

## 2025 学年第二学期

### 九年级数学

(时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

注意事项:

1. 本卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 答题中不能使用计算器.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列二次根式中, 与  $\sqrt{12}$  是同类二次根式的是 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{6}$

【答案】 B

【解析】

【详解】解:  $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ ,

观察选项, 只有  $\sqrt{3}$  的被开方数为 3,

故选: B.

2. 下列运算中, 计算结果正确的是 ( )

- A.  $a^2 \cdot 2a^3 = 2a^6$                       B.  $a^2 + 2a^3 = 3a^5$   
C.  $(a^2)^3 = a^5$                       D.  $a^5 \div 2a^2 = \frac{1}{2}a^3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查整式运算法则, 根据同底数幂乘法、同类项合并规则、幂的乘方、同底数幂除法相关的法则逐一判断选项即可.

【详解】选项 A:  $\because$  同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加,  $\therefore a^2 \cdot 2a^3 = 2a^{2+3} = 2a^5 \neq 2a^6$ , 选项 A 不符合题意.

选项 B:  $\because a^2$  与  $2a^3$  不是同类项, 不能合并,  $\therefore a^2 + 2a^3 \neq 3a^5$ , B 不符合题意.

选项 C:  $\because$  幂的乘方, 底数不变, 指数相乘,  $\therefore (a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6 \neq a^5$ , C 不符合题意.

选项 D:  $\because$  同底数幂除法, 底数不变, 指数相减,  $\therefore a^5 \div 2a^2 = \frac{1}{2}a^{5-2} = \frac{1}{2}a^3$ , 所以 D 正确.

3. 如果一个反比例函数的图像在它所在的每个象限内,  $y$  的值随  $x$  的值增大而减小, 那么这个函数图像可能经过的点是 ( )

- A. (3,1)                      B. (2,-1)                      C. (-2,4)                      D. (0,0)

【答案】A

【解析】

【详解】解: 设反比例函数解析式为  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ,

$\because$  该反比例函数在每个象限内,  $y$  随  $x$  的增大而减小,

$\therefore k > 0$ ,

A、 $3 \times 1 = 3 > 0$ , 符合要求;

B、 $2 \times (-1) = -2 < 0$ , 不符合要求;

C、 $(-2) \times 4 = -8 < 0$ , 不符合要求;

D、反比例函数中  $x \neq 0$ , 图像不经过原点, 不符合要求.

4. 某校为了解学生体育运动时间的情况, 将调查所得的 50 个数据整理成下表:

|                |     |     |     |   |     |
|----------------|-----|-----|-----|---|-----|
| 体育运动时间<br>(小时) | 1.5 | 1.7 | 1.8 | 2 | 2.2 |
| 人数 (人)         | 10  | 10  | 20  | 5 | 5   |

对于这组数据, 下列判断中, 正确的是 ( )

- A. 众数和平均数相等                      B. 中位数和平均数相等  
C. 中位数和众数相等                      D. 中位数、众数和平均数都相等

【答案】C

【解析】

【详解】解:  $\because$  运动时间为 1.8 小时的人数最多, 为 20 人,

$\therefore$  众数为 1.8;

$\because$  总共有 50 个数据, 中位数是从小到大排列后第 25、26 个数据的平均数,

累计人数得前两组共  $10 + 10 = 20$  个数据, 第 21 到 40 个数据均为 1.8,

$\therefore$ 第25、26个数据都是1.8，中位数为 $\frac{1.8+1.8}{2}=1.8$ ；

$$\bar{x} = \frac{1.5 \times 10 + 1.7 \times 10 + 1.8 \times 20 + 2 \times 5 + 2.2 \times 5}{50} = \frac{89}{50} = 1.78,$$

综上，众数=1.8，中位数=1.8，平均数=1.78，中位数和众数相等．

5. 已知平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$ ，下列补充条件中，能判定这个平行四边形是正方形的是（ ）

A.  $AC = BD$ ， $AB \perp BC$

B.  $AO = BO$ ， $AC \perp BD$

C.  $AB = AD$ ， $AC \perp BD$

D.  $AO = CO$ ， $AB \perp BC$

【答案】B

【解析】

【分析】本题已知四边形是平行四边形，根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理，逐一分析选项，正方形是同时满足矩形和菱形性质的平行四边形．

【详解】解： $\because$ 原四边形  $ABCD$  是平行四边形，

对选项 A： $\because AC = BD$ ，

$\therefore$ 平行四边形  $ABCD$  是矩形，又  $AB \perp BC$  与  $AC = BD$  是等价的，都能判定该平行四边形是矩形，不能判定为正方形，故 A 不符合题意；

对选项 B： $\because$ 平行四边形对角线互相平分，

$$\therefore AC = 2AO, \quad BD = 2BO,$$

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore AC = BD,$$

$\therefore$ 平行四边形  $ABCD$  是矩形，

$$\text{又} \because AC \perp BD,$$

$\therefore$ 平行四边形  $ABCD$  是菱形，

$\therefore$ 平行四边形  $ABCD$  既是矩形又是菱形，因此是正方形，故 B 符合题意；

对选项 C： $\because AB = AD$ ，

$\therefore$ 平行四边形  $ABCD$  是菱形，菱形本身对角线互相垂直，因此  $AC \perp BD$  不能推出它是正方形，故 C 不符合题意；

对选项 D：平行四边形对角线本来互相平分， $AO = CO$  恒成立， $AB \perp BC$  仅能推出平行四边形  $ABCD$  是矩形，不能判定是正方形，故 D 不符合题意．

6. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $AC = 12$ ，点  $D$  是边  $AB$  上一点，若以  $D$  为圆心， $AD$  为半径的  $\odot D$  与以  $B$  为圆心， $BC$  为半径的  $\odot B$  相交，且点  $C$  在  $\odot D$  的内部，则  $AD$  的取值范围为（ ）

A.  $4 < AD < 9$

B.  $4 < AD < 6.5$

C.  $6.5 < AD < 9$

D.  $6.5 < AD < 13$

【答案】C

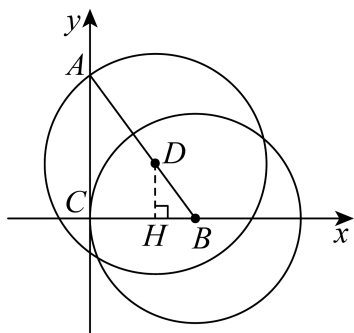
【解析】

【分析】先由勾股定理求出斜边  $AB$  的长度，设  $AD = x$ ，分别根据点  $C$  在  $\odot D$  内部、 $\odot D$  与  $\odot B$  相交的条件列出不等式，联立求解得到  $AD$  的取值范围.

【详解】解：在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $AC = 12$ ，

$\therefore$  由勾股定理得  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$ .

设  $AD = x$ ，则  $DB = AB - AD = 13 - x$ ， $\odot D$  半径为  $x$ ， $\odot B$  半径为  $BC = 5$ .



由点  $C$  在  $\odot D$  内部得  $CD < AD = x$ ，以点  $C$  为坐标原点， $AC$  所在直线为  $y$  轴建立平面直角坐标系，如图，

则  $C(0,0)$ ， $A(0,12)$ ， $B(5,0)$ ， $D$  在  $AB$  上，作  $DH \perp BC$  于点  $H$ ，

$$\therefore \frac{DH}{DB} = \frac{AC}{AB} = \sin B = \frac{12}{13}, \quad \frac{BH}{DB} = \frac{BC}{AB} = \cos B = \frac{5}{13},$$

$$\therefore DH = \frac{12(13-x)}{13}, \quad BH = \frac{5(13-x)}{13},$$

$$\therefore D\left(5 - \frac{5(13-x)}{13}, \frac{12(13-x)}{13}\right), \quad \text{即 } D\left(\frac{5x}{13}, \frac{12(13-x)}{13}\right)$$

$$\therefore \left[\frac{12(13-x)}{13}\right]^2 + \left(\frac{5x}{13}\right)^2 < x^2$$

化简整理得  $24336 < 3744x$ ，

解得  $x > 6.5$ .

由  $\odot D$  与  $\odot B$  相交，根据两圆相交的条件得  $|x-5| < DB < x+5$ ，

即  $|x-5| < 13-x < x+5$ ，

解不等式  $13-x < x+5$  得  $x > 4$ ；

当  $x > 5$  时,  $x - 5 < 13 - x$ , 解得  $x < 9$ ,

此时  $x$  的取值范围为  $5 < x < 9$ ,

即此时  $6.5 < x < 9$ ,

当  $x \leq 5$  时,  $5 - x < 13 - x$ , 即  $x \leq 5$ ,

此时无解,

综上所述,  $6.5 < x < 9$ ,

即  $6.5 < AD < 9$ .

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 因式分解:  $a^2 + 2a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $a(a+2)$

【解析】

【详解】 根据分解因式提取公因式法, 将方程  $a^2+2a$  提取公因式为  $a(a+2)$ . 故  $a^2+2a=a(a+2)$ .  
故答案是  $a(a+2)$ .

8. 方程  $\sqrt{2x-1}=3$  的解是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x=5$

【解析】

【详解】 解: 方程  $\sqrt{2x-1}=3$  两边平方, 得  $2x-1=9$ ,  
移项合并同类项, 得  $2x=10$ ,  
系数化为1, 得  $x=5$ ,  
检验: 当  $x=5$  时, 左边  $=\sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3 =$  右边,  
因此  $x=5$  是原方程的解.

9. 函数  $f(x) = \frac{x-3}{2-x}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \neq 2$

【解析】

【详解】 解: 要使函数  $f(x) = \frac{x-3}{2-x}$  有意义, 需满足分式分母不为0, 即  $2-x \neq 0$ ,  
解得  $x \neq 2$ .

10. 不等式组  $\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 \geq 0 \\ 3x - 2 < x \end{cases}$  的解集是\_\_\_\_\_.

【答案】

$$-2 \leq x < 1$$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式组的求解，先根据不等式的性质分别求出两个不等式的解集，再根据不等式组解集的确定规则得到最终结果，掌握不等式的性质和解集确定方法是解题关键.

【详解】解： 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 \geq 0 \text{①} \\ 3x - 2 < x \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，

$$\text{移项得 } \frac{x}{2} \geq -1,$$

不等式两边同乘 2，得  $x \geq -2$ .

解不等式②，

$$\text{移项得 } 3x - x < 2,$$

$$\text{合并同类项得 } 2x < 2,$$

不等式两边同除以 2，得  $x < 1$ .

根据不等式组解集的确定规则可得原不等式组的解集为  $-2 \leq x < 1$ .

11. 将抛物线  $y = x^2 + 2x - 3$  向上平移 4 个单位后，所得的新抛物线与  $y$  轴的交点坐标为\_\_\_\_\_.

【答案】  $(0,1)$

【解析】

【分析】 根据二次函数图象的平移规律得到新抛物线的解析式，再利用  $y$  轴上点的横坐标为 0，代入解析式求出纵坐标，即可得到交点坐标.

【详解】解：  $\because$  将抛物线  $y = x^2 + 2x - 3$  向上平移 4 个单位，

根据平移的“上加下减”规律，可得新抛物线解析式为：

$$y = x^2 + 2x - 3 + 4,$$

$$\text{整理得 } y = x^2 + 2x + 1.$$

$\because$  抛物线与  $y$  轴交点的横坐标为 0，

将  $x = 0$  代入新抛物线解析式，得  $y = 0^2 + 2 \times 0 + 1 = 1$ ，

$\therefore$  所得新抛物线与  $y$  轴的交点坐标为  $(0,1)$  .

12. 若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 - 2x + 1 = 0$  有实数根，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $a \leq 1$  且  $a \neq 0$  ##  $a \neq 0$  且  $a \leq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式. 根据一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的根与  $\Delta = b^2 - 4ac$  有如下关系：当  $\Delta > 0$  时，方程有两个不相等的两个实数根；当  $\Delta = 0$  时，方程有两个相等的两个实数根；当  $\Delta < 0$  时，方程无实数根.

【详解】 解：  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 - 2x + 1 = 0$  有实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times a \times 1 \geq 0 \text{ 且 } a \neq 0,$$

解得：  $a \leq 1$  且  $a \neq 0$ ,

故答案为：  $a \leq 1$  且  $a \neq 0$ .

13. 在一个平衡的天平左、右两端托盘上，分别放置质量为  $10\text{g}$  和  $25\text{g}$  的物品后，天平倾斜（如图所示），现从质量为  $5\text{g}$ ， $10\text{g}$ ， $15\text{g}$  的三件物品中，随机选取两件放置在天平的左端托盘上，则天平恢复平衡的概率为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 通过画树状图或列表罗列出所有等可能的情况，再从中找出符合条件的情况数，最后利用概率公式求解即可.

【详解】 解： 要使天平恢复平衡，选取的两件物品质量为  $25 - 10 = 15(\text{g})$ ,

列表如下：

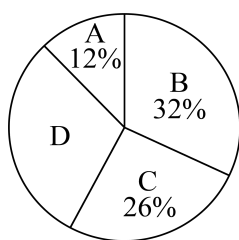
|    | 5g | 10g | 15g |
|----|----|-----|-----|
| 5g | /  | 15g | 20g |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 10g | 15g | /   | 25g |
| 15g | 20g | 25g | /   |

共有 6 种可能的结果，使天平恢复平衡的有 2 种，

$\therefore$  天平恢复平衡的概率为： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

14. 为激发青少年崇尚科学，探索未知的热情，某校开展“逐梦科技强国”为主题的活动，随机抽取了 200 名学生的模型设计成绩（成绩为百分制，用  $x$  表示），整理后将其分成如下四组： $A: 60 \leq x < 70$ ， $B: 70 \leq x < 80$ ， $C: 80 \leq x < 90$ ， $D: 90 \leq x \leq 100$ ，并将结果绘制成扇形统计图（如图所示）。如果该校学生共 1200 人，请估计全校模型设计成绩不低于 80 分的学生共有\_\_\_\_\_人。



【答案】 672

【解析】

【详解】解：  $1 - 12\% - 32\% = 56\%$ ，

$1200 \times 56\% = 672$ （人），

故估计全校模型设计成绩不低于 80 分的学生共有 672 人。

15. 在梯形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD$ ， $AC$  与  $BD$  交于点  $P$ ，令  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么

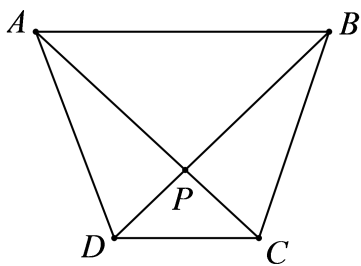
$\overrightarrow{AP} =$ \_\_\_\_\_；（用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示）

【答案】  $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】先根据向量的运算法则求出  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ，再根据相似三角形的判定证出  $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ ，根据相似三角形的性质可得  $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CD} = 2$ ，从而可得  $AP = \frac{2}{3}AC$ ，由此即可得出答案。

【详解】解：由题意，画图如下：



$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CD} = 2,$$

$$\therefore AP = \frac{2}{3}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

【点睛】本题考查了向量的运算、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键.

16. 在某次演习中，我国火箭军成功发射了一枚“东风-31AG”洲际弹道导弹，导弹平均速度为 25 马赫，马赫为速度单位，1 马赫约为 340 米/秒. 用科学记数法表示“东风-31AG”导弹的平均速度为\_\_\_\_\_米/秒.

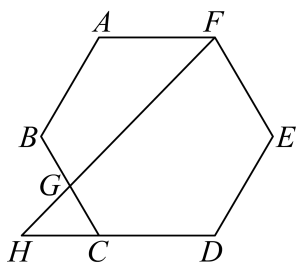
【答案】  $8.5 \times 10^3$

【解析】

【详解】解：导弹的平均速度：  $25 \times 340 = 8500$ ,

$$8500 = 8.5 \times 10^3.$$

17. 如图，已知在正六边形  $ABCDEF$  中，  $AB = 4$ ，点  $G$  是边  $BC$  的中点，连接  $FG$  并延长，交  $DC$  延长线于点  $H$ ，则  $CH$  的长为\_\_\_\_\_.



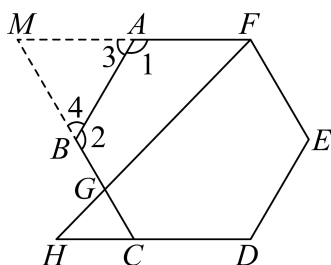
【答案】  $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】 延长  $CB$ 、 $FA$  交于点  $M$ ，在正六边形  $ABCDEF$  中，

$AB = BC = FA = 4$ ,  $\angle 1 = \angle 2 = 120^\circ$ ,  $AF \parallel CD$ ，证明  $\triangle ABM$  是等边三角形，得出  $AM = BM = AB = 4$ ，根据点  $G$  是  $BC$  中点，得出  $BG = CG = 2$ ，证明  $\triangle MFG \sim \triangle CHG$ ，根据相似三角形的性质即可求解。

【详解】 解： 延长  $CB$ 、 $FA$  交于点  $M$ ，



在正六边形  $ABCDEF$  中，  $AB = BC = FA = 4$ ,  $\angle 1 = \angle 2 = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ ,  $AF \parallel CD$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 60^\circ$ ，

$\therefore MA = MB$ ，

$\therefore \triangle ABM$  是等边三角形，

$\therefore AM = BM = AB = 4$ ，

$\therefore$  点  $G$  是  $BC$  中点，

$\therefore BG = CG = 2$ ，

$\therefore MG = 4 + 2 = 6$ ,  $MF = 4 + 4 = 8$ ，

$\therefore AF \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle MFG \sim \triangle CHG$ ，

$\therefore \frac{MF}{HC} = \frac{MG}{CG}$ ，

$\therefore \frac{8}{HC} = \frac{6}{2}$ ，

$$\therefore HC = \frac{8}{3}.$$

18. 定义：有一组对角相等而另一组对角不相等的凸四边形叫做“等对角四边形”. 已知在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle A = 36^\circ$ , 将  $\triangle ABC$  沿着过点  $B$  的直线  $l$  翻折, 使点  $C$  落在  $AB$  边上的点  $D$  处, 点  $E$  是边  $AC$  上一点, 若四边形  $BCED$  是“等对角四边形”, 则  $\frac{AE}{AC}$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  或  $\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】先根据等腰三角形的性质求出  $\triangle ABC$  各内角的度数, 再结合“等对角四边形”的定义分两种情况进行解答即可.

【详解】解: 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle A = 36^\circ$ ,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

设过点  $B$  的直线  $l$  与  $AC$  相交于点  $P$ , 连接  $PD$ ,

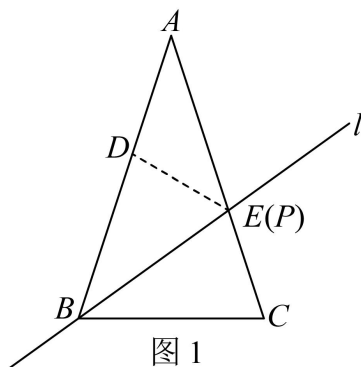
由翻折的性质可知  $\angle BDP = \angle ACB = 72^\circ$ ,  $BD = BC$ ,  $\angle DBP = \angle CBP = \frac{1}{2} \angle ABC = 36^\circ$ ,

当四边形  $BCED$  是“等对角四边形”时, 有以下两种情况:

①当  $\angle BDE = \angle C = 72^\circ$  时,

$\therefore \angle BDP = \angle C = 72^\circ$ ,

$\therefore E$  和点  $P$  重合, 如图所示,



此时,  $\angle DEC = 360^\circ - (\angle ABC + \angle BDE + \angle C) = 144^\circ$

$\therefore \angle DEC \neq \angle ABC$

$\therefore$  四边形  $BCED$  是“等对角四边形”;

设  $AE = x$ ,  $AB = AC = a$ , 其中  $x > 0$ ,  $a > 0$

$$\therefore CE = AC - AE = a - x, \frac{AE}{AC} = \frac{x}{a}$$

$$\because \angle A = \angle DBP = 36^\circ,$$

$$\therefore BE = AE = x,$$

$$\text{由折叠可知, } \angle BEC = \frac{1}{2} \angle DEC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore BC = BE = x$$

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle BEC$  中,

$$\angle CPA = \angle A = 36^\circ, \angle C = \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BEC$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CE},$$

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

$$\text{整理得到, } x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\text{解得, } x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}a$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}a < 0 \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \text{ 时, } \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{AE}{AC} = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

②当  $\angle DEC = \angle ABC = 72^\circ$  时, 如图所示,

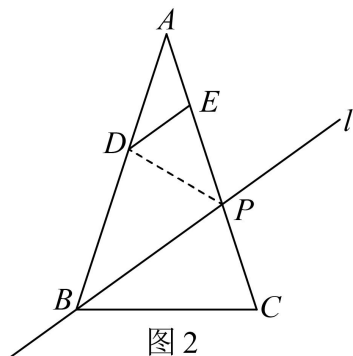


图 2

$$\text{同理可得, } \angle BDE = 144^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE \neq \angle C$$

$\therefore$  四边形  $BCED$  是“等对角四边形”；

设  $AE = y, AB = AC = a$ , 其中  $x > 0, a > 0$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{y}{a}$$

$$\because \angle EDA = 180^\circ - \angle BDE = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore DE = AE = y$$

$$\because \angle EDA = \angle DBP = 36^\circ$$

$$\therefore DE \parallel BP,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABP$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AE \cdot AB = AD \cdot AP$$

$$\text{由①可知, } BC = BD = BP = AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\therefore AD \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = ay,$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}y,$$

$$\because AD = AB - BD = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}+1}{2}y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

$$\therefore \frac{y}{a} = \sqrt{5}-2,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{y}{a} = \sqrt{5}-2,$$

综上所述,  $\frac{AE}{AC}$  的值为  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  或  $\sqrt{5}-2$ .

### 三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } (\sqrt{3})^{-1} - (\pi-1)^0 + 12^{\frac{1}{2}} - |\sqrt{3}-1|$$

【答案】  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【详解】解：  $(\sqrt{3})^{-1} - (\pi - 1)^0 + 12^{\frac{1}{2}} - |\sqrt{3} - 1|$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$   
 $= \frac{4\sqrt{3}}{3}$

20. 解方程：  $\frac{x+1}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-3} = 1$

【答案】  $x = -1$

【解析】

【详解】解：  $\frac{x+1}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-3} = 1$

$\therefore \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - \frac{4}{x-3} = 1$

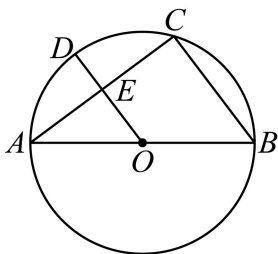
去分母得到，  $x+1-4(x-2) = (x-2)(x-3)$ ,

整理得到，  $x^2-2x-3=0$ ,

解得  $x = -1$  或  $x = 3$ ,

经检验  $x = 3$  是增根，  $x = -1$  是分式方程的解

21. 如图，已知  $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆，  $AB$  是  $\odot O$  的直径，  $AC$  为  $\odot O$  的弦，且  $AC = 8$ ，点  $D$  为  $\widehat{AC}$  的中点，连接  $OD$ ，交  $AC$  于点  $E$ ，  $DE = 2$ 。



(1) 求  $\odot O$  的半径；

(2) 连接  $BE$ ，求  $\cos \angle BEO$  的值。

【答案】 (1) 5

$$(2) \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

【解析】

【分析】(1) 根据垂径定理得到  $OD \perp AC$ ,  $AE = CE = \frac{1}{2}AC = 4$ , 设  $OA = OD = r$ , 则  $OE = OD - DE = r - 2$ , 利用勾股定理求出  $r = 5$ , 即可得到答案;

(2) 证明  $OE \parallel BC$ , 得到  $\angle BEO = \angle CBE$ , 求出  $BC = 6$ ,  $BE = 2\sqrt{13}$ , 即可求得答案.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  点  $D$  为  $\widehat{AC}$  的中点,

$$\therefore OD \perp AC, \quad AE = CE = \frac{1}{2}AC = 4,$$

设  $OA = OD = r$ , 则  $OE = OD - DE = r - 2$ ,

$$\therefore OA^2 = OE^2 + AE^2,$$

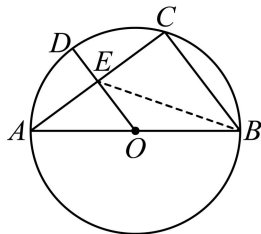
$$\therefore r^2 = (r - 2)^2 + 4^2,$$

解得  $r = 5$ ,

$\therefore \odot O$  的半径为 5;

【小问 2 详解】

解: 如图, 由 (1) 得  $OA = OB = 5$ ,  $\angle AEO = 90^\circ$ ,  $CE = \frac{1}{2}AC = 4$ ,



$$\therefore AB = 10,$$

$\because AB$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle C,$$

$$\therefore OE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEO = \angle CBE,$$

在  $\text{Rt}\triangle ACB$  中,  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6$ ,

$$\therefore BE = \sqrt{CE^2 + BC^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore \cos \angle BEO = \cos \angle CBE = \frac{BC}{BE} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

22.

|      |                                                                                                                                                                         |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 背景   | 我国新能源汽车产销量连续 10 年全球第一，2025 年出口 261.5 万辆，纯电动汽车占比超六成。凭借环保节能的优势，电动车越来越受到青睐，预计到 2035 年，纯电动汽车将占据市场绝对主导地位.                                                                    |
| 素材 1 | <p>工程师对某品牌的 A 款电动车进行充电测试，用快速充电桩和慢速充电桩分别对剩余电量为 20% 的两台 A 款电动车同时充电，充电时，各自的电量 <math>y</math> 与充电时间 <math>x</math>（小时）的函数图象分别为图中的线段 <math>BC</math> 和 <math>BD</math> .</p> |
| 素材 2 | 暑假里，小明一家驾驶某品牌的 A 款电动车从家出发去外地旅游，途中发现电量不足，便驶入服务区充电。此时，车辆剩余电量为 20%，但服务区内的快速充电桩已满，只能先使用慢速充电桩充电。小明一家在慢速充电 40 分钟后，恰好有快速充电桩空出，立即改为快速充电（切换时间忽略不计）。由于行程安排，他们在服务区最多能停留 1.5 小时.    |

问题解决

- (1) 任务一：根据素材 1，试分别对快速充电和慢速充电两种情况，写出  $y$  关于  $x$  的函数解析式，并分别指出自变量  $x$  的取值范围.
- (2) 任务二：当他们离开服务区时，车辆的电量能否充至 100%？请说明理由.

**【答案】** (1) 快速充电的函数解析式为  $y_1 = 0.8x + 0.2 (0 \leq x \leq 1)$ ；

慢速充电的函数解析式为  $y_2 = 0.1x + 0.2 (0 \leq x \leq 8)$ ；

(2) 当他们离开服务区时，车辆的电量不能充至 100%，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 求出车辆的电量能充至100%所需时间，再与1.5进行比较即可得到结论.

【小问1详解】

解：设快速充电的函数解析式为  $y_1 = kx + b$ ，

$$\text{把 } (0, 0.2), (1, 1) \text{ 代入得 } \begin{cases} b = 0.2 \\ 1 = k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 0.8 \\ b = 0.2 \end{cases},$$

$\therefore$  快速充电的函数解析式为  $y_1 = 0.8x + 0.2 (0 \leq x \leq 1)$ ；

设慢速充电的函数解析式为  $y_2 = mx + n$ ，

$$\text{把 } (0, 0.2), (8, 1) \text{ 代入得 } \begin{cases} n = 0.2 \\ 1 = 8m + n \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 0.1 \\ n = 0.2 \end{cases},$$

$\therefore$  慢速充电的函数解析式为  $y_2 = 0.1x + 0.2 (0 \leq x \leq 8)$ ；

【小问2详解】

解：  $40 \div 60 = \frac{2}{3}$  小时，

$$\text{把 } x = \frac{2}{3} \text{ 代入 } y_2 = 0.1x + 0.2 \text{ 得 } y_2 = \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15},$$

$$\text{把 } y = \frac{4}{15} \text{ 代入 } y_1 = 0.8x + 0.2 \text{ 得 } \frac{4}{15} = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5},$$

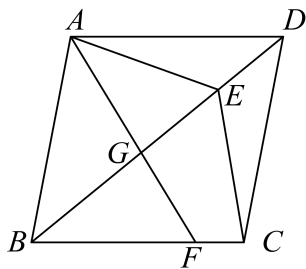
$$\text{解得 } x = \frac{1}{12},$$

$$\text{若充到 } 100\%, \text{ 还需要 } 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (小时)}, \frac{11}{12} + \frac{2}{3} = \frac{19}{12}, \frac{19}{12} > \frac{3}{2},$$

$\therefore$  车辆的电量不能充至100%，

$\therefore$  当他们离开服务区时，车辆的电量不能充至100%.

23. 如图，已知四边形  $ABCD$  是平行四边形，点  $E$  是对角线  $BD$  上一点， $BE > ED$ ， $AE = EC$ 。



(1) 求证：四边形  $ABCD$  是菱形；

(2) 点  $F$  是边  $BC$  上一点， $AF$  与  $BD$  相交于点  $G$ ，若  $BG \cdot BE = AB \cdot BF$ ，求证： $AB^2 = BE \cdot DG$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

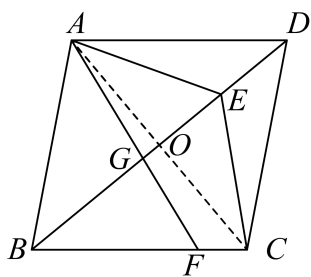
【解析】

【分析】(1) 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ，利用等腰三角形的性质证明  $OE \perp AC$ ，即可得到结论；

(2) 根据题意得到  $\frac{AB}{BE} = \frac{BG}{BF}$ ，证明  $\triangle ADG \sim \triangle FBG$ ，推出  $\frac{AB}{BE} = \frac{DG}{AD} = \frac{DG}{AB}$ ，即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明：如图，连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ，



$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$\therefore OA = OC, OB = OD$ ，

$\because AE = CE$ ，

$\therefore OE \perp AC$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形；

【小问 2 详解】

证明： $\because BG \cdot BE = AB \cdot BF$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BG}{BF}，$$

由 (1) 知，四边形  $ABCD$  是菱形；

$AD \parallel BC$ ， $AB = AD$ ，

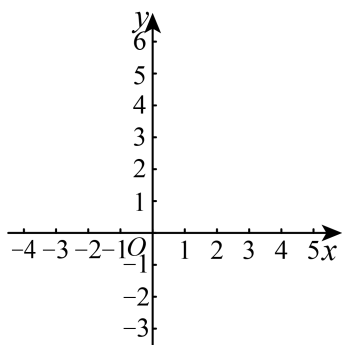
$\therefore \triangle ADG \sim \triangle FBG$ ，

$$\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{BG}{BF}，$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{DG}{AD} = \frac{DG}{AB}，$$

$$\therefore AB^2 = BE \cdot DG。$$

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知抛物线  $y = ax^2 - 6ax + c$  ( $a < 0$ ) 与  $x$  轴交于  $A(1, 0)$  和点  $B$ ，顶点为  $D$ 。



(1) 求此抛物线的对称轴及点  $B$  的坐标;

(2) 抛物线的对称轴与  $x$  轴交于点  $M$ , 点  $P$  是抛物线上横坐标为 2 的一点,  $BP$  与对称轴交于点  $N$ , 连接  $BD$ .

①求  $S_{\triangle BDN} : S_{\triangle BMN}$  的值;

②设直线  $PD$  与  $x$  轴交于点  $F$ , 过点  $F$  作  $BD$  的平行线, 与  $y$  轴交于点  $E$ , 当四边形  $BDFE$  是直角梯形时, 求  $\angle PBO$  的正切值.

**【答案】** (1) 抛物线的对称轴为直线  $x = 3$ ,  $B(5, 0)$

(2) ① 1    ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据对称轴公式代入化简即可求得对称轴; 根据抛物线的对称性及点  $A$  的坐标即可求得点  $B$  的坐标;

(2) ① 首先, 根据题意得抛物线的顶点坐标  $D(3, -4a)$ , 由点  $P$  是抛物线上横坐标为 2 的一点, 得点  $P(2, -3a)$ , 再求得直线  $BP$  的表达式为  $y = ax - 5a$ , 进而得点  $N(3, -2a)$ , 得  $DN = -4a - (-2a) = -2a$ ,  $MN = -2a$ , 即可得出  $S_{\triangle BDN} : S_{\triangle BMN} = DN : MN = (-2a) : (-2a) = 1$ ;

② 首先, 过  $P$  作  $PC \perp x$  轴于  $C$ , 由  $P(2, -3a)$ ,  $B(5, 0)$ , 得到  $\tan \angle PBO = \frac{PC}{BC} = \frac{-3a}{3} = -a$ , 然后, 分别求得直线  $BP$  的表达式为  $y = ax - 5a$ , 得  $OF = 1, OG = -a$ , 直线  $BD$  的表达式为  $y = 2ax - 10a$ , 得直线  $EF$  的表达式为  $y = 2ax + 2a$ , 进而得  $E(0, 2a)$ , 即  $OE = -2a$ , 再分两种情况进行分类讨论, 情况一:

如图 2, 当  $EF \perp DF$  时,  $\angle EFG = 90^\circ$ , 证得  $\triangle FOG \sim \triangle EOF$ , 得  $\frac{OF}{OE} = \frac{OG}{OF}$ , 即  $\frac{1}{-2a} = \frac{-a}{1}$ , 解得

$a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 进而得  $\tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 情况二: 如图 3, 当  $EF \perp BE$  时,  $\angle BEF = 90^\circ$ , 证得

$$\triangle EOF \sim \triangle BOE, \text{ 得 } \frac{OF}{OE} = \frac{OE}{BO}, \text{ 即 } \frac{1}{-2a} = \frac{-2a}{5}, \text{ 解得 } a = \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{进而得 } \tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

【小问 1 详解】

$$\text{解: 根据题意知抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{-6a}{2a} = 3,$$

$$\because \text{抛物线 } y = ax^2 - 6ax + c \ (a < 0) \text{ 与 } x \text{ 轴交于 } A(1, 0) \text{ 和点 } B,$$

$\therefore$  抛物线的开口向下,

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = 3,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 在对称轴的右侧, 设点 } B(x, 0), \text{ 则 } \frac{x+1}{2} = 3, \text{ 解得 } x = 5,$$

$$\therefore B(5, 0);$$

【小问 2 详解】

①解: 如图 1,

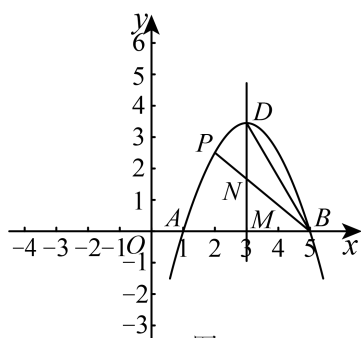


图1

$$\therefore \text{抛物线 } y = ax^2 - 6ax + c \ (a < 0) \text{ 与 } x \text{ 轴交于 } A(1, 0),$$

$$\therefore \text{把 } A(1, 0), \text{ 代入 } y = ax^2 - 6ax + c, \text{ 得 } 0 = a - 6a + c, \text{ 得 } c = 5a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 6ax + 5a = a(x-3)^2 - 4a,$$

$$\therefore \text{抛物线的顶点 } D(3, -4a),$$

$\therefore$  点  $P$  是抛物线上横坐标为 2 的一点,

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = a \cdot 2^2 - 6a \cdot 2 + 5a = -3a,$$

$$\therefore \text{点 } P(2, -3a),$$

设直线  $BP$  的表达式为  $y = kx + n$ ,

把  $P(2, -3a)$ ,  $B(5, 0)$  分别代入, 得  $\begin{cases} 2k + n = -3a \\ 5k + n = 0 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k = a \\ n = -5a \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线  $BP$  的表达式为  $y = ax - 5a$ ,

当  $x = 3$  时,  $y = 3a - 5a = -2a$ ,

$\therefore$  点  $N(3, -2a)$ ,

$\therefore DN = -4a - (-2a) = -2a$ ,  $MN = -2a$ ,

$\therefore S_{\triangle BDN} : S_{\triangle BMN} = DN : MN = (-2a) : (-2a) = 1$ ;

②解: 过  $P$  作  $PC \perp x$  轴于  $C$ ,

$\therefore P(2, -3a)$ ,  $B(5, 0)$ ,

$\therefore PC = -2a, BC = 5 - 2 = 3$ ,

$\therefore \tan \angle PBO = \frac{PC}{BC} = \frac{-3a}{3} = -a$ .

设直线  $DP$  的表达式为  $y = mx + b$ , 与  $y$  轴交于  $G$ ,

把  $D(3, -4a)$ ,  $P(2, -3a)$  代入, 得

$\begin{cases} 3m + b = -4a \\ 2m + b = -3a \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} m = -a \\ b = -a \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线  $DP$  的表达式为  $y = -ax - a$ ,

当  $y = 0$  时,  $-ax - a = 0$ , 解得  $x = -1$ ; 当  $x = 0$  时,  $y = -a$ ,

$\therefore F(-1, 0), G(0, -a)$ ,

$\therefore OF = 1, OG = -a$ ,

设直线  $BD$  的表达式为  $y = hx + t$ ,

把  $B(5, 0)$ ,  $D(3, -4a)$ , 代入, 得

$\begin{cases} 5h + t = 0 \\ 3h + t = -4a \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} h = 2a \\ t = -10a \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线  $BD$  的表达式为  $y = 2ax - 10a$ ,

$\therefore EF \parallel BD$ ,

∴ 设直线  $EF$  的表达式为  $y = 2ax + p$ ,

把  $F(-1, 0)$  代入, 得  $-2a + p = 0$ , 解得  $p = 2a$ ,

∴ 直线  $EF$  的表达式为  $y = 2ax + 2a$ ,

当  $x = 0$  时,  $y = 2a$ ,

∴  $E(0, 2a)$ , 即  $OE = -2a$ .

情况一: 如图 2, 当  $EF \perp DF$  时,  $\angle EFG = 90^\circ$ ,

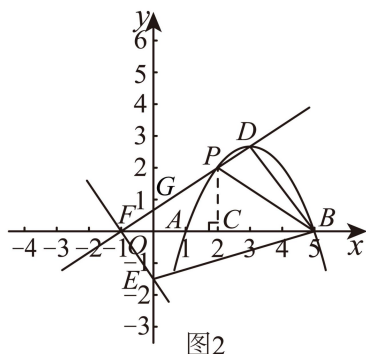


图2

∵  $\angle FOG = \angle EOF = 90^\circ$ ,

∴  $\angle OFG + \angle EFO = \angle EFO + \angle OEF = 90^\circ$ ,

∴  $\angle OFG = \angle OEF$ ,

∴  $\triangle FOG \sim \triangle EOF$ ,

∴  $\frac{OF}{OE} = \frac{OG}{OF}$ , 即  $\frac{1}{-2a} = \frac{-a}{1}$ , 解得  $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

∵  $a < 0$ ,

∴  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

∴  $\tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

情况二: 如图 3, 当  $EF \perp BE$  时,  $\angle BEF = 90^\circ$ ,

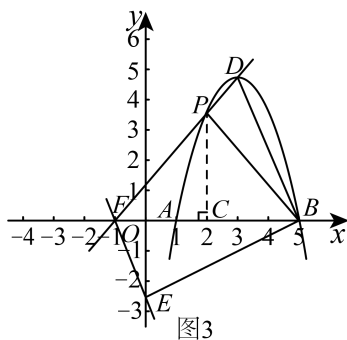


图3

$$\because \angle FOE = \angle EOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFE + \angle OEF = \angle OEF + \angle OEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFE = \angle OEB,$$

$$\therefore \triangle EOF \sim \triangle BOE,$$

$$\therefore \frac{OF}{OE} = \frac{OE}{BO}, \text{ 即 } \frac{1}{-2a} = \frac{-2a}{5}, \text{ 解得 } a = \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \tan \angle PBO = -a = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

综上, 当四边形  $BDFE$  是直角梯形时, 求  $\angle PBO$  的正切值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

【点睛】解题的关键是得到  $\tan \angle PBO = \frac{PC}{BC} = \frac{-3a}{3} = -a$ , 分别求得直线  $BP$  的表达式为  $y = ax - 5a$ , 得

$OF = 1, OG = -a$ , 直线  $BD$  的表达式为  $y = 2ax - 10a$ , 直线  $EF$  的表达式为  $y = 2ax + 2a$ , 得  $E(0, 2a)$ ,

即  $OE = -2a$ , 再分两种情况进行分类讨论, 情况一: 如图 2, 当  $EF \perp DF$  时,  $\angle EFG = 90^\circ$ , 证得

$\triangle FOG \sim \triangle EOF$ ; 情况二: 如图 3, 当  $EF \perp BE$  时,  $\angle BEF = 90^\circ$ , 证得  $\triangle EOF \sim \triangle BOE$ .

25. 如图 1,  $AB$  是半圆  $O$  的直径, 点  $C$  是半圆上一点, 过点  $C$  的直线交  $BA$  的延长线于点  $D$ , 点  $E$  是线段  $OB$  上一点, 且满足  $OE = AD$ , 过点  $E$  作  $AB$  的垂线交  $DC$  的延长线于点  $F$ , 交  $BC$  于点  $G$ , 且  $\angle F = 2\angle ABC$ .

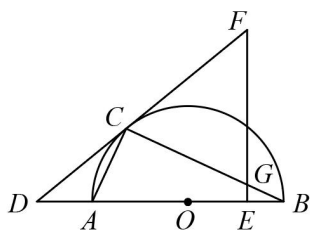


图1

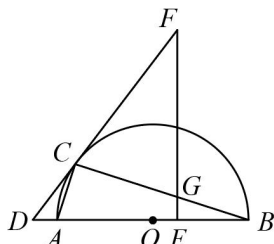
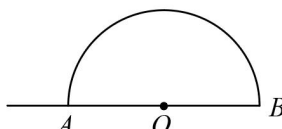


图2



备用图

(1) 求证:  $\angle ACD = \angle ABC$ ;

(2) 如图 2, 当  $BE = 3OE$  时, 求  $\frac{CF}{CD}$  的值;

(3) 设  $EF$  与  $\widehat{BC}$  的交点为  $P$ , 连接  $OP$ , 交  $BC$  于点  $M$ , 若以  $O$  为圆心,  $OE$  长为半径的圆与以  $P$  为圆心,  $PM$  为半径的圆外切, 求  $\sin \angle ABC$  的值.

【答案】(1) 见解析 (2)  $\frac{CF}{CD} = \frac{7}{3}$ ;

(3)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】

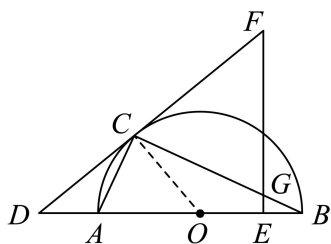
【分析】(1) 连接  $OC$ , 先推导出  $\angle F = \angle AOC$ , 得到  $\angle DCA + \angle ACO = 90^\circ$ ,  $\angle ACO + \angle OCB = 90^\circ$ , 则  $\angle ACD = \angle OCB$ , 继而证明  $\angle OCB = \angle ABC$ , 得到  $\angle ACD = \angle ABC$ , 即可解答;

(2) 连接  $OC$ , 设  $OE = x$ , 则  $AD = x$ , 推导出  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ ,  $\triangle DCO \sim \triangle DEF$ , 得到  $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ ,  $\frac{CD}{DE} = \frac{DO}{DF}$ , 求出  $CD = 3x$  或  $-3x$  (舍去), 得到  $\frac{3x}{6x} = \frac{5x}{DF}$ , 解得  $DF = 10x$ , 求出  $CF = DF - CD = 7x$ , 即可解答;

(3) 设  $OM = OE = y$ ,  $BE = a$ , 推导出  $\triangle OBM \sim \triangle ABC$ , 得到  $AC = 2OM = 2y$ , 由 (2) 可知  $CD^2 = AD \cdot BD = y \cdot (3y + 2a) = 3y^2 + 2ay$ ,  $\triangle DAC \sim \triangle DCB$ , 得到  $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC}$ , 求出  $BC^2 = (2CD)^2 = 12y^2 + 8ay$ , 再根据勾股定理, 得到  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , 求出  $a = \sqrt{3}y$  或  $-\sqrt{3}y$  (舍去), 得到  $OB = y + \sqrt{3}y = (\sqrt{3} + 1)y$ , 则  $\sin \angle ABC = \frac{OM}{OB} = \frac{y}{(\sqrt{3} + 1)y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ , 即可解答.

【小问 1 详解】

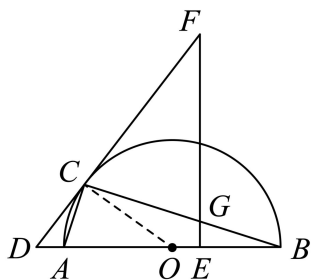
证明: 连接  $OC$ , 如图,



$\because EF \perp BD$ ,  
 $\therefore \angle DEF = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle D + \angle F = 90^\circ$ ,  
 $\because \angle AOC = 2\angle ABC, \angle F = 2\angle ABC$ ,  
 $\therefore \angle F = \angle AOC$ ,  
 $\therefore \angle D + \angle AOC = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle DCO = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle DCA + \angle ACO = 90^\circ$ ,  
 $\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ACD = \angle OCB$ ,  
 $\because OC = OB$ ,  
 $\therefore \angle OCB = \angle ABC$ ,  
 $\therefore \angle ACD = \angle ABC$ ;

**【小问 2 详解】**

解：连接  $OC$ ，如图，



设  $OE = x$ ，则  $AD = x$ ， $BE = 3OE = 3x$ ，

$$\therefore OB = OE + BE = 4x,$$

$$\therefore OA = OB = 4x, \quad AB = 2OB = 8x,$$

$$\because BD = AD + AB = 9x, \quad DO = AD + AO = 5x,$$

$$\therefore DE = DO + OE = 6x,$$

由 (1) 可知  $\angle ACD = \angle ABC$ ,  $\angle DCO = \angle DEF = 90^\circ$ ,

$$\because \angle D = \angle D,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD, \triangle DCO \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \frac{CD}{DE} = \frac{DO}{DF},$$

$$\therefore CD^2 = AD \cdot BD = x \cdot 9x = 9x^2$$

解得  $CD = 3x$  或  $CD = -3x$  (舍去),

$$\therefore \frac{3x}{6x} = \frac{5x}{DF},$$

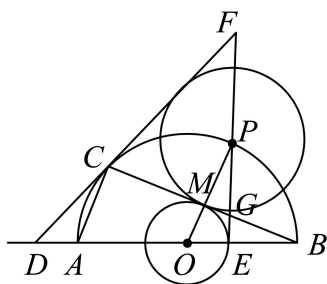
解得  $DF = 10x$ ,

$$\therefore CF = DF - CD = 7x,$$

$$\therefore \frac{CF}{CD} = \frac{7x}{3x} = \frac{7}{3};$$

【小问 3 详解】

解: 如图,



设  $OM = OE = y$ ,  $BE = a$ ,

$$\therefore DA = OE = y, \quad OB = y + a,$$

$$\therefore BD = DA + 2OB = 3y + 2a,$$

$$AB = 2OB = 2y + 2a,$$

$\because BC$  切于以  $OE$  为半径的  $\odot O$  于点  $M$ ,

$$\therefore OM \perp BC, OM = OE = y,$$

$$\therefore \angle OMB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle OBM = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle OBM \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{OM}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AC = 2OM = 2y,$$

$$\text{由 (2) 可知 } CD^2 = AD \cdot BD = y \cdot (3y + 2a) = 3y^2 + 2ay,$$

$$\because \triangle DAC \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{y}{CD} = \frac{2y}{BC},$$

$$\therefore BC = 2CD, \text{ 即 } BC^2 = (2CD)^2 = 12y^2 + 8ay,$$

$$\because AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore (2y)^2 + (12y^2 + 8ay) = (2y + 2a)^2,$$

$$4y^2 + 12y^2 + 8ay = 4y^2 + 8ay + 4a^2,$$

$$3y^2 = a^2,$$

$$\text{解得 } a = \sqrt{3}y \text{ 或 } -\sqrt{3}y \text{ (舍去)},$$

$$\therefore OB = y + \sqrt{3}y = (\sqrt{3} + 1)y,$$

$$\because \sin \angle ABC = \frac{OM}{OB} = \frac{y}{(\sqrt{3} + 1)y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$