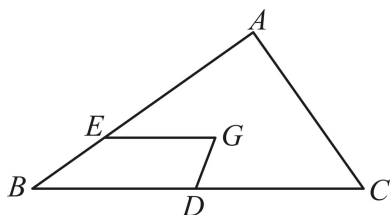
$$\therefore OC = OA = \frac{1}{2}AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD, \quad CD = AB, \quad \text{且 } BD \perp AC,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $AO = 3BO$, 设 $OB = x$, 则 $OA = 3x$, 由勾股定理可得 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{10}x$,

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| = AB = \sqrt{10}x, \quad |\overrightarrow{AC}| = AC = 2OA = 6x,$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{CD}| : |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = \sqrt{10}x : 6x = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

16. 如图, 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 E 在边 AB 上, $EG \parallel BC$, D 是 BC 中点, 连接 GD . 如果 $GD : EG : AB = 1 : 2 : 5$, $BC = 12$, 那么点 G 到直线 AC 的距离是_____.

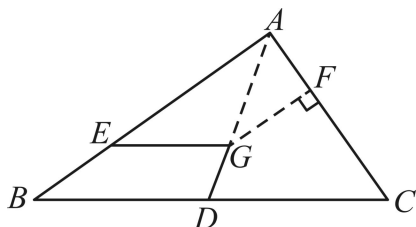


【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】连接 AG , 过点 G 作 $GF \perp AC$, 可得 $AD = BD$, 即可证明 $\angle BAC = 90^\circ$, 利用 $\sin \angle DAC = \sin C$, 解直角三角形即可求得 GF 的值

【详解】解: 如图, 连接 AG , 过点 G 作 $GF \perp AC$,



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, D 是 BC 中点,

$$\therefore A, G, D \text{ 三点共线}, \quad AG = 2GD, \quad DB = DC,$$

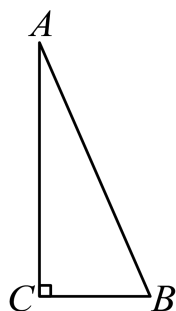
$$\because GD : EG : AB = 1 : 2 : 5,$$

$$\therefore EG = 2GD, \quad AB = 5GD,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AG = EG, \\
&\therefore \angle AEG = \angle EAG, \\
&\because EG \parallel BC, \\
&\therefore \angle AEG = \angle EAG = \angle B, \\
&\therefore AD = BD, \\
&\because DB = DC, \\
&\therefore AD = BD = DC, \\
&\therefore \angle DAC = \angle C, \\
&\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle B + \angle C = 180^\circ \times \frac{1}{2} = 90^\circ, \\
&\because BC = 12, \\
&\therefore AD = \frac{1}{2}BC = 6, \\
&\therefore GD = \frac{1}{3}AD = 2, \quad AG = \frac{2}{3}AD = 4 \\
&\therefore AB = 10, \\
&\therefore \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{6}, \\
&\therefore GF = AG \cdot \sin \angle DAC = AG \cdot \sin C = \frac{10}{3},
\end{aligned}$$

即点 G 到直线 AC 的距离是 $\frac{10}{3}$.

17. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 13$, $BC = 5$ (如图所示). 点 D 在边 AB 上 (不与点 A 、 B 重合), $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, 垂足分别为 E 、 F , $\odot E$ 的半径长为 2. 如果 $\odot F$ 与 $\odot E$ 外切, 那么 $\odot F$ 的半径长 r 的取值范围是_____.

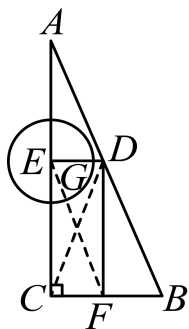


【答案】 $\frac{34}{13} \leq r < 10$

【解析】

【分析】画出图形, 连接 CD , EF , 设 EF 与 $\odot E$ 交于点 G , 证明 $FG = EF - EG = CD - 2$, 求出 FG 的取值范围即可.

【详解】解：如图，连接 CD, EF ，设 EF 与 $\odot E$ 交于点 G ，



如果 $\odot F$ 与 $\odot E$ 外切，则 FG 的长为 $\odot F$ 的半径长，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$\because DE \perp AC$ ， $DF \perp BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 为矩形，

$$\therefore CD = EF,$$

$$\therefore FG = EF - EG = CD - 2,$$

当 $CD \perp AB$ 时， CD 最短，

$$\text{根据三角形面积公式可得，此时 } CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{60}{13},$$

$$\therefore FG = CD - 2 = \frac{34}{13},$$

当点 D 无限接近点 A 时，此时 $FG < AC - 2 = 10$ ，

$$\therefore \frac{34}{13} \leq FG < 10,$$

即 $\odot F$ 的半径长 r 的取值范围是 $\frac{34}{13} \leq r < 10$ 。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 82 分）

18. 计算： $\frac{6}{2+\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + |\sqrt{3}-2| + 9^{\frac{1}{2}}$ 。

【答案】 $8 - 7\sqrt{3}$ 。

【解析】

【分析】通过分母有理化，负整数指数幂，绝对值的意义，分数指数幂化简，再合并即可。

【详解】解： $\frac{6}{2+\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + |\sqrt{3}-2| + 9^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{6(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 9 + 2 - \sqrt{3} + 3$$

$$= 6(2-\sqrt{3}) - 9 + 2 - \sqrt{3} + 3$$

$$= 12 - 6\sqrt{3} - 9 + 2 - \sqrt{3} + 3$$

$$= 8 - 7\sqrt{3}.$$

19. 解方程: $\frac{x}{x+2} - \frac{10}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3}.$

【答案】 $x = 7$

【解析】

【详解】 解: 原方程可化为 $\frac{x}{x+2} - \frac{10}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-3}$

方程两边同乘最简公分母 $(x-3)(x+2)$, 得 $x(x-3) - 10 = 2(x+2)$

展开整理得 $x^2 - 5x - 14 = 0$

因式分解得 $(x-7)(x+2) = 0$

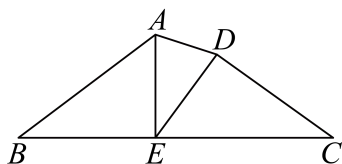
解得 $x_1 = 7, x_2 = -2$

检验: 当 $x = -2$ 时, $(x-3)(x+2) = 0$, 原分式方程分母为 0, 无意义, 因此 $x = -2$ 是增根, 舍去

当 $x = 7$ 时, $(x-3)(x+2) \neq 0$

因此原方程的解为 $x = 7$

20. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle C$, 点 E 在边 BC 上, $\angle AED = \angle B$, $AE = ED$, $BE = 10$.



(1) 求 CD 的长;

(2) 如果 $AB = 12$, $\sin C = \frac{3}{5}$, 求 $\tan \angle DEC$ 的值.

【答案】 (1) $CD = 10$

(2) $\tan \angle DEC = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\angle CED = \angle BAE$ ，然后 AAS 根据证明 $\triangle CED \cong \triangle BAE$ ，进而可求出 CD 的长；

(2) 由 $\angle B = \angle C$ 可知 $\sin B = \frac{3}{5}$ ，从而求出 $EH = 6$ ，利用勾股定理求出 $BH = 8$ ，然后结合 $\angle DEC = \angle BAE$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle AEC = \angle AED + \angle CED = \angle B + \angle BAE$ ， $\angle AED = \angle B$ ，

$$\therefore \angle CED = \angle BAE.$$

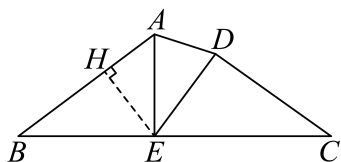
$$\because \angle B = \angle C, \quad AE = ED,$$

$$\therefore \triangle CED \cong \triangle BAE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CD = BE = 10.$$

【小问 2 详解】

解：如图，过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H ，



$$\because \angle B = \angle C, \quad \sin C = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5} = \frac{EH}{BE} = \frac{EH}{10},$$

$$\therefore EH = 6,$$

$$\therefore BH = \sqrt{BE^2 - EH^2} = 8,$$

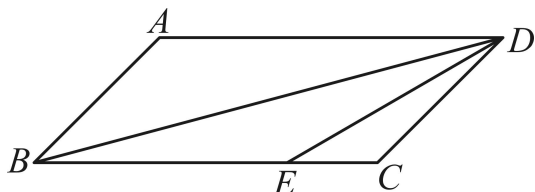
$$\therefore AH = AB - BH = 4,$$

$$\because \triangle CED \cong \triangle BAE,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BAE,$$

$$\therefore \tan \angle DEC = \tan \angle BAE = \frac{EH}{AH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

21. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 在边 BC 上， $DC^2 = CE \cdot CB$ ， $\angle CED = \angle ABD$.



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

(2) 联结 AC 交 BD 于点 O ，联结 OE . 如果 $BE \cdot AD = BD \cdot AB$ ，求证： $EO \perp BD$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据已知得出 $\triangle DCE \sim \triangle BCD$ ，则 $\angle CED = \angle CDB$ ，结合已知可得 $\angle CDB = \angle ABD$ ，即可证明 $AB \parallel CD$ ，结合条件 $AD \parallel BC$ ，即可得证；

(2) 根据 $\triangle DCE \sim \triangle BCD$ 得出 $BD \cdot DC = BC \cdot DE$ ，根据平行四边形的性质可得 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ， $OB = OD$ ，代入已知等式得出 $BE = DE$ ，根据三线合一，即可得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because DC^2 = CE \cdot CB$

$$\therefore \frac{DC}{CB} = \frac{CE}{DC}$$

又 $\because \angle ECD = \angle DCB$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCD$$

$$\therefore \angle CED = \angle CDB$$

又 $\because \angle CED = \angle ABD$

$$\therefore \angle CDB = \angle ABD$$

$$\therefore AB \parallel CD$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle DCE \sim \triangle BCD$

$$\therefore \frac{DC}{CB} = \frac{CE}{DC} = \frac{DE}{BD}$$

$$\therefore BD \cdot DC = BC \cdot DE$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC, OB = OD$$

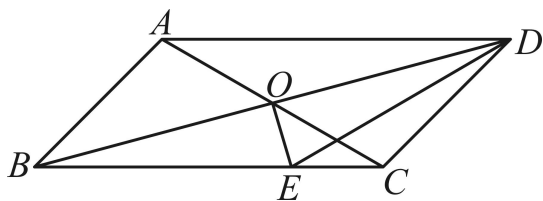
$$\therefore BD \cdot AB = BC \cdot DE$$

$$\because BE \cdot AD = BD \cdot AB,$$

$$\therefore BE \cdot AD = BC \cdot DE \text{ 即 } BE = DE$$

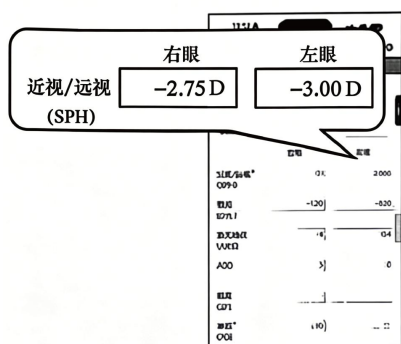
又 $OB = OD$

$$\therefore OE \perp BD.$$



22. 小普同学在物理课上学习光的折射知识后，知道了近视眼镜的镜片是凹透镜。

【生活观察】生活中配眼镜时需要先验光，如图是店家提供的验光单的一部分，其中“ -2.75D ”中的“ $-$ ”表示该镜片为近视眼镜的镜片，“ 2.75D ”表示该镜片的透镜焦度是 2.75 （焦度是表示透镜对光线偏折能力强弱的物理量，用 Φ 表示），平时说的眼镜镜片的度数 y 关于透镜焦度 Φ 的函数解析式为 $y = 100\Phi$ 。



(1) 根据上图验光单的一部分，直接写出右眼和左眼眼镜镜片的度数。

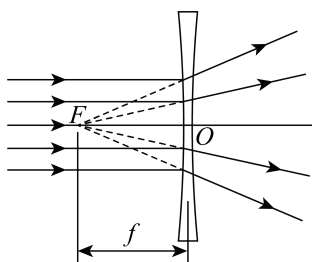
【问题解决】小普同学为了验证一副近视眼镜和一张标记左眼、右眼均为 -5.00D 的验光单是否匹配，他综合数学与物理所学的知识（见材料一、二），设计了一个验证实验（见材料三）。

材料一：摘自数学八上教材 $P79$ 页

近视眼镜镜片的度数 y （度）与镜片焦距 f （米）成反比例。已知 400 度的近视眼镜镜片的焦距为 0.25 米。

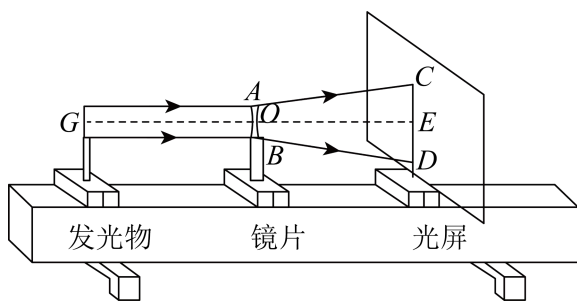
材料二：摘自物理八上教材 $P98$ 页

如图所示，平行于主轴的光通过凹透镜后，会向远离主轴的方向偏折，这些光的反向延长线相交于主轴上一点 F ，点 F 叫做凹透镜的虚焦点。凹透镜的光心 O 是主轴上一个特殊的点。虚焦点 F 到光心 O 的距离叫做凹透镜的焦距，用字母 f 表示。



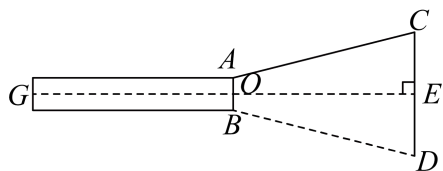
材料三：把这副近视眼镜的镜片看作一个圆，如图，把发光物、镜片和光屏放置在光具底

座上，将它们的中心位置调节到高度一致。用一束平行于主光轴 GE 的光线射向镜片，镜片光心为点 O ，在镜片另一侧的光屏上形成了一个圆形光斑。



(2) 根据材料一，求近视眼镜镜片的透镜焦度 Φ 关于镜片焦距 f 的函数解析式。

(3) 根据材料三抽象出数学模型 (如图)，镜片直径 AB 与光斑直径 CD 平行， $GE \perp CD$ ，测得 $AB = 0.06$ 米， $CD = 0.15$ 米，镜片光心 O 到光屏的距离 OE 为 0.3 米。结合材料二，请判断这副近视眼镜的度数是否与这张验光单匹配？并阐述理由。



【答案】(1) 右眼度数为 275 度，左眼度数为 300 度；

$$(2) \quad \Phi = \frac{1}{f}$$

(3) 这副眼镜与验光单匹配，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据度数 y 关于透镜焦度 Φ 的函数解析式为 $y = 100\Phi$ ，分别代入数据计算即可；

(2) 设 $y = \frac{k}{f}$ ($k \neq 0$)，把 $y = 400$ ， $f = 0.25$ 代入，求得 $k = 100$ ，再根据 $y = 100\Phi$ ，代入计算即可；

(3) 延长 CA, DE 交于点 F ，由题意，得 E 点是 CD 的中点，证明 F 点在 GE 上，设凹透镜虚焦点 F 到光心 O 的距离为焦距 f ，证明 $\triangle FAB \sim \triangle FCD$ ，推出 $\frac{AB}{CD} = \frac{OF}{OF + OE}$ ，求出 $f = 0.2$ 米，由 (2) 的结论

$\Phi = \frac{1}{f}$ ，代入计算即可解答。

【小问 1 详解】

解：右眼焦度 $\Phi = -2.75D$ ，则 $y = 100 \times 2.75 = 275$ (度)；

左眼焦度 $\Phi = -3.00\text{D}$ ，则 $y = 100 \times 3.00 = 300$ (度)；

答：右眼度数为 275 度，左眼度数为 300 度；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 近视眼镜度数 y 与焦距 f 成反比例，

$$\text{设 } y = \frac{k}{f} (k \neq 0),$$

$$\text{把 } y = 400, f = 0.25 \text{ 代入得: } 400 = \frac{k}{0.25},$$

解得 $k = 100$ ，

$$\text{因此 } y = \frac{100}{f},$$

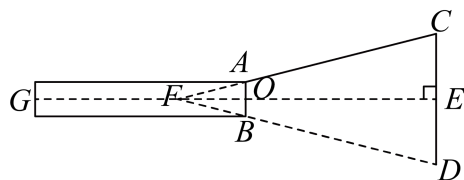
$$\text{又 } \because y = 100\Phi, \text{ 代入得 } 100\Phi = \frac{100}{f},$$

$$\text{化简得: } \Phi = \frac{1}{f};$$

【小问 3 详解】

解：这副眼镜与验光单匹配，理由如下：

如图，延长 CA, DE 交于点 F ，



由题意，得 E 点是 CD 的中点，

$$\therefore CE = DE,$$

$$\because CD \perp GE,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FED = 90^\circ,$$

$$\because EF = EF,$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle FDE (\text{SAS}),$$

$$\therefore FC = FD, \text{ 即 } F \text{ 点在 } CD \text{ 的垂直平分线上},$$

$$\because CD \perp GE, E \text{ 点是 } CD \text{ 的中点},$$

$$\therefore GE \text{ 垂直平分 } CD,$$

$\therefore F$ 点在 GE 上,

设凹透镜虚焦点 F 到光心 O 的距离为焦距 f ,

$\therefore AB \perp GE, CD \perp GE,$

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore \triangle FAB \sim \triangle FCD,$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OF}{OF + OE},$$

$\therefore AB = 0.06$ 米, $CD = 0.15$ 米, $OE = 0.3$ 米,

$$\therefore \frac{0.06}{0.15} = \frac{f}{f + 0.3},$$

解得 $f = 0.2$ 米,

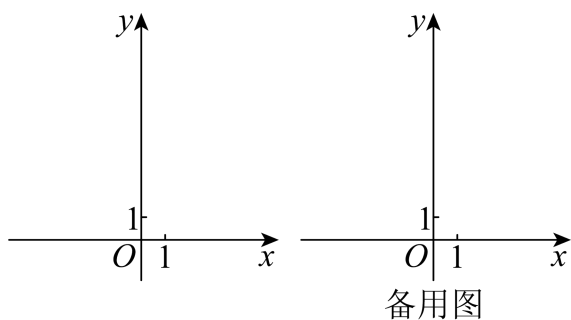
由 (2) 的结论 $\Phi = \frac{1}{f},$

解得 $\Phi = \frac{1}{0.2} = 5D,$

$\therefore$ 是近视镜片, 焦度为 $-5.00D,$

$\therefore$ 和验光单标记一致, 因此匹配.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图所示), 已知某抛物线的表达式为 $y = ax^2 (a > 0)$. 沿着 x 轴的正方向看, 点 M 在抛物线的上升部分, 设直线与 x 轴的夹角为 α .



(1) 如果 $\tan \alpha = 4$, $OM = \sqrt{17}$, 求该抛物线的表达式;

(2) 已知点 N 在抛物线的下降部分, 且 $\angle OMN = 2\alpha$.

①求 $\frac{OM}{MN}$ 的值;

②平移抛物线, 使新抛物线的顶点 O' 落在线段 MN 上, 且新抛物线与 y 轴交于点 C . 已知点 M 的纵坐标为 1, 当四边形 $OMCN$ 是以 ON 为腰的等腰梯形时, 求点 O' 的坐标.

【答案】 (1) $y = 4x^2$

$$(2) \textcircled{1} \frac{1}{3} \textcircled{2} \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{51}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right)$$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数性质、二次函数综合、三角函数和坐标系中两点间距离，正确做出辅助线，利用数形思想是解题的关键.

(1) 以锐角三角函数定义为突破口，由 $\tan \alpha = 4$ 得点 M 横、纵坐标的比例关系，结合 $OM = \sqrt{17}$ 用勾股定理求出 M 点坐标，再通过待定系数法代入抛物线表达式，即可求出解析式；

(2) ①通过作平行线拆分 $\angle OMN = 2\alpha$ ，得到两个相等的 α 角，利用 $\tan \alpha$ 的定义列等式，推导出 M 、 N 两点的横坐标数量关系，再通过勾股定理计算线段长度，最终求得 $\frac{OM}{MN}$ 的定值； ②先由 M 点纵坐标简化 M 、 N 坐标，求出直线 MN 解析式；再利用等腰梯形“对边平行、腰长相等”的性质确定 C 点坐标；最后结合平移后抛物线的顶点式，联立方程求解，即可得到顶点 O' 的坐标.

【小问 1 详解】

解： 设 $M(x, y)$ ($x > 0, y > 0$)， 则

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = 4,$$

$$\therefore y = 4x,$$

$$\text{又 } OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{17}, \text{ 代入 } y = 4x,$$

$$\sqrt{x^2 + (4x)^2} = \sqrt{17x^2} = x\sqrt{17} = \sqrt{17},$$

$$\text{解得 } x = 1, \text{ 则 } y = 4,$$

$$\therefore M(1, 4).$$

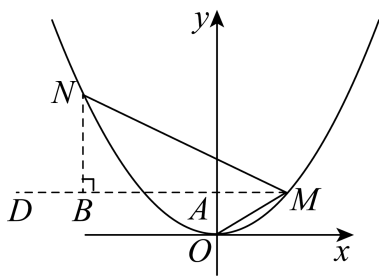
$$\text{把 } M(1, 4) \text{ 代入 } y = ax^2,$$

$$4 = a \cdot 1^2, \quad a = 4,$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为: } y = 4x^2.$$

【小问 2 详解】

解： ①过点 M 作 $MD \parallel x$ 轴 (点 D 在点 M 左侧)， 则 $MD \perp y$ 轴， 设 DM 于 y 轴交于点 A ，， 过点 N 作 $NB \perp MD$ 于点 B .



设 $M(m, am^2)$ ($m > 0$, 在抛物线上升部分),

$\therefore MD \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle DMO = \angle MOP = \alpha$,

$\therefore \angle OMN = 2\alpha$,

$\therefore \angle DMN = \angle OMN - \angle DMO = \alpha$, 即 MD 平分 $\angle OMN$.

在 $\text{Rt}\triangle OAM$ 中, $\tan \alpha = \frac{OA}{MA} = \frac{am^2}{m} = am$,

设 $N(n, an^2)$ ($n < 0$, 在抛物线下降部分),

在 $\text{Rt}\triangle NBM$ 中, $\tan \alpha = \frac{NB}{MB} = \frac{an^2 - am^2}{m - n}$,

$$\therefore \frac{an^2 - am^2}{m - n} = am,$$

$$\frac{a(n - m)(n + m)}{m - n} = am,$$

$$\therefore n = -2m,$$

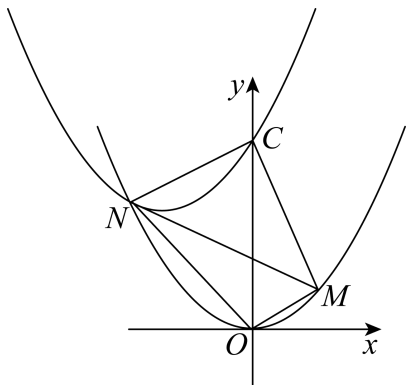
即点 N 坐标为 $(-2m, 4am^2)$.

$$\therefore OM = \sqrt{(m - 0)^2 + (am^2 - 0)^2} = m\sqrt{1 + a^2m^2},$$

$$MN = \sqrt{(-2m - m)^2 + (4am^2 - am^2)^2} = \sqrt{9m^2 + 9a^2m^4} = 3m\sqrt{1 + a^2m^2}$$

$$\therefore \frac{OM}{MN} = \frac{m\sqrt{1 + a^2m^2}}{3m\sqrt{1 + a^2m^2}} = \frac{1}{3}.$$

②



$\therefore$ 点 M 的纵坐标为 1, 即 $am^2 = 1$,

$$\therefore a = \frac{1}{m^2}, \quad M(m, 1),$$

由①的结论, $N(-2m, 4am^2)$,

$$\therefore N(-2m, 4),$$

设直线 MN 的解析式为 $y = px + q$,

代入 $M(m, 1)$ 、 $N(-2m, 4)$,

$$\begin{cases} 1 = pm + q \\ 4 = -2pm + q \end{cases},$$

两式相减得 $-3 = 3pm$

$$\therefore p = -\frac{1}{m},$$

代入得 $q = 2$,

因此直线 MN 的解析式为: $y = -\frac{1}{m}x + 2$.

$\therefore$ 四边形 $OMCN$ 是以 ON 为腰的等腰梯形,

$$\therefore OM \parallel CN,$$

$$OM \text{ 的坡度为 } \frac{1-0}{m-0} = \frac{1}{m},$$

设 $C(0, c)$ (C 在 y 轴上), CN 的坡度为 $\frac{4-c}{-2m-0}$,

由平行得坡度相等得: $\frac{1}{m} = \frac{4-c}{-2m-0}$,

$$\therefore c = 6,$$

即 $C(0, 6)$.

设平移后抛物线的顶点为 $O'(h, k)$,

则平移后的抛物线为 $y = a(x - h)^2 + k$,

抛物线与 y 轴交于 $C(0, 6)$,

代入 $x = 0$ 得:

$$ah^2 + k = 6,$$

又 $\because O'(h, k)$ 在直线 MN 上,

$$\therefore k = -\frac{1}{m}h + 2,$$

将 $a = \frac{1}{m^2}$, $k = -\frac{1}{m}h + 2$ 代入 $ah^2 + k = 6$ 得: $\frac{1}{m^2}h^2 - \frac{1}{m}h + 2 = 6$,

设 $t = \frac{h}{m}$, 方程简化为 $t^2 - t - 4 = 0$, 由求根公式得:

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

因 O' 在线段 MN 上, $-2m \leq h \leq m$, $m > 0$,

$$\therefore -2 \leq \frac{h}{m} \leq 1, \text{ 即 } -2 \leq t \leq 1,$$

$$\therefore t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ 舍去,}$$

$$\therefore t = \frac{1 - \sqrt{17}}{2},$$

$$\text{即 } h = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}m,$$

$\because$ 等腰梯形两腰相等,

$$\therefore ON = MC, \quad ON^2 = MC^2,$$

$$ON^2 = (-2m)^2 + 4^2 = 4m^2 + 16,$$

$$MC^2 = (0 - m)^2 + (6 - 1)^2 = m^2 + 25,$$

$$\therefore 4m^2 + 16 = m^2 + 25,$$

$$\therefore m > 0,$$

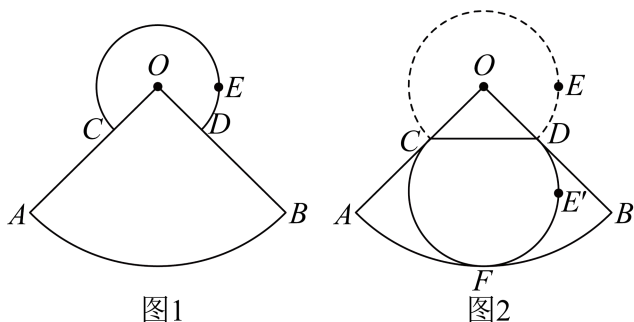
$$\therefore m = \sqrt{3},$$

$$\therefore h = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{51}}{2}$$

$$k = -\frac{1}{\sqrt{3}}h + 2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2},$$

$$\text{点 } O' \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{51}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right).$$

24. 扇形 AOB 与扇形 COD 组成一个如图 1 的图形, 其中扇形 AOB 的圆心角等于 90° , 点 C 、 D 分别在半径 OA 、 OB 上, 分别记扇形 AOB 、扇形 COD 的圆心角所对的弧为 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CED}$, 半径长分别为 R 与 r .



- (1) 已知 $\widehat{AB}$ 的长与 $\widehat{CED}$ 的长相等, $AC = 6$, 求这个图形的面积 S (结果保留 π);
- (2) 连接 CD , 作 $\widehat{CED}$ 关于直线 CD 的对称图形 $\widehat{CE'D}$.
- ① 连接 AB , 如果 $\widehat{CE'D}$ 与 AB 交于点 M 、 N (点 M 在点 N 的左侧), 且 $AM = MN$, 求 R 与 r 之间的数量关系;
- ② 如果 $\widehat{CE'D}$ 所在的圆与 $\widehat{AB}$ 所在的圆内切于点 F (如图 2 所示), 点 P 是 $\widehat{CF}$ 上一点, 连接 FP 并延长交 AC 于点 Q , 当 $\frac{FP}{PQ} = \sqrt{2} + 1$ 时, 求 $\angle CQF$ 的度数.

【答案】(1) 27π

(2) ① $R = 3r$ ② $\angle CQF = 82.5^\circ$

【解析】

【分析】本题是圆和三角形综合题, 考查了扇形面积和弧长公式, 勾股定理应用, 解三角形, 等腰三角形性质, 平行线分线段成比例等知识点.

(1) 根据 $\widehat{AB}$ 的长与 $\widehat{CED}$ 的长相等和扇形弧长公式, 求出 $r = 3, R = 9$, 再利用扇形面积公式求解.

(2) ① 记 O 的对称点为 O_1 , OO_1 与 BC 交点为 P , 延长 OO_1 交 AB 于 Q , 连接 O_1M , 关键是表示出 $\triangle O_1MQ$

各边的长，再利用勾股定理求解；②记 O 的对称点为 O_1 ， OO_1 与 BC 交点为 G ，连接 PG ， O_1P ，作 $O_1H \perp PG$ 于 H ，这样就构造出等腰直角三角形 O_1HG 和直角三角形 O_1HP ，解三角形可求得 $\angle HPO_1 = 30^\circ$ ， $\angle HO_1P = 60^\circ$ ，再利用等腰三角形求出 $\angle O_1PF = 52.5^\circ$ ，根据平行线分线段成比例知 $\angle CQF = \angle GPF = \angle HPO_1 + \angle O_1PF$ 。

【小问 1 详解】

解：由题可知 $OA = R = OC + AC = r + 6$ ，

$$\therefore l_{AB}^{\bullet} = \frac{n_1 \pi R}{180} = \frac{90\pi(r+6)}{180},$$

$$\because \angle COD = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ,$$

$$\therefore l_{CED}^{\bullet} = \frac{n_2 \pi r}{180} = \frac{270\pi r}{180},$$

$$\because l_{AB}^{\bullet} = l_{CED}^{\bullet},$$

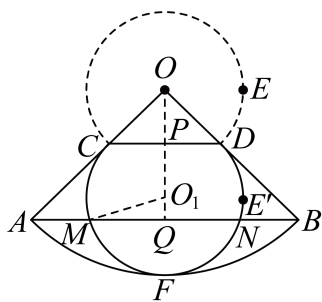
$$\therefore \frac{90\pi(r+6)}{180} = \frac{270\pi r}{180},$$

解得 $r = 3$ ，故 $R = 9$ ，

$$\therefore S = S_{AOB}^{\bullet} + S_{COD}^{\bullet} = \frac{n_1 \pi R^2}{360} + \frac{n_2 \pi r^2}{360} = \frac{90\pi \times 9 \times 9}{360} + \frac{270\pi \times 3 \times 3}{360} = \frac{81\pi}{4} + \frac{27\pi}{4} = 27\pi.$$

【小问 2 详解】

①如图，记 O 的对称点为 O_1 ， OO_1 与 CD 交点为 P ，延长 OO_1 交 AB 于 Q ，连接 O_1M ，



由对称性可知 P 是 CD 中点，由 $\triangle OCD$ 是等腰直角三角形， $CD = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}r$ ，

$$\therefore OP = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}r \text{ 且 } OP \perp CD,$$

再由对称性可知 $OO_1 = 2OP = \sqrt{2}r$ ，

$\triangle OAB$ 同样是等腰直角三角形, $AB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}R$, $OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}R$,

$\therefore CD \parallel AB$,

$\therefore OQ \perp AB$,

$\therefore Q$ 是 AB 中点也是 MN 中点,

由已知得 $MN = \frac{1}{3}AB = \frac{\sqrt{2}}{3}R$,

$\therefore MQ = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{6}R$,

$\therefore O_1Q = OQ - OO_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R - \sqrt{2}r$,

且 $O_1M = r$,

在 $\text{Rt}\triangle O_1MQ$ 中, 由勾股定理得

$$O_1M^2 = O_1Q^2 + MQ^2,$$

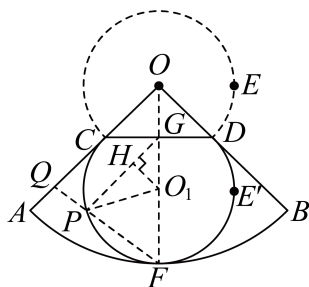
$$\text{即 } r^2 = \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}R - r \right) \right]^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}R \right)^2,$$

解得 $R = 3r$ 或 $0.6r$,

由题可知 $R \geq r$,

故 $R = 3r$.

②如图, 记 O 的对称点为 O_1 , OO_1 与 BC 交点为 G , 连接 PG , O_1P , 作 $O_1H \perp PG$ 于 H ,



由于 $\widehat{CE'D}$ 所在的圆与 $\widehat{AB}$ 所在的圆内切于点 F ,

$\therefore O_1F = r$,

由①知 $OG = O_1G = \frac{\sqrt{2}}{2}r$,

$$\therefore FG = O_1F + O_1G = \frac{2+\sqrt{2}}{2}r,$$

$$\therefore \frac{FG}{OG} = \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}r}{\frac{\sqrt{2}}{2}r} = 1 + \sqrt{2} = \frac{FP}{PQ},$$

$$\therefore PG \parallel OQ,$$

$$\therefore \angle CQF = \angle GPF = \angle HPO_1 + \angle O_1PF,$$

$$\because PG \parallel OQ,$$

$$\therefore \angle HGO_1 = \angle AOF = 45^\circ, \text{ 再由 } O_1H \perp PG \text{ 知 } \triangle O_1HG \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore O_1H = O_1G \cos 45^\circ = \frac{1}{2}r,$$

$$\therefore \sin \angle HPO_1 = \frac{O_1H}{O_1P} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle HPO_1 = 30^\circ, \angle HO_1P = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PO_1F = 180^\circ - \angle HO_1P - \angle HO_1G = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ,$$

由 $\triangle O_1PF$ 是等腰三角形,

$$\therefore \angle O_1PF = \frac{180^\circ - \angle PO_1F}{2} = \frac{180^\circ - 75^\circ}{2} = 52.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CQF = \angle GPF = \angle HPO_1 + \angle O_1PF = 30^\circ + 52.5^\circ = 82.5^\circ.$$