

2024 学年第二学期期中考试九年级数学试卷

考生注意:

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列实数中, 无理数是 ()

- A. π B. $\frac{1}{7}$ C. $\sqrt{16}$ D. $0.\dot{1}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查无理数, 算术平方根, 无限不循环小数叫做无理数, 据此进行判断即可.

【详解】解: $\frac{1}{7}$ 是分数, $\sqrt{16} = 4$ 是整数, $0.\dot{1}$ 是无限循环小数, 它们不是无理数,

π 是无限不循环小数, 它是无理数,

故选: A.

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $3a^2 - 2a^2 = 1$ B. $(a+1)^2 = a^2 + 1$ C. $(2a)^3 = 6a^3$ D. $(a^3)^2 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查完全平方公式, 合并同类项, 幂的乘方与积的乘方, 熟练掌握相关运算是解题的关键. 利用完全平方公式, 合并同类项法则, 幂的乘方与积的乘方法则逐项判断即可.

【详解】解: A、 $3a^2 - 2a^2 = a^2$, 则 A 不符合题意,

B、 $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, 则 B 不符合题意,

C、 $(2a)^3 = 8a^3$, 则 C 不符合题意,

D、 $(a^3)^2 = a^6$ ，则 D 符合题意，

故选：D.

3. “任意画一个三角形，它的内角和为 360° ”属于（ ）

- A. 必然事件； B. 随机事件 C. 不可能事件 D. 以上都不是

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查随机事件、三角形内角和定理，必然事件指在一定条件下，一定发生的事件，不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，根据事件发生的可能性大小判断即可.

【详解】解： $\because$ 任意画一个三角形，它的内角和为 180° ，

$\therefore$ “任意画一个三角形，它的内角和为 360° ”属于不可能事件.

故选：C.

4. 如果一个正多边形的内角和为 1800° ，那么这个正多边形的中心角度数是（ ）

- A. 10 B. 12 C. 18 D. 30

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了多边形的内角和外角，解题关键是熟练掌握正多边形的定义和多边形的内角和公式. 设这个正多边形的边数为 n ，列方程求出 n ，再根据正多边形每条边所对的中心角都相等，列出算式进行计算即可.

【详解】解：设这个正多边形的边数为 n ，列方程得：

$$180^\circ(n-2) = 1800^\circ,$$

解得 $n = 12$ ，

$\therefore$ 这个正多边形的中心角的度数为： $360^\circ \div 12 = 30^\circ$ ，

$\therefore$ A, B, C 选项不符合题意，D 选项符合题意，

故选：D.

5. 《孙子算经》中有一道题，原文是：“今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根木头的长，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量木头，则木头还剩余 1 尺，问木头长多少尺？如果设木头长为 x 尺，那么下列方程正确的是（ ）

- A. $0.5(x-4.5) = x+1$ B. $0.5(x+4.5) = x-1$ C. $x+4.5 = 2x-1$ D. $x-4.5 = 2x+1$

【答案】B

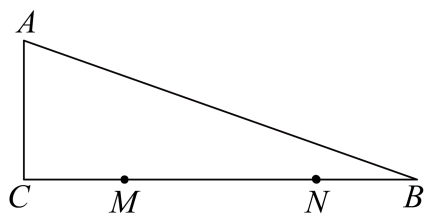
【解析】

【分析】本题考查从实际问题中抽象出一元一次方程，解题的关键是读懂题意，找到等量关系列出方程。根据将绳子对折再量木头，则木头还剩余1尺列出方程即可。

【详解】解：根据题意得： $0.5(x+4.5)=x-1$ ，

故选：B.

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin B = \frac{1}{3}$ ， $BC = 12$ ， M 、 N 是 BC 边上的点， $CM = BN$ ，如果以 MN 为直径的圆与以 AC 为直径的圆相离，且以 MN 为直径的圆与边 AB 有公共点，那么 CM 的值可以是（ ）



A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查直线和圆的位置关系，解三角形等知识点，解题关键是根据 $CM = BN$ 确定以 MN 为直径圆的圆心是 BC 的中点，根据直角三角形的边角关系求出 AC ，进而求出 AB ，再根据 $CM = BN$ 确定 BC 的中点是以 MN 为直径的圆的圆心，由 $\odot O$ 与直线 AB 有公共点， $\odot O$ 以 AC 为直径的圆相离，确定 $\odot O$ 半径的取值范围，进而得出答案。

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\sin B = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } AB = 3AC,$$

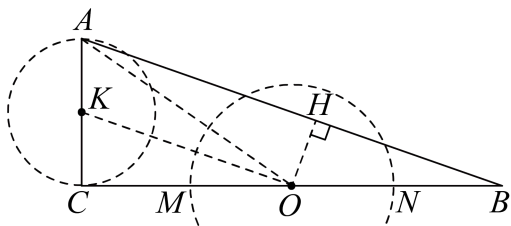
$$\because AC^2 + BC^2 = AB^2, \quad BC = 12,$$

$$\therefore AC^2 + 12^2 = (3AC)^2,$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{2}, \text{ (负值已经舍去)}$$

$$\therefore AB = 9\sqrt{2},$$

如图，取 MN 的中点 O ，即 $MO = NO$ ，



$$\therefore CM = BN,$$

$$\therefore CM + MO = BN + NO, \text{ 即 } CO = BO = \frac{1}{2}BC = 6,$$

过点 O 作 $OH \perp AB$, 连接 OA ,

$$\therefore OH = OB \sin B = 6 \times \frac{1}{3} = 2,$$

$$OA = \sqrt{AC^2 + OC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore \text{以 } MN \text{ 为直径的圆与边 } AB \text{ 有公共点时, } 2 \leq OM \leq 3\sqrt{6},$$

$$\therefore 2 \leq CO - CM \leq 3\sqrt{6}, \text{ 即 } 2 \leq 6 - CM \leq 3\sqrt{6},$$

$$\therefore 6 - 3\sqrt{6} \leq CM \leq 4,$$

$$\text{取 } AC \text{ 的中点 } K, \text{ 即 } CK = AK = \frac{1}{2}AC = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore OK = \sqrt{CK^2 + CO^2} = \frac{9}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{又} \therefore \text{以 } MN \text{ 为直径的圆与以 } AC \text{ 为直径的圆相离, 即 } KC + MO < \frac{9}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{3}{2}\sqrt{2} + MO < \frac{9}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore MO < 3\sqrt{2}, \text{ 即: } 0 \leq 6 - CM < 3\sqrt{2}$$

$$\therefore 6 - 3\sqrt{2} < CM < 6,$$

综上所述: $6 - 3\sqrt{2} < CM < 4$,

$$\therefore 6 - 3\sqrt{2} < 2\sqrt{2} < 4, \text{ C 选项在取值范围内, 故符合题意,}$$

$$1 < 6 - 3\sqrt{2}, \sqrt{2} < 6 - 3\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} > 4, \text{ 选项 A、B、D 不在取值范围内, 不符合题意.}$$

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. -2 的相反数是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 该题考查了相反数，根据只有符号不同的两个数互为相反数，可得答案.

【详解】 解： -2 的相反数是 2 ,

故答案为： 2 .

8. 计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【详解】 解： 根据二次根式的乘法法则计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

故答案为： $2\sqrt{3}$.

9. 因式分解： $y^3 - 16y = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $y(y+4)(y-4)$

【解析】

【分析】 先提取公因式，再根据平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解： $y^3 - 16y = y(y^2 - 16) = y(y+4)(y-4)$,

故答案为： $y(y+4)(y-4)$.

【点睛】 本题主要考查了综合提公因式和公式法因式分解，解题的关键是正确找出公因式，熟练掌握平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

10. 分式方程 $\frac{3}{x-2} = 1$ 的解是 $x = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 按解分式方程的步骤求解即可.

【详解】 $\frac{3}{x-2} = 1$

$$3 = x - 2$$

解得 $x = 5$

经检验， $x = 5$ 是原方程的解.

故答案为： 5 .

【点睛】 本题考查了解分式方程，正确的计算是解题的关键.

11. 如果 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2+x+a=0$ 的解，那么 $a=$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的解，把 $x=1$ 代入 $x^2+x+a=0$ ，进而可求出 a 的值.

【详解】 解：把 $x=1$ 代入 $x^2+x+a=0$ ，

得： $1+1+a=0$ ，

解得： $a=-2$ ，

故答案为： -2

12. 从 2，3，5 三个数中，随机选取两个不同的数，其积是偶数的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了用树状图或列表法求等可能事件的概率，方法是用树状图或列表法列举出所有可能出现的结果总数，找出符合条件的结果数，用分数表示即可，注意每种情况发生的可能性相等. 利用画树状图或列表的方法，得出所有可能出现的结果总数，从中找到符合条件的结果数，进而求出概率即可.

【详解】 解：根据题意列表如下，

	2	3	5
2		(2,3)	(2,5)
3	(3,2)		(3,5)
5	(5,2)	(5,3)	

共有 6 种等可能的结果，其中积是偶数的结果有 **(2,3)**，**(3,2)**，(5,2)(2,5)，共 4 种，

∴其积是偶数的概率是： $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$

13. 已知正比例函数 $y=\left(1-\frac{k}{2}\right)x$ ， y 的值随 x 的值增大而减小，那么 k 的值可以是_____。（写出一个符

合题意的 k 的值即可)

【答案】 3 (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的增减性，掌握正比例函数的意义是解题关键.

由正比例函数增减性直接求解即可得到答案.

【详解】 解： 在正比例函数 $y = \left(1 - \frac{k}{2}\right)x$ 中，

$\because y$ 的值随 x 的值增大而减小，

$$\therefore 1 - \frac{k}{2} < 0.$$

解不等式 $1 - \frac{k}{2} < 0$ 得

$$k > 2.$$

$\therefore$ 只要取大于 2 的数都符合题意；

故答案为： 3 (答案不唯一).

14. 为了解学生的消防安全意识，学校随机抽取了 22 名学生进行相关知识测试，测试成绩如表所示. 已知全校共有 900 名学生，如果成绩不低于 95 分为“优秀”，请估计该校学生中消防安全意识水平为“优秀”的人数是_____.

成绩 (单位: 分)	75	80	85	90	95	100
人数	1	1	4	5	6	5

【答案】 450

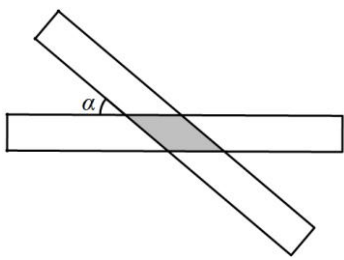
【解析】

【分析】 本题考查了用样本估计总体，熟练掌握方法是解答本题的关键. 按照方法计算即可.

【详解】 解： 根据题意得， $900 \times \frac{6+5}{22} = 450$ ，

故答案为： 450.

15. 如图，将宽均为 1 的两张矩形纸片，交叉放置，形成的锐角为 α ($0 < \alpha < 90^\circ$)，那么重叠部分 (阴影部分) 的周长是_____. (结果用含 α 的三角比的代数式表示)



【答案】 $\frac{4}{\sin \alpha}$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质，菱形的判定与性质，解直角三角形，解题的关键是掌握相关知识的灵活运用.

【详解】 解：当两个宽度均为 1 的矩形交叉形成锐角 α 时，重叠部分为菱形.

菱形的边长由矩形宽度在垂直方向上的投影决定.

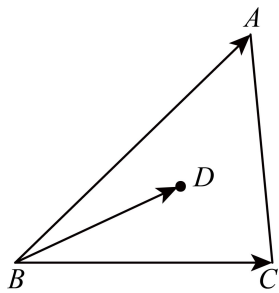
由于每个矩形的宽度为 1，且两矩形夹角为 α ，菱形的高为 1，

$\therefore$ 菱形的边长为： $\frac{1}{\sin \alpha}$ ，

因此，菱形的周长为 $\frac{4}{\sin \alpha}$ ，

故答案为： $\frac{4}{\sin \alpha}$.

16. 如图，点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 BD ，如果 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BD} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量与三角形重心的知识，掌握三角形法则与三角形重心的性质是解题的关键. 延长 BD 交 AC 于点 E ，由 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，根据三角形法则，即可求得 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$ ，再由点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心，根据重心的性质，即可求出结果.

【详解】 解：延长 BD 交 AC 于点 E ，

∴ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形,

$$\therefore AB = EF, AB \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle CHE \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CH}{AC} = \frac{HE}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore HE = \frac{3}{4}AB, AH = \frac{1}{4}AC,$$

$$\because AD \parallel BC, FG \parallel AC,$$

∴ 四边形 $ACGF$ 为平行四边形,

$$\therefore AF = CG, AC = FG,$$

$$\therefore BE = CG,$$

$$\therefore BC = EG,$$

$$\therefore \frac{EC}{EG} = \frac{3}{4},$$

$$\because FG \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle EHC \sim \triangle EFG,$$

$$\therefore \frac{EH}{EF} = \frac{CH}{FG} = \frac{EC}{EG} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EH = \frac{3}{4}EF, CH = \frac{3}{4}FG,$$

$$\therefore EH = \frac{3}{4}AB, CH = \frac{3}{4}AC,$$

$$\therefore \text{四边形 } CGFH \text{ 与四边形 } ABEH \text{ 周长的差} = (CH + CG + FG + FH) - (EH + BE + AB + AH)$$

$$= \left(\frac{3}{4}AC + AF + AC + \frac{1}{4}AB \right) - \left(\frac{3}{4}AB + AF + AB + \frac{1}{4}AC \right)$$

$$= \frac{7}{4}AC + AF + \frac{1}{4}AB - \frac{7}{4}AB - AF - \frac{1}{4}AC$$

$$= \frac{7}{4}(AC - AB) - \frac{1}{4}(AC - AB)$$

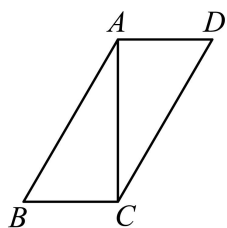
$$= \frac{3}{2}(AC - AB)$$

$$= \frac{3}{2}a,$$

故答案为: $\frac{3}{2}a$.

18. 如图, 平行四边形 $ABCD$, $AB = 2BC$, 对角线 $AC \perp BC$, 将 ABC 绕点 B 旋转, 使得点 A 落在直

线 CD 上的点 A' 处, 那么 $S_{\triangle A'BC} : S_{\triangle ABC}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{13} \pm 1}{4}$

【解析】

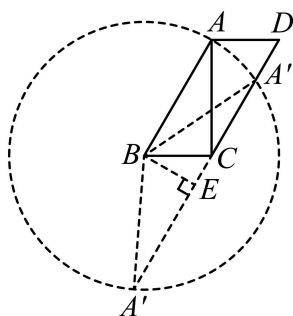
【分析】 本题考查相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 平行四边形的性质, 旋转的性质; 如图, 以点 B 为圆心, AB 为半径画圆, 与直线 CD 交点即为 A' , 过 B 作 $BE \perp CD$ 交直线 CD 于 E , 设 $BC = 2a$, 则

$AB = 2BC = 4a$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}a$, $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}a^2$, 再证明 $\triangle ABC \sim \triangle BCE$ 得到,

$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BE} = \frac{BC}{CE}$, 代入求出 $BE = \sqrt{3}a$, $CE = a$, 利用勾股定理求出 $A'E = \sqrt{13}a$, 即可求出 $A'C$ 和

$S_{\triangle A'BC} = \frac{1}{2} A'C \times BE$, 再求 $S_{\triangle A'BC} : S_{\triangle ABC}$ 即可, 注意分情况讨论.

【详解】 解: 如图, 以点 B 为圆心, AB 为半径画圆, 与直线 CD 交点即为 A' , 过 B 作 $BE \perp CD$ 交直线 CD 于 E , 则 $AB = A'B$;



$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABC = \angle BCE$,

$\because AB = 2BC$, $AC \perp BC$,

$\therefore$ 设 $BC = 2a$, 则 $AB = 2BC = 4a$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}a$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}a \times 2a = 2\sqrt{3}a^2$,

$\because AC \perp BC$, $BE \perp CD$,

$\therefore \angle ACB = \angle CEB = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BE} = \frac{BC}{CE},$$

$$\therefore \frac{4a}{2a} = \frac{2\sqrt{3}a}{BE} = \frac{2a}{CE},$$

$$\text{解得 } BE = \sqrt{3}a, \quad CE = a,$$

$$\therefore A'E = \sqrt{A'B^2 - BE^2} = \sqrt{(4a)^2 - (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{13}a,$$

$$\text{当 } A' \text{ 在 } C \text{ 右边时, } A'E = AE - CE = \sqrt{13}a - a,$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{1}{2} A'C \cdot BE = \frac{1}{2} \times (\sqrt{13}a - a) \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13} - 1)}{2} a^2,$$

$$\therefore S_{\triangle A'BC} : S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13} - 1)}{2} a^2 : 2\sqrt{3}a^2 = \frac{\sqrt{13} - 1}{4};$$

$$\text{当 } A' \text{ 在 } C \text{ 左边时, } A'E = AE + CE = \sqrt{13}a + a,$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{1}{2} A'C \cdot BE = \frac{1}{2} \times (\sqrt{13}a + a) \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13} + 1)}{2} a^2,$$

$$\therefore S_{\triangle A'BC} : S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13} + 1)}{2} a^2 : 2\sqrt{3}a^2 = \frac{\sqrt{13} + 1}{4};$$

$$\text{综上所述, } S_{\triangle A'BC} : S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{13} \pm 1}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{13} \pm 1}{4}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } (-\sqrt{2})^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + |1 - \sqrt{3}| - 2\sin 60^\circ.$$

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了负整数指数幂, 化简绝对值, 特殊三角函数值, 先计算负整数指数幂, 化简绝对值, 代入特殊三角函数值, 然后再进行二次根式的混合运算即可.

$$\text{【详解】 解: 原式} = 2 + (-3) + (\sqrt{3} - 1) - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}$$

$$= -2.$$

20. 解方程组: $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = 0. \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

【解析】

【详解】 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$

$$(x-y)^2 - 4y^2 = 0$$

又因: $x-y=2$ 代入上式

$$4 - 4y^2 = 0$$

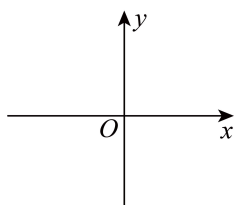
$$y=1 \text{ 或 } y=-1$$

再将 $y=1$ 、 $y=-1$ 分别代入 $x-y=2$

$$\text{则 } x=1, x=3$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

21. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, 且 $k \neq 0$) 的图像经过点 $A(k-4, 1-k)$.



(1) 求 k 的值;

(2) 点 B 在该反比例函数图像上 (点 B 与点 A 在不同的象限内), 联结 AB , 与 x 轴交于点 P , 且 $BP = 3AP$, 求 $\angle BPO$ 的正切值.

【答案】 (1) k 的值为 2

(2) $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征、三角形相似的判定与性质, 熟练掌握以上知识点是关键.

(1) 根据反比例函数图象上点的坐标特征列出 $\frac{k}{k-4} = 1-k$, 求出 k 值即可;

(2) 过点 A 、 B 分别作 x 轴的垂线, 垂足为点 M 、 N , 根据反比例函数图象上点的坐标特征得到 $AM = 1$, $BN = 3$, 再利用三角形相似的性质得到 $PN = \frac{3}{4}MN = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = 2$, 最后根据正切的定义求出 $\angle BPO$ 的正切值即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(k-4, 1-k)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $\frac{k}{k-4} = 1-k$,

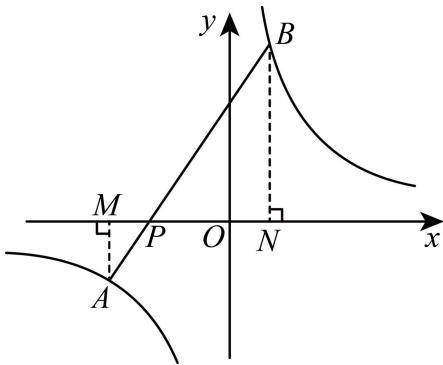
$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$

解得 $k = 2$;

所以, k 的值为 2.

【小问 2 详解】

解: 过点 A 、 B 分别作 x 轴的垂线, 垂足为点 M 、 N ,



由 (1) 可知, 点 $A(-2, -1)$, 则 $AM = 1$, $OM = 2$,

$\because AM \parallel BN$,

$\therefore \triangle AMP \sim \triangle BNP$,

$$\therefore \frac{AM}{BN} = \frac{MP}{NP} = \frac{AP}{BP} = \frac{1}{3},$$

$\therefore BN = 3$,

当 $y = 3$ 时, $3 = \frac{2}{x}$,

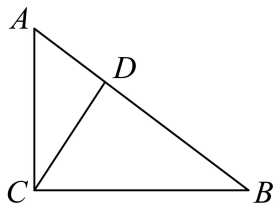
$$\therefore ON = \frac{2}{3},$$

$$\therefore MN = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

$$PN = \frac{3}{4}MN = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = 2,$$

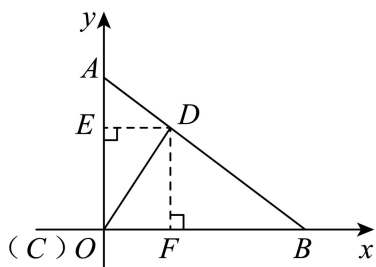
所以, 在 $\text{Rt}\triangle BPN$ 中, $\tan \angle BPO = \frac{BN}{PN} = \frac{3}{2}$.

22. 【问题】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, D 是边 AB 上的点, 连接 CD , $AD = \frac{1}{3}AB$, 求 CD 的长.



【发现】某数学兴趣小组在讨论解决上述问题的过程中, 运用了如下方法:

解: 如图, 以 C 为原点, CB 、 CA 所在的直线为 x 轴、 y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy .



过点 D 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足为点 E 、 F ,

由 DE 平行 x 轴, 可得 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$,

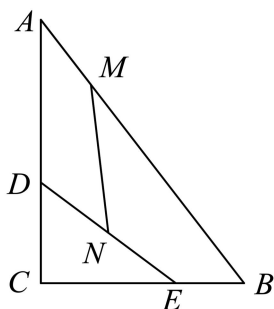
由 $AD = \frac{1}{3}AB$, $BC = 4$, 可得 $DE = \frac{4}{3}$,

同理可得, $DF = 2$, 于是点 D 坐标是 $(\frac{4}{3}, 2)$,

$$\therefore CD = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + (2 - 0)^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

【运用】根据上述解答给你的启发, 解答下面的问题:

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$, 点 D 、 E 分别在边 AC 、 BC 上, $CD = 3$, $CE = 4$, 连接 DE , 点 M 、 N 分别在线段 AB 、 DE 上, $AM = \frac{1}{4}AB$, $DN = \frac{1}{2}DE$, 连接 MN , 求 MN 的长.



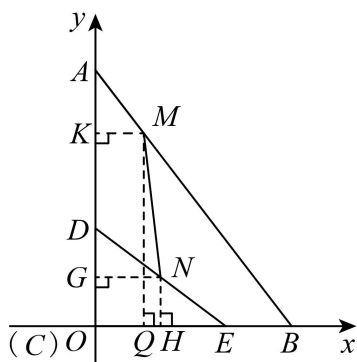
【答案】 $\frac{\sqrt{82}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了坐标与图形，三角形相似的判定和性质，两点间距离公式，以 C 为原点， CB 、 CA 所在的直线为 x 轴、 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy ，过点 N 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足为点 H 、 G ，过点 M 作 $MK \perp y$ 轴， $MQ \perp x$ 轴于点 Q ，证明 $\triangle DNG \sim \triangle DEC$ ， $\frac{GN}{EC} = \frac{DN}{DE}$ ，得出

$GN = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，同理得出 $NH = \frac{1}{2}DC = \frac{3}{2}$ ，得出点 N 坐标是 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ，同理得出点 M 坐标是 $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$ ，根据两点间距离公式求出结果即可。

【详解】 解：如图，以 C 为原点， CB 、 CA 所在的直线为 x 轴、 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy ，过点 N 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足为点 H 、 G ，过点 M 作 $MK \perp y$ 轴， $MQ \perp x$ 轴于点 Q ，如图所示：



$$\therefore \angle DGN = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore GN \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \triangle DNG \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{GN}{EC} = \frac{DN}{DE},$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}DE, \quad CE = 4,$$

$$\therefore GN = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

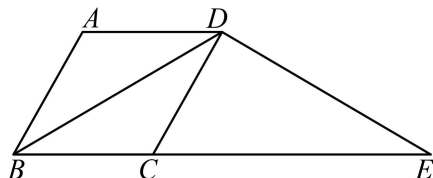
$$\text{同理可得, } NH = \frac{1}{2}DC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 坐标是 } \left(2, \frac{3}{2}\right),$$

同理可得，点 M 坐标是 $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$ ，

$$\therefore MN = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 6\right)^2} = \frac{\sqrt{82}}{2}.$$

23. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ ， E 是 BC 延长线上一点， $BD = DE$ ，且 $BD^2 = AD \cdot BE$ 。



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 如果 $CE = 2BC$ ，求证： $CD \perp DE$ 。

【答案】(1) 见解析；

(2) 见解析。

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质可证 $\angle 1 = \angle 2$ ，根据 $BD^2 = AD \cdot BE$ 可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BE}$ ，从而可证 $\triangle ABD \sim \triangle BDE$ ，根据相似三角形的性质可证 $\angle 1 = \angle 4$ ，根据等角对等边可证结论成立；

(2) 过点 D 作 $DF \perp BE$ ，根据菱形的性质可得 $AB = BC = CD = AD$ ，设 $AB = BC = CD = AD = a$ ，可得： $CE = 2a$ 、 $DE = \sqrt{3}a$ ，根据勾股定理的逆定理可证 $\triangle DCE$ 是直角三角形且 $\angle CDE = 90^\circ$ ，从而可证结论成立。

【小问 1 详解】

证明：如下图所示，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\because BD^2 = AD \cdot BE$ ，

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BE}，$$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BDE$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

$\because BD = DE$ ，

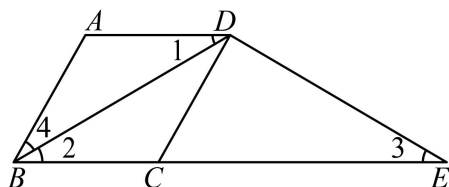
$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;



【小问 2 详解】

证明：如下图所示，过点 D 作 $DF \perp BE$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$$\text{又} \therefore CE = 2BC, \quad BD = DE,$$

$$\text{设 } AB = BC = CD = AD = a,$$

$$\therefore CE = 2a,$$

$$\therefore BE = BC + CE = a + 2a = 3a,$$

$$\text{则 } EF = BF = \frac{1}{2}BE = \frac{3}{2}a,$$

$$\therefore CF = BF - BC = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DC^2 - CF^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

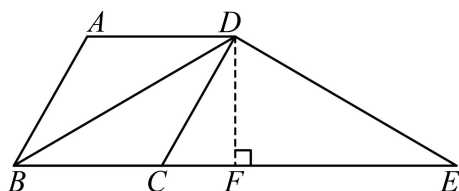
$$\therefore DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore CD^2 + DE^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4a^2, \quad CE^2 = (2a)^2 = 4a^2,$$

$$\therefore CD^2 + DE^2 = CE^2,$$

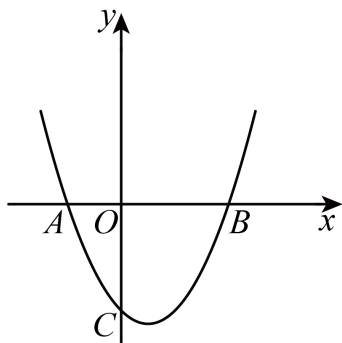
$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp DE.$$



【点睛】 本题主要考查了菱形的判定与性质、勾股定理和勾股定理的逆定理、相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质. 解决本题的关键是根据菱形的性质找边、角之间的关系.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 4$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 且 $OB = OC$.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 将该抛物线沿射线 CB 方向平移, 点 A 、 B 的对应点分别是点 A' 、 B' , 且 $\triangle A'BB'$ 的面积比 $\triangle ABC$ 的面积大 3.

① 求新抛物线的对称轴方程;

② P 是新抛物线上一点, 如果 $\angle PB'B = \angle ACB$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

(2) ① 对称轴方程是 $x = 6$; ② 点 P 的坐标是 $\left(2, \frac{17}{2}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 先求出 $C(0, -4)$, 根据 $OB = OC$, 得出 $B(4, 0)$, 把 $B(4, 0)$, 代入 $y = ax^2 - 2ax - 4$ 求出 a 的值, 即可得出解析式;

(2) ① 先求出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times [4 - (-2)] \times 4 = 12$, 则 $S_{\triangle A'BB'} = 12 + 3 = 15$, 进而得出 $A'B'$ 边上的高是 5, 设 $B'(a, 5)$, 求出直线 BC 的解析式为 $y = x - 4$, 把 $B'(a, 5)$ 代入 $y = x - 4$ 得 $B'(9, 5)$, 则可知抛物线先向右平移了 5 个单位, 又向上平移了 5 个单位, 即可解答;

② 在位于直线 $A'B'$ 上方的新抛物线的图像上取一点 P , 使得 $\angle 1 = \angle 2$, 易证 $\angle PB'B = \angle ACB$, 过点 P 作 x 轴的垂线, 与 $A'B'$ 、 x 轴分别交于点 E 、 F , 得出 $\tan \angle 2 = \tan \angle 1 = \frac{1}{2}$, 设 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{37}{2}\right)$, 则

$PE = \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{37}{2} - 5 = \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{27}{2}$, $B'E = 9 - a$, 根据在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中,

$$\tan \angle 1 = \frac{PE}{B'E} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{27}{2}}{9-a} = \frac{1}{2}, \text{ 求出 } a \text{ 的值, 即可解答.}$$

【小问 1 详解】

解: 由 $y = ax^2 - 2ax - 4$, 可得 $C(0, -4)$,

又 $OB = OC$,

则 $B(4, 0)$,

把 $B(4, 0)$, 代入 $y = ax^2 - 2ax - 4$ 得 $0 = 16a - 8x - 4$

$$a = \frac{1}{2},$$

所以, 抛物线的表达式是 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

【小问 2 详解】

解: ①由 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$,

可得抛物线的对称轴方程是 $x = 1$, $A(-2, 0)$,

由 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, -4)$,

$$\text{可得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times [4 - (-2)] \times 4 = 12,$$

$$\text{则 } S_{\triangle A'BB'} = 12 + 3 = 15,$$

根据题意 $AB = A'B' = 6$,

设 $A'B'$ 边上的高是 h ,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times h = 15,$$

解得 $h = 5$,

设 $B'(a, 5)$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将 $B(4, 0)$, $C(0, -4)$ 代入得:

$$\begin{cases} 0 = 4k + b \\ -4 = b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = -4 \end{cases},$$

∴ 直线 BC 的解析式为 $y = x - 4$,

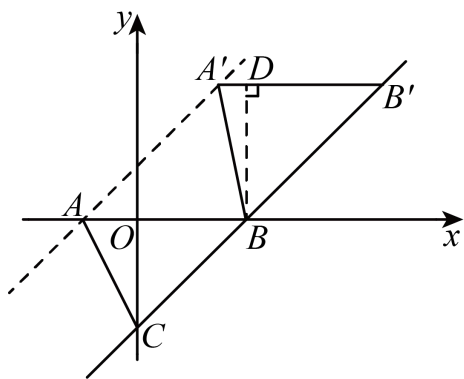
把 $B'(a, 5)$ 代入 $y = x - 4$ 得 $5 = a - 4$,

解得: $a = 9$, 则 $B'(9, 5)$,

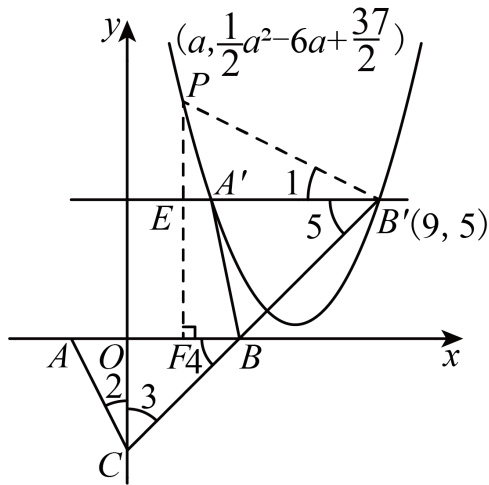
由 $B(4, 0)$, $B'(9, 5)$, 可知抛物线先向右平移了 5 个单位, 又向上平移了 5 个单位, 则 $A'(3, 5)$,

所以, 新抛物线的表达式是 $y = \frac{1}{2}(x-5)^2 - (x-5) - 4 + 5 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{27}{2}$,

∴ 对称轴方程是 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times \frac{1}{2}} = 6$.



② 在位于直线 $A'B'$ 上方的新抛物线的图像上取一点 P , 使得 $\angle 1 = \angle 2$,



在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, $CO = BO$, 则 $\angle 3 = \angle 4 = 45^\circ$,

根据题意可得 $AB \parallel A'B'$, $AA' \parallel BB'$, 则 $\angle 4 = \angle 5 = 45^\circ$,

∴ $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5$, 即 $\angle PB'B = \angle ACB$,

过点 P 作 x 轴的垂线, 与 $A'B'$ 、 x 轴分别交于点 E 、 F ,

∴ $\angle 1 = \angle 2$, $OA = 2, OC = 4$,

$$\therefore \tan \angle 2 = \tan \angle 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } P\left(a, \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{37}{2}\right),$$

$$\text{则 } PE = \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{37}{2} - 5 = \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{27}{2}, \quad B'E = 9 - a,$$

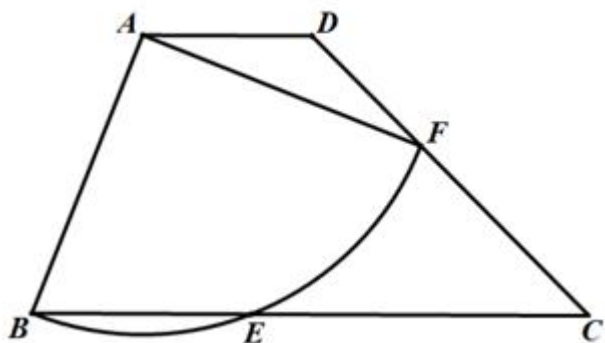
$$\text{在 Rt}\triangle BOC \text{ 中, } \tan \angle 1 = \frac{PE}{B'E} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{27}{2}}{9 - a} = \frac{1}{2},$$

解得 $a = 2$,

所以, 点 P 的坐标是 $\left(2, \frac{17}{2}\right)$.

【点睛】本题考查了二次函数综合, 解题的关键是熟练掌握求二次函数解析式的方法和步骤, 二次函数的平移规律, 解直角三角形.

25. 如图, 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle C = 45^\circ$, 以点 A 为圆心、 AB 为半径画弧, 与 BC 、 CD 分别交于点 E 、 F , 且 $\angle BAF = 90^\circ$.



(1) 如果设 $CF = 4$, $DF = 2$, 求 AB 的长;

(2) 求 $\frac{AD}{CE}$ 的值;

(3) 如果 E 是弧 $\widehat{BF}$ 的中点, 求 $\frac{DF}{FC}$ 的值.

【答案】(1) $2\sqrt{5}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{DF}{FC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 、 D 分别作 $AG \perp BC$, $DH \perp BC$, 垂足为点 G 、 H , 过点 F 作 $FP \perp AD$, 交 AD 的

延长线于点 P ，可证四边形 $AGHD$ 是矩形， $\triangle ABG \cong \triangle APF$ (AAS)，在 $\text{Rt}\triangle DPF$ 中， $DF = 2$ ，

$FP = DF \cdot \sin \angle PDF = \sqrt{2}$ ，同理， $DH = 3\sqrt{2}$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中，

$AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}$ ，由此即可求解；

(2) 由 (1) 设 $AG = DH = AP = a$ ， $BG = FP = b$ ，则 $AD = GH = a - b$ ， $BH = a$ ，则 $BC = BH + CH = 2a$ ，

$BE = 2BG = 2b$ ，所以 $CE = BC - BE = 2a - 2b$ ，则 $\frac{AD}{EC} = \frac{a-b}{2a-2b} = \frac{1}{2}$ ，由此即可求解；

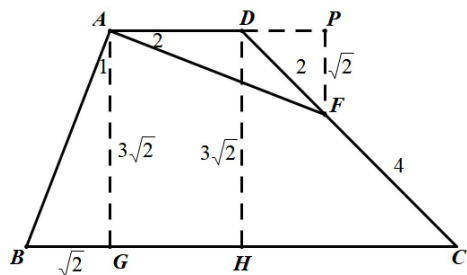
(3) 连接 EF ，延长 PF 交 BC 于点 Q ，则 $BE = EF$ ，由 (2) 可设 $FQ = a - b$ ， $BE = EF = 2b$ ，在 $\text{Rt}\triangle FQC$

中， $FQ = a - b$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $FC = \frac{FQ}{\sin \angle C} = \sqrt{2}(a - b)$ ， $CQ = FQ \cdot \cot \angle C = a - b$ ，同理， $DF = \sqrt{2}b$ ，

$EQ = BC - BE - CQ = 2a - 2b - (a - b) = a - b$ ， $2b = \sqrt{2}(a - b)$ ，所以 $\frac{b}{a-b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，由此即可求解。

【小问 1 详解】

解：过点 A 、 D 分别作 $AG \perp BC$ ， $DH \perp BC$ ，垂足为点 G 、 H ，过点 F 作 $FP \perp AD$ ，交 AD 的延长线于点 P ，



$\therefore AG \parallel DH$ ， $AG = DH$ ， $\angle AGB = \angle P = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AGHD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $AGHD$ 是矩形，

$\therefore AD = GH$ ， $\angle GAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore AB = AF$ ，

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle APF$ (AAS)，

$\therefore BG = FP$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle PDF = \angle C = 45^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DPF$ 中, $DF = 2$,

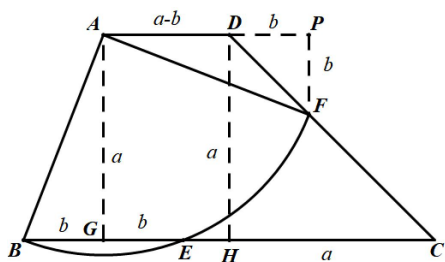
$$\therefore FP = DF \cdot \sin \angle PDF = \sqrt{2},$$

同理, $DH = 3\sqrt{2}$,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABG \text{ 中, } AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}.$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 设 $AG = DH = AP = a$, $BG = FP = b$, 则 $AD = GH = a - b$, $BH = a$,



在 $\text{Rt}\triangle DHC$ 中, $DH = a$, $\angle C = 45^\circ$,

$$\therefore CH = DH \cdot \tan \angle C = a,$$

$$\therefore BC = BH + CH = 2a,$$

$\therefore$ 点 A 为圆心, $AG \perp BC$,

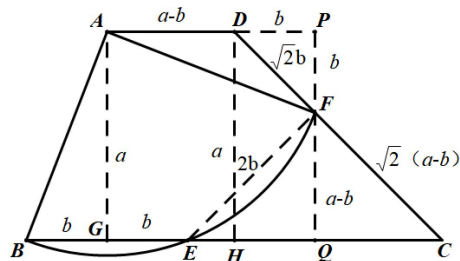
$$\therefore BE = 2BG = 2b,$$

$$\therefore CE = BC - BE = 2a - 2b,$$

$$\therefore \frac{AD}{EC} = \frac{a-b}{2a-2b} = \frac{1}{2}.$$

【小问 3 详解】

解: 连接 EF , 延长 PF 交 BC 于点 Q ,



$$\therefore AD \parallel BC, FP \perp AD,$$

$$\therefore FQ \perp BC,$$

$\therefore E$ 是弧 $\widehat{BF}$ 的中点,

$$\therefore BE = EF,$$

由 (2) 可设 $FQ = a - b$, $BE = EF = 2b$,

在 $\text{Rt}\triangle FQC$ 中, $FQ = a - b$, $\angle C = 45^\circ$,

$$\therefore FC = \frac{FQ}{\sin \angle C} = \sqrt{2}(a - b), \quad CQ = FQ \cdot \cot \angle C = a - b,$$

同理, $DF = \sqrt{2}b$,

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{b}{a - b},$$

$$\therefore EQ = BC - BE - CQ = 2a - 2b - (a - b) = a - b,$$

$$\therefore EQ = CQ,$$

$$\therefore FQ \perp BC,$$

$$\therefore EF = FC,$$

$$\therefore 2b = \sqrt{2}(a - b),$$

$$\therefore \frac{b}{a - b} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 解直角三角形的计算, 圆的基础知识, 掌握以上知识的综合, 数形结合分析是关键.