

2024 学年第二学期学业质量调研九年级数学

(满分 150 分, 完成时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 2 的相反数是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了相反数的定义, 解答本题的关键是熟练掌握相反数的定义. 根据相反数的定义作答即可.

【详解】解: 根据题意得, 2 的相反数是 -2,

故选: C.

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $2a + a = 3a^2$ B. $2a^2 \cdot a = 2a^3$
C. $6a^6 + 2a^2 = 3a^3$ D. $(2a^2)^3 = 8a^5$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项, 单项式乘以单项式, 积的乘方运算, 掌握运算法则是解题的关键. 根据合并同类项, 单项式乘以单项式, 积的乘方运算法则分别判断即可.

【详解】解: A、 $2a + a = 3a$, 原计算错误, 不符合题意;

B、 $2a^2 \cdot a = 2a^3$, 原计算正确, 符合题意;

C、 $6a^6$ 与 $2a^2$ 不能合并, 不符合题意;

D、 $(2a^2)^3 = 8a^6$, 原计算错误, 不符合题意;

故选：B.

3. 不等式组 $\begin{cases} -2x < 4 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

A. $x > 1$

B. $x < 1$

C. $x > -2$

D. $x < -2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握该知识点是解题关键.

根据解一元一次不等式组的步骤求解即可.

【详解】解：不等式组 $\begin{cases} -2x < 4 \text{①} \\ x-1 > 0 \text{②} \end{cases}$,

解不等式①得 $x > -2$.

解不等式②得 $x > 1$.

所以原不等式组的解为 $x > 1$.

故选：A.

4. 如果一次函数 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数， $k \neq 0$) 的图像经过第一、三、四象限，那么 k 、 b 应满足的条件是 ()

A. $k > 0$ ，且 $b > 0$

B. $k < 0$ ，且 $b > 0$

C. $k > 0$ ，且 $b < 0$

D. $k < 0$ ，且 $b < 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与性质，根据一次函数图象与系数的关系求解即可.

【详解】解：∵一次函数 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数， $k \neq 0$) 的图像经过第一、三、四象限，

∴ $k > 0$ ，且 $b < 0$ ，

故选：C.

5. 学了概率的相关知识后，某综合实践小组利用计算机模拟抛掷一枚图钉的试验，研究落地后针尖朝上的概率，记录的试验数据如下表：

累计抛掷次数	100	1000	2000	3000	4000	5000	6000
针尖朝上频率	0.500	0.610	0.600	0.594	0.625	0.614	0.618

随着试验次数的增大，估计“针尖朝上”的概率接近于 () (精确到 0.01)

A. 0.50

B. 0.59

C. 0.62

D. 0.63

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是利用频率估计概率，熟知大量重复实验时，事件发生的频率在某个固定位置左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势来估计概率，是解题的关键；

根据表格中的数据可知，针尖朝上频率在0.62左右波动，据此可得出结论.

【详解】解：由题意可知，“针尖朝上”频率在0.62左右波动，

∴根据以上实验数据可以估计出“针尖朝上”的概率约为0.62.

故选：C.

6. 对于命题：①周长相等的等腰三角形全等；②周长相等的等边三角形全等；③周长相等的直角三角形全等；④周长相等的等腰直角三角形全等. 真命题的是（ ）

A. ①②

B. ③④

C. ①③

D. ②④

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等边三角形与等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定定理的应用，真假命题的判断，根据全等三角形的判定逐项分析判断，即可求解.

【详解】解：①周长相等的等腰三角形不一定全等，故①是假命题；

②周长相等的等边三角形全等，根据SSS，可判断是真命题；

③周长相等的直角三角形不一定全等，是假命题；

④周长相等的等腰直角三角形全等，是真命题；

真命题的是②④

故选：D.

二、填空题（本大题共12题，每题4分，满分48分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 计算： $3^{-1} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】该题考查了负整数指数幂，根据负整数指数幂的法则计算即可.

【详解】解： $3^{-1} = \frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$.

8. 分解因式: $x^2 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x+3)(x-3)$

【解析】

【详解】解: $x^2-9= (x+3) (x-3)$,

故答案为: $(x+3) (x-3)$.

9. 计算: $\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{x-2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的计算, 熟练掌握计算方法是解题的关键. 按照计算方法计算即可.

【详解】解: $\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-4}$,

$$= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)},$$

$$= \frac{1}{x-2},$$

故答案为: $\frac{1}{x-2}$.

10. 函数 $f(x) = \sqrt{2x-3}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的定义域问题, 二次根式的被开方数大于等于 0 的性质, 这是常考点, 需重点掌握.

根据二次根式的被开方数大于等于 0 即可得.

【详解】解: 由二次根式的性质得: $2x-3 \geq 0$,

$$\text{解得: } x \geq \frac{3}{2},$$

故答案为: $x \geq \frac{3}{2}$.

11. 已知正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, 且 $k \neq 0$) 的函数值 y 随 x 的增大而增大, 且经过点 $(1,1)$, 那么这个正比例函数的解析式可以是_____. (只需写一个)

【答案】 $y = 2x$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用正比例函数的性质解答．根据正比例函数的性质可知 $k > 0$ ，根据正比例函数不经过点 $(1,1)$ 得出 $k \neq 1$ ，从而可以写出一个符合要求的函数解析式．

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 y 的值随着自变量 x 的值增大而增大，

$\therefore k > 0$ ，

当正比例函数 $y = kx$ 过点 $(1,1)$ 时，则 $k = 1$ ，

故不经过点 $(1,1)$ 时， $k \neq 1$ ，

$\therefore k > 0$ 且 $k \neq 1$ ，

$\therefore$ 这个正比例函数的解析式可以是 $y = 2x$ ，

故答案为： $y = 2x$ ．

12. *DeepSeek*（深度求索）是一家中国的人工智能公司，专注于通用人工智能的研发，尤其在搜索增强型语言模型领域表现突出．如：*DeepSeek-V2* 是其开发的一个强大的混合专家语言模型，含 2360 亿个总参数，可贵的是开发团队成员均来自本土，没有任何海外归来人员．把数据 2360 亿用科学记数法表示应是_____．

【答案】 2.36×10^{11}

【解析】

【分析】 本题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值，根据科学记数法的表示方法进行表示即可．

【详解】 解：2360 亿 $= 2.36 \times 10^{11}$ ；

故答案为： 2.36×10^{11} ．

13. 已知一个 50 个数据的样本，把它分成 6 组，第一组到第四组的频数分别是 8、6、11、7，第五组的频率是 0.2，那么第六组的频数是_____．

【答案】 8

【解析】

【分析】本题主要考查了对频率、频数灵活运用，注意：各小组频数之和等于数据总和，各小组频率之和等于 1，比较简单．首先根据频率 = 频数 ÷ 总数，计算从第一组到第四组的频率之和，再进一步根据一组数据中，各组的频率和是 1，进行计算．

【详解】解：根据题意得：第一组到第四组的频率和是：

$$\frac{8+6+11+7}{50} = 0.64,$$

又 ∵ 第五组的频率是 0.2，

$$\therefore \text{第六组的频率为 } 1 - (0.64 + 0.2) = 0.16,$$

$$\therefore \text{第六组的频数为：} 50 \times 0.16 = 8.$$

故答案为：8.

14. 正八边形的中心角等于 _____ 度.

【答案】 45

【解析】

【分析】本题考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是牢记中心角的定义及求法．根据正 n 多边形中心角公式是 $\frac{360^\circ}{n}$ 即可解题．

【详解】解：正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ ；

故答案为：45．

15. 如果二次函数 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的图像向左平移 1 个单位长度后关于 y 轴对称, 那么 $b =$ _____. (用含 a 的代数式表示)

【答案】 $-2a$

【解析】

【分析】该题考查了二次函数的性质，根据二次函数 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的图象向左平移 1 个单位长度后关于 y 轴对称得出 $-\frac{b}{2a} - 1 = 0$ ，求解即可．

【详解】解：∵ 二次函数 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的图象向左平移 1 个单位长度后关于 y 轴对称，

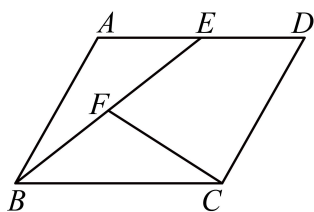
$$\therefore -\frac{b}{2a} - 1 = 0,$$

化简得： $b = -2a$ ，

故答案为： $-2a$ ．

16. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 是 AD 边中点，点 F 是线段 BE 中点，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$ ，那么

$\overrightarrow{FC} = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量的知识点，运用三角形法则是解题的关键。先用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示 $\overrightarrow{EB}$ ，再表示 $\overrightarrow{FC}$ 即可。

【详解】 解：在 $\square ABCD$ 中，

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA} = -\vec{b}, \quad \overrightarrow{BA} = -\vec{a},$$

$\because E$ 是 AD 边中点，

$$\therefore \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

在 $\triangle ABE$ 中，

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{b} - (-\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a},$$

$\because$ 点 F 是线段 BE 中点，

$$\therefore \overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} \right) = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

在 $\triangle BFC$ 中，

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b},$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1, m)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图像上一点，点 B 是 y 轴上一点， $AO = AB$ ，将 $\triangle AOB$ 绕点 O 旋转 180° ，点 A, B 的对应点分别为 C, D 。当四边形 $ABCD$ 的面积等于 8 时，点 C 的坐标是_____。

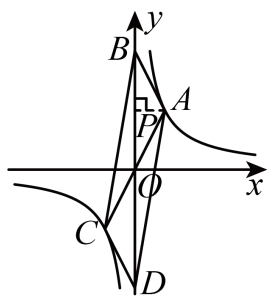
【答案】 $(-1, -2)$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数、平行四边形的性质，旋转的性质，熟练掌握是解答本题的关键。根据题

意画出图像，先证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，易得 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD} = 2$ ，在 $\triangle ABO$ 中利用三线合一得到 $BO = 2OP = 2m$ ，利用 $\triangle ABO$ 面积即可求解。

【详解】解：根据题意画出图像得，



过点 A 作 $AP \perp BO$ 于点 P，

$$\therefore OP = m, \quad AP = 1,$$

根据旋转得， $AB = CD$ ， $\angle ABO = \angle ODC$ ， $C(-1, -m)$ ，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\text{易知 } S_{\triangle ABO} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD} = \frac{1}{4} \times 8 = 2,$$

$$\because AO = AB,$$

$\therefore \triangle ABO$ 是等腰三角形，

$$\because AP \perp BO,$$

$$\therefore BO = 2OP = 2m,$$

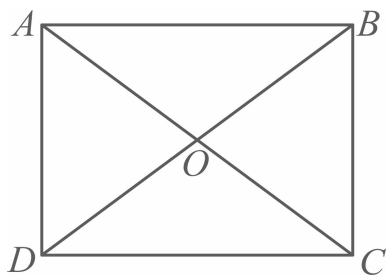
$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}BO \cdot AP = \frac{1}{2} \times 2m \times 1 = 2,$$

$$\therefore m = 2,$$

$$\therefore C(-1, -2),$$

故答案为： $(-1, -2)$ 。

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8, BC = 6$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，点 P 是在直线 AB 上方到 AB 距离等于 3 的一个动点，当点 O 在以点 A 为圆心， AP 为半径长的圆上时， BP 的长为_____。



【答案】5 或 $3\sqrt{17}$

【解析】

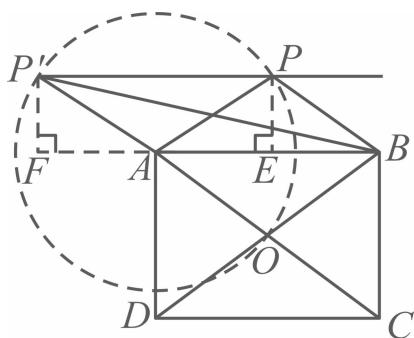
【分析】本题考查了矩形的性质，勾股定理，熟练掌握矩形的性质是解题的关键.

如图, 过 P 作 $PE \perp AB$ 于 E , 则 $PE = 3$, 根据勾股定理得到 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$, 求得 $AO = \frac{1}{2}AC = 5$,

根据勾股定理得到 $PB = \sqrt{PE^2 + BE^2} = 5$; 过点 P' 作 $P'F \perp AB$ 交 BA 的延长线于 F , 同理得 $AF = 4$,

根据勾股定理得到 $BP' = \sqrt{BF^2 + P'F^2} = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17}$.

【详解】解: 如图, 过 P 作 $PE \perp AB$ 于 E ,



则 $PE = 3$,

在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8, BC = 6$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10,$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 5,$$

$$\therefore AP = AO = 5,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AP^2 - PE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 4,$$

$$\therefore PB = \sqrt{PE^2 + BE^2} = 5;$$

过点 P' 作 $P'F \perp AB$ 交 BA 的延长线于 F ,

同理得 $AF = 4$,

$$\therefore BF = 12,$$

$$\therefore BP' = \sqrt{BF^2 + P'F^2} = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17},$$

综上所述, BP 的长为 5 或 $3\sqrt{17}$,

故答案为: 5 或 $3\sqrt{17}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $|\sqrt{3}-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} - 8^{\frac{1}{3}} + (-1)^0$.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 解题的关键是熟练运用二次根式的混合运算法则. 根据绝对值的性质、二次根式分母有理化、立方根、零次幂运算法则即可求出答案.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{3} - 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} - 2 + 1$
 $= \frac{\sqrt{3}}{3} - 2.$

20. 解方程: $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = 1.$

【答案】 $x = 2$

【解析】

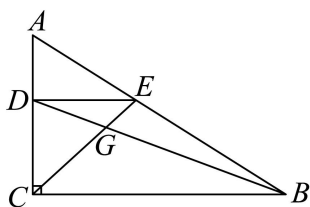
【分析】 本题考查分式方程 (化为一元二次) 的解法, 掌握解分式方程的步骤和方法是正确解答的关键. 根据分式方程的解法求解即可, 注意不要忘记检验.

【详解】 解: 去分母得, $2x - (x-1) = x^2 - 1,$
 去括号得, $2x - x + 1 = x^2 - 1,$
 移项得, $x^2 - x - 2 = 0,$
 解得, $x_1 = -1, x_2 = 2,$

经检验: $x_1 = -1$ 是增根, 舍去, $x_2 = 2$ 是原方程的解,

所以原方程的解为: $x = 2.$

21. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 5$, $BC = 8$. 点 D 在边 AC 上运动 (不与 A 、 C 重合), $DE \parallel BC$, 交 AB 与点 E , 设 $AD = x$, $\triangle BDE$ 的面积为 y .



(1) 求 y 关于 x 的函数关系式, 及自变量 x 的取值范围;

(2) 设 BD 与 CE 相交于点 G , 当点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心时, 求 $\triangle BEG$ 的面积.

【答案】 (1) $y = -\frac{4}{5}x^2 + 4x$ ($0 < x < 5$)

(2) $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】 该题考查了相似三角形的性质和判定, 三角形重心的性质, 解题的关键是证明相似.

(1) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 得出 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$, 即 $\frac{DE}{8} = \frac{x}{5}$, 得出 $DE = \frac{8}{5}x$. 依题 $CD = 5 - x$, 由 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}DE \cdot CD$, 即可得 $y = -\frac{4}{5}x^2 + 4x$ ($0 < x < 5$).

(2) 根据点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 得出 $\frac{BG}{BD} = \frac{2}{3}$, $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$. 代入 (1) 中结论得出 $y = 5$. 根据

$\frac{S_{\triangle BEG}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{BG}{BD}$, 即 $\frac{S_{\triangle BEG}}{5} = \frac{2}{3}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$, $\angle CDE + \angle ACB = 180^\circ$,

即 $\frac{DE}{8} = \frac{x}{5}$,

$\therefore DE = \frac{8}{5}x$.

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\angle CDE = 90^\circ$,

依题 $CD = 5 - x$,

由 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}DE \cdot CD$,

$\therefore y = -\frac{4}{5}x^2 + 4x$ ($0 < x < 5$).

【小问 2 详解】

解: $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{2}{3}, AD = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore y = -\frac{4}{5} \times \frac{25}{4} + 4 \times \frac{5}{2} = 5.$$

$\therefore \triangle BEG$ 与 $\triangle BED$ 同高,

$$\therefore \frac{S_{\triangle BEG}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{BG}{BD}, \text{ 即 } \frac{S_{\triangle BEG}}{5} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle BEG} = \frac{10}{3}.$$

22. 在有毒、缺氧或浓烟等危险环境开展侦查、搜救是消防救援的核心工作之一, 救援人员常面临人身安全威胁, 关键时刻需要可靠伙伴——消防机器狗, 它能深入室内高危区, 打通室内室外壁垒进行搜救, 搭载的远距通讯模块, 可实现远程操控与实时传图, 为救援决策提供可视化信息.

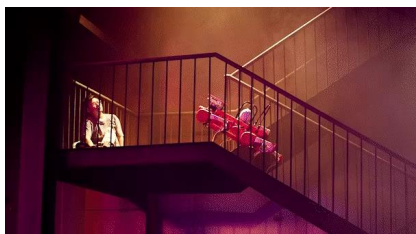
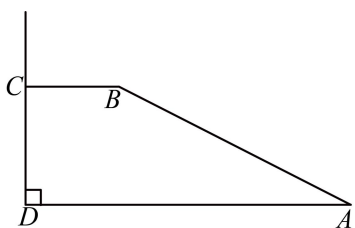
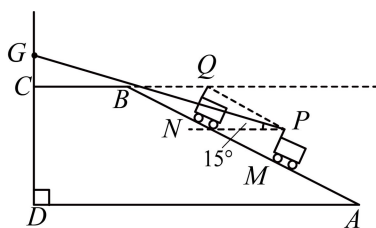


图1是被困人员所处的楼梯横断面示意图. 楼梯斜坡用 AB 表示, 转角平台用 BC 表示, 地面用 AD 表示. 已知 $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, 垂足为 D , $AB = 6$ 米, $BC = 2$ 米, $AD = (3\sqrt{3} + 2)$ 米.



(图1)



(图2)

(1) 求斜坡 AB 的坡比;

(2) 如图2, 当机器狗爬到斜坡 AB 上点 M 处时, 探测仪 P 测得被困人员头顶 G 的仰角为 15° , 继续前行到点 N 处, 恰好能搜集到被困人员全身的影像, 此时探测仪在线段 CB 的延长线上, 记作点 Q . 图2示意图中所有点均处于同一平面, $PM = QN$, $PM \perp AB$, $QN \perp AB$, 垂足分别为 M, N , $GC = 0.52$ 米,

$PG = 5$ 米, 求 MN 的长. (参考数据: $\sin 15^\circ \approx 0.26$, $\cos 15^\circ \approx 0.97$, $\tan 15^\circ \approx 0.27$)

【答案】 (1) 斜坡 AB 的坡比为 $1:\sqrt{3}$;

(2) MN 的长 1.56 米.

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的判定与性质, 解直角三角形, 勾股定理等知识, 掌握相关知识是解题的关键.

根据题意可知:

$$\angle GPF = 15^\circ, \angle HQP = \angle QBA = \angle A, MN = PQ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle GPF \text{ 中, } \sin \angle GPF = \frac{GF}{PG},$$

$$\therefore GF = 5 \cdot \sin 15^\circ \approx 1.3 \text{ 米},$$

$$\therefore HP = CF = GF - CG = 1.3 - 0.52 = 0.78 \text{ 米},$$

$$\text{由 } i_{AB} = \tan A = 1 : \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

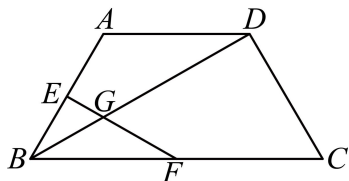
$$\therefore \angle HQP = \angle A = 30^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle QHP \text{ 中, } QP = 2HP = 1.56 \text{ 米},$$

$$\therefore MN = QP = 1.56 \text{ 米},$$

$$\therefore MN \text{ 的长 } 1.56 \text{ 米}.$$

23. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, E 、 F 分别是 AB 、 BC 边的中点, BD 与 EF 相交于点 G .



(1) 求证: $BG = GF$;

(2) 连接 AG 、 AF , 当 $AG = GF$ 时, 求证: 四边形 $AFCD$ 是菱形.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

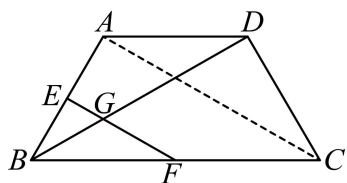
【解析】

【分析】 (1) 连接 AC , 如图所示, 由等腰梯形的性质得到 $AB = CD$, $\angle ABC = \angle DCB$, 进而由全等三角形的判定定理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SAS), 进而得到 $\angle ACB = \angle DBC$, 再由三角形中位线的判定与性质得到 $\angle EFB = \angle ACB$, 等量代换得到 $\angle EFB = \angle DBC$, 再由等角对等边即可得证;

(2) 由题意, 等量代换得到 $AG = BG$, 由中垂线的判定得到 $EG \perp AB$, 从而由 $EF \parallel AC$ 得到 $\angle BAC = \angle BEF = 90^\circ$, 再由直角三角形斜边的中线等于斜边的一半, 结合题中条件确定 $CF = AD$, 从而由平行四边形的判定得到四边形 $AFCD$ 是平行四边形, 进而得证四边形 $AFCD$ 是菱形.

【小问 1 详解】

证明：连接 AC ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形

$\therefore AB = CD, \angle ABC = \angle DCB.$

又 $\because BC = BC,$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (\text{SAS}).$

$\therefore \angle ACB = \angle DBC.$

$\because E, F$ 是 AB, BC 中点,

$\therefore EF \parallel AC,$

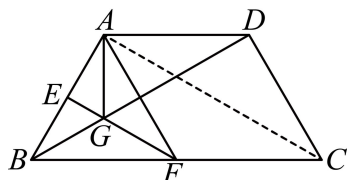
$\therefore \angle EFB = \angle ACB,$

$\therefore \angle EFB = \angle DBC,$

$\therefore BG = GF;$

【小问 2 详解】

证明：连接 AC ，如图所示：



$\because BG = GF, AG = GF,$

$\therefore AG = BG,$

又 $\because E$ 是 AB 中点,

$\therefore EG \perp AB,$

$\because E, F$ 是 AB, BC 中点,

$\therefore EF \parallel AC,$

$\therefore \angle BAC = \angle BEF = 90^\circ,$

$\because F$ 是 BC 边中点,

$\therefore AF = BF = CF = \frac{1}{2}BC,$

$\because BC = 2CF, BC = 2AD,$

$$\therefore CF = AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是平行四边形,

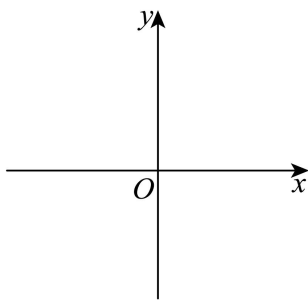
$$\because AF = FC,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是菱形.

【点睛】 本题是四边形的综合，涉及等腰梯形性质、全等三角形的判定与性质、三角形中位线的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、中垂线的判定与性质、直角三角形斜边的中线等于斜边的一半、平行四边形的判定、菱形的判定等知识. 熟练掌握相关几何性质与判定是解决问题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，如果一个点的横坐标与纵坐标互为倒数，就称这个点为“倒数点”. 例如：

$\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(2025, \frac{1}{2025}\right)$ 都是“倒数点”. 如果直线 $l: y = -x - c (c > 0)$ 上有且只有一个“倒数点”，记作点 P .



(1) 求直线 l 的解析式以及点 P 的坐标;

(2) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过直线 l 上的“倒数点”点 P 和点 $Q(1, 7)$ ，顶点为 M .

①求顶点 M 的坐标;

②抛物线上是否存在点 N ，使得 $\triangle PMN$ 是以 PM 为直角边的直角三角形，若存在，求出点 N 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x - 2, P(-1, -1)$

(2) ① $M(-2, -2)$; ② 存在, $N(-3, -1), (-4, 2)$

【解析】

【分析】 本题是二次函数综合题，主要考查了勾股定理、等腰直角三角形的性质、面积的计算等，要注意分类求解，避免遗漏.

(1) 依题设点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ，代入 $y = -x - c$ ，得 $t^2 + ct + 1 = 0$ ，则 $\Delta = c^2 - 4 = 0$ ，即可求解;

(2) ①由待定系数法的即可求解;

②设 $N(m, m^2 + 4m + 2)$ ，若 $\triangle PMN$ 是以 PM 为直角边的直角三角形，分为两种情况： $\angle PMN = 90^\circ$ 或 $\angle NPM = 90^\circ$ ，分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：依题设点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ，代入 $y = -x - c$ ，得 $t^2 + ct + 1 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = c^2 - 4,$$

$\because$ 直线 l 上有且只有一个倒数点，

$$\therefore c^2 - 4 = 0, \text{ 解得 } c = \pm 2,$$

$$\because c > 0,$$

$$\therefore c = 2.$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式是: } y = -x - 2,$$

$$\text{由 } t^2 + 2t + 1 = 0, \text{ 得 } t_1 = t_2 = -1,$$

$$\therefore P(-1, -1);$$

【小问 2 详解】

解：① $\because$ 抛物线经过点 $P(-1, -1)$ ， $Q(1, 7)$ ，且 $c = 2$ ，

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = -1 \\ a + b + c = 7 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{解方程组得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为: } y = x^2 + 4x + 2,$$

$$\therefore y = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2,$$

$$\therefore \text{顶点 } M(-2, -2).$$

② $\because N$ 是抛物线 $y = x^2 + 4x + 2$ 上的点，

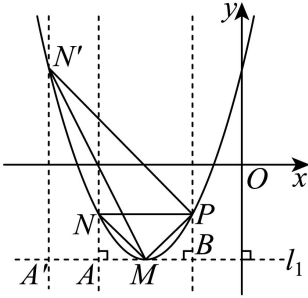
$$\therefore \text{设 } N(m, m^2 + 4m + 2),$$

若 $\triangle PMN$ 是以 PM 为直角边的直角三角形，

$$\therefore \text{只有两种情况: } \angle PMN = 90^\circ \text{ 或 } \angle NPM = 90^\circ,$$

法 1: (i) 当 $\angle PMN = 90^\circ$ 时,

过点 M 作直线 $l_1 \perp y$ 轴, $NA \perp l_1$ 于 A , $PB \perp l_1$ 于 B ,



$$\because P(-1, -1), M(-2, -2),$$

$$\therefore BM = BP, \text{ 可得 } \angle BMP = 45^\circ,$$

$$\because \angle PMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN = 45^\circ,$$

$$\therefore AM = AN,$$

$$\text{即 } -2 - m = m^2 + 4m + 2 - (-2),$$

$$\text{整理得 } m^2 + 5m + 6 = 0,$$

$$\therefore m = -3 \text{ 或 } -2 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore N(-3, -1).$$

(ii) 当 $\angle MPN = 90^\circ$ 时,

$$\text{同理可得 } -1 - m = m^2 + 4m + 2 - (-1),$$

$$\therefore m^2 + 5m + 4 = 0,$$

$$\therefore m = -4 \text{ 或 } -1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore N(-4, 2).$$

综上所述: $N(-3, -1), (-4, 2)$.

$$\text{法 2: } PM^2 = 2, \quad PN^2 = (m+1)^2 + (m^2 + 4m + 3)^2, \quad MN^2 = (m+2)^2 + (m^2 + 4m + 4)^2,$$

(i) 当 $\angle MPN = 90^\circ$ 时, $PM^2 + PN^2 = MN^2$,

$$\therefore 2 + (m+1)^2 + (m^2 + 4m + 3)^2 = (m+2)^2 + (m^2 + 4m + 4)^2,$$

$$\text{解得: } m = -1 \text{ 或 } m = -4,$$

$$\therefore m = -4,$$

$$\therefore N(-4, 2);$$

$$(ii) \text{ 当 } \angle PMN = 90^\circ \text{ 时, } PM^2 + MN^2 = PN^2,$$

$$\therefore 2 + (m+2)^2 + (m^2 + 4m + 4)^2 = (m+1)^2 + (m^2 + 4m + 3)^2,$$

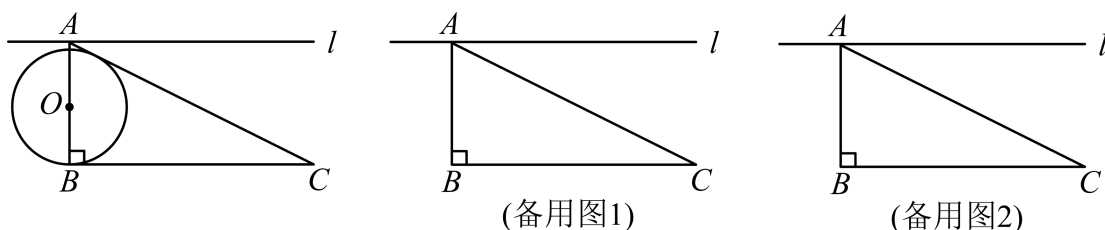
$$\text{解得: } m = -2 \text{ 或 } m = -3,$$

$$\therefore m = -3,$$

$$\therefore N(-3, -1).$$

综上所述: $N(-3, -1), (-4, 2)$.

25. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BC = 2$, $\tan \angle ACB = \frac{1}{2}$, 过点 A 的直线 l 与边 BC 平行, 点 O 在射线 BA 上, $\odot O$ 是以 O 为圆心, OB 为半径的圆.



(1) 当直线 AC 与 $\odot O$ 相切时, 求 OB 的长;

(2) 当直线 l 与 $\odot O$ 相交时, 交点记为点 E 、 F , 且点 E 在点 F 的右边; 以 C 为圆心、 CE 为半径长作 $\odot C$ 与 $\odot O$ 的另一个交点记为 G .

①若四边形 $ABCE$ 是矩形, 求 OB 的长;

②若 $\triangle AEC$ 是以 AE 为腰的等腰三角形, 求 $\angle AEG$ 的正切值.

【答案】 (1) $2\sqrt{5} - 4$

$$(2) \text{ ① } \frac{5}{2}; \text{ ② } \tan \angle AEG = \frac{2}{3} \text{ 或 } \frac{64}{41}$$

【解析】

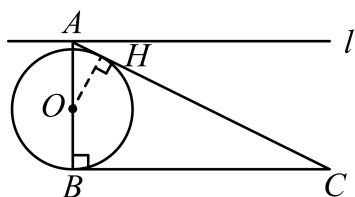
【分析】 (1) 作 $OH \perp AC$, 先在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中求出 AB 、 AC 长度及 $\sin \angle BAC$ 的值, 利用切线性质设 $OB = OH = r$ 得出 OA 表达式. 在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中根据正弦函数定义列方程求解 r .

(2) ① 利用矩形性质得到 AE 的长度, 设 , 表示出 OA , 在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中, 依据勾股定理

列方程求解; ② 1. 由两圆相交性质得出 $OC \perp EG$, 通过角度关系得到 $\angle AOP = \angle AEG$, 分 $AE = AC$ 与 $AE = CE$ 两种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

解: 作 $OH \perp AC$ 于 H ,



$\because AC$ 与 $\odot O$ 相切

$\therefore$ 设 $OB = OH = r$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$BC = 2, \quad \tan \angle ACB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = BC \cdot \tan \angle ACB = 1,$$

$$AC = \sqrt{5}, \quad \sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore OA = 1 - r,$$

在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中

$$\sin \angle BAC = \frac{OH}{OA},$$

$$\therefore \frac{r}{1-r} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore r = 2\sqrt{5} - 4.$$

【小问 2 详解】

① $\because$ 四边形 $ABCE$ 是矩形

$$\therefore AE = BC = 2,$$

设  , 则 $OA = r - 1$,

在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中, $OA^2 + AE^2 = OE^2$,

$$\therefore (r-1)^2 + 2^2 = r^2,$$

$$r = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OB = \frac{5}{2};$$

②若 $\triangle AEC$ 是以 AE 为腰的等腰三角形,

那么 $AE = AC$ 或 $AE = CE$,

设 OC 与 l 相交于点 P ,

$\because \odot O$ 与 $\odot C$ 相交于 E 、 G ,

$$\therefore OC \perp EG,$$

又 $\because \angle OAP = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOP + \angle APO = \angle EPC + \angle AEG = 90^\circ,$$

又 $\because \angle APO = \angle EPC$,

$$\therefore \angle AOP = \angle AEG,$$

(i) 当 $AE = AC = \sqrt{5}$ 时,

$$\because OA^2 + AE^2 = OE^2,$$

$$\therefore (r-1)^2 + (\sqrt{5})^2 = r^2, \text{ 解得: } r = 3,$$

$$\therefore OB = 3,$$

$$\because \tan \angle AEG = \tan \angle AOP = \frac{BC}{OB},$$

$$\therefore \tan \angle AEG = \frac{2}{3}.$$

(ii) 当 $AE = CE$ 时, 作 $EN \perp AC$,

$$\therefore AN = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$\because l \parallel BC$,

$$\therefore \angle EAC = \angle ACB, \text{ 即 } \cos \angle EAC = \cos \angle ACB,$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{AE} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\text{解得 } AE = \frac{5}{4},$$

设  , 则 $OA = r - 1$, 在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中,

$$(r-1)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = r^2,$$

$$r = \frac{41}{32},$$

$$\therefore \tan \angle AEG = \frac{64}{41}.$$

综上所述, $\tan \angle AEG = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{64}{41}$.

【点睛】 本题考查了直线与圆的位置关系、矩形性质、等腰三角形性质、解直角三角形及勾股定理的应用. 解题关键是利用相关性质构建边的关系, 通过方程求解线段长度, 并借助角度等量代换求角的正切值.