

# 2024 学年第二学期九年级数学

(考试时间: 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷共 25 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上答题, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸规定的位置上写出证明或计算的主要步骤.

## 一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 下列各数化成小数后, 结果为有限小数的是 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查实数, 根据有限小数的定义逐项进行判断即可. 熟练掌握实数的分类方法是解题的关键.

【详解】解: A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  是无理数, 是无限不循环小数, 故此选项不符合题意;

B.  $\frac{1}{2} = 0.5$ , 是有限小数, 故此选项符合题意;

C.  $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ , 是无限循环小数, 故此选不符合题意;

D.  $\frac{\pi}{2}$  是无理数, 是无限不循环小数, 故此选项不符合题意.

故选: B.

2. 如果  $a < b$ , 那么下列不等式中一定正确的是 ( )

- A.  $a - 2b < -b$                       B.  $a^2 < ab$                       C.  $ab < b^2$                       D.  $a^2 < b^2$

【答案】A

【解析】

【分析】利用不等式的基本性质: ①不等式的两边同时加上 (或减去) 同一个数或同一个含有字母的式子, 不等号的方向不变; ②不等式的两边同时乘以 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向不变; ③不等式的两边同时乘以 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向改变进行分析即可.

此题主要考查了不等式的基本性质, 关键是要注意不等式的两边同时乘以 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向改变.

【详解】解：A、 $a < b$  两边同时减  $2b$ ，不等号的方向不变可得  $a - 2b < -b$ ，故此选项正确，符合题意；  
 B、 $a < b$  两边同时乘以  $a$ ，应说明  $a > 0$  才得  $a^2 < ab$ ，故此选项错误，不符合题意；  
 C、 $a < b$  两边同时乘以  $b$ ，应说明  $b > 0$  才得  $ab < b^2$ ，故此选项错误，不符合题意；  
 D、当  $0 < a < b$  时可得  $a^2 < b^2$ ，故此选项错误，不符合题意。

故选：A.

3. 下列与  $\sqrt{2a}$  是同类二次根式的是 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{2a^2}$                       C.  $\sqrt{2a^3}$                       D.  $\sqrt{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式的定义，先化简再根据二次根式的定义判断是解题关键。先化简，再根据同类二次根式的定义解答即可。

- 【详解】A.  $\sqrt{2a}$  与  $\sqrt{2}$  不是同类二次根式；  
 B.  $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$  与  $\sqrt{2a}$  不是同类二次根式；  
 C.  $\sqrt{2a^3} = a\sqrt{2a}$  与  $\sqrt{2a}$  是同类二次根式；  
 D.  $\sqrt{2a}$  与  $\sqrt{a}$  不是同类二次根式；

故选 C

4. 在一次射击比赛选拔赛中，甲、乙、丙、丁四人的射击成绩如表所示，那么在这次比赛中，成绩又好且又稳定的选手是 ( )

|          | 甲   | 乙   | 丙   | 丁   |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| 平均成绩 (环) | 9   | 9   | 8.5 | 8.5 |
| 标准差 (环)  | 1.2 | 1.5 | 1.2 | 1.5 |

- A. 甲                      B. 乙                      C. 丙                      D. 丁

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了标准差以及算术平均数，标准差是用来衡量一组数据波动大小的量，标准差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之标准差越小，表明这组数据分布比较集中，

各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定．根据平均数和标准差的意义判断即可．

【详解】解：根据平均成绩可得甲和乙要比丙和丁好，又因为甲的标准差比乙小，  
所以成绩又好且又稳定的选手是甲．

故选：A．

5. 圆  $O$  半径长为 2，对于圆  $O$  的内接正六边形  $ABCDEF$ ，下列说法错误的是（ ）

A. 中心角是  $60^\circ$

B. 内角是  $120^\circ$

C. 边心距为  $\sqrt{3}$

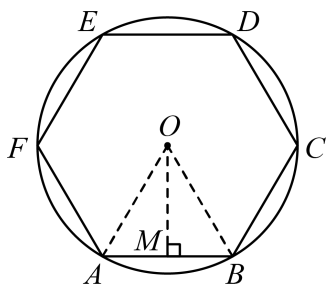
D. 边长为 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据正六边形的性质，计算它的中心角、内角、边心距以及边长即可．

【详解】解：如图，正六边形  $ABCDEF$  内接于  $\odot O$ ，连接  $OA$ ， $OB$ ，过点  $O$  作  $OM \perp AB$  于点  $M$ ，



$$\therefore OA = OB = 2, \quad \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

即中心角是  $60^\circ$ ，故选项 A 不符合题意；

$\because$  正六边形  $ABCDEF$  内接于  $\odot O$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ,$$

即正六边形的内角为  $120^\circ$ ，故选项 B 不符合题意；

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ, \quad OA = OB = 2,$$

$\therefore \triangle AOB$  是等边三角形，

$$\therefore AB = OA = OB = 2,$$

即正六边形的边长为 2，故选项 D 符合题意；

$$\therefore OM \perp AB,$$

$$\therefore AM = BM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

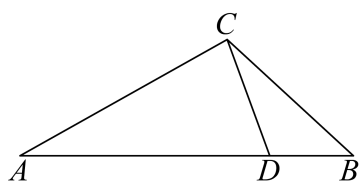
$$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

即正六边形的边心距为  $\sqrt{3}$ ，故选项 C 不符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查正多边形和圆，考查了正六边形的性质，等边三角形的判定与性质，等腰三角形三线合一性质，勾股定理等知识点. 掌握正六边形的性质是解题的关键.

6. 从三角形（非等腰三角形）一个顶点引出一条射线与对边相交，该顶点与该交点间的线段把这个三角形分割成两个小三角形. 如果其中一个小三角形是等腰三角形，另一个与原三角形相似，那么我们把这条线段叫做这个三角形的完美分割线. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $DB = 2$ ， $BC = 4$ ， $CD$  是  $\triangle ABC$  的完美分割线，且  $\triangle ACD$  是以  $CD$  为底边的等腰三角形，那么  $CD$  的长为（ ）



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的性质与判定和等腰三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

根据题意可得  $\triangle DBC \sim \triangle CBA$ ，先求出  $AB = 8$ ，再根据  $\frac{DB}{CB} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}$  即可求解.

【详解】解：由题意得， $\triangle DBC \sim \triangle CBA$ ，

$$\therefore \frac{DB}{CB} = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = 8,$$

$$\therefore AD = AC = 8 - 2 = 6,$$

$$\therefore \frac{DB}{CB} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CD = 3,$$

故选: C.

## 二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）

7. 计算:  $(a+2b)(a-2b) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $a^2 - 4b^2$

【解析】

【分析】找出相同项和相反项，再用平方差公式计算即可.

【详解】解：  $(a+2b)(a-2b)$

$$=a^2-4b^2.$$

故答案为  $a^2-4b^2$ .

【点睛】题目主要考查平方差公式，熟练掌握平方差公式进行计算是解题关键.

8. 方程  $\sqrt{x-7}=3$  的解是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x=16$

【解析】

【分析】本题考查了无理方程：解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等. 用乘方法（即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号）来解无理方程，往往会产生增根，应注意验根. 把方程两边平方，再解整式方程，然后进行检验确定原方程的解.

【详解】解：方程两边平方，得  $x-7=9$ ,

解得  $x=16$ ,

经检验，  $x=16$  为原方程的解，

故方程  $\sqrt{x-7}=3$  的解是  $x=16$ ,

故答案为：  $x=16$ .

9. 如果一元二次方程  $x^2+6x-m=0$  有两个不相等的实数根，那么  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $m>-9$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式，根据方程的系数，结合根的判别式  $\Delta=b^2-4ac>0$ ，可得出  $6^2-4\times 1\times(-m)>0$ ，解之即可得出  $m$  的取值范围. 解题的关键是掌握：式子  $\Delta=b^2-4ac$  是一元二次方程  $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$  根的判别式，  $\Delta>0\iff$  方程有两个不等的实数根；  $\Delta=0\iff$  方程有两个相等的实数根；  $\Delta<0\iff$  方程无实数根.

【详解】解： $\because$ 一元二次方程  $x^2+6x-m=0$  有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta=6^2-4\times 1\times(-m)>0,$$

解得：  $m>-9$ ,

$\therefore m$  的取值范围是  $m>-9$ .

故答案为：  $m>-9$ .

10. 已知正比例函数  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ) 的图象经过点  $(2, -4)$ , 那么函数值  $y$  随自变量  $x$  的值的增大而\_\_\_\_\_. (填“增大”或“减小”)

【答案】减小

【解析】

【分析】运用待定系数法求出  $k$  后即可判断函数的增减性.

【详解】解: 首先把  $x = 2$ ,  $y = -4$  代入  $y = kx$ ,

得  $2k = -4$ ,

$\therefore k = -2 < 0$ ,

再根据正比例函数图象的性质, 得  $y$  随  $x$  的增大而减小.

故答案为: 减小.

【点睛】本题考查一次函数图象上点的坐标特征, 解题关键是首先能够熟练求得  $k$  的值. 其次要熟悉正比例函数图象的性质.

11. 纳米光刻机是半导体产业的皇冠明珠, 由我国自主研造的纳米光刻机打破了西方的垄断. 已知1纳米等于0.000000001米, 数字0.000000001用科学记数法可以表示为\_\_\_\_\_.

【答案】 $1 \times 10^{-9}$

【解析】

【分析】本题考查科学记数法, 解题的关键是掌握科学记数法的定义: 将一个数表示成  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数. 确定  $n$  的值时, 要看把原数变成  $a$  时, 小数点移动了多少位,  $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值大于或等于10时,  $n$  是正整数; 当原数的绝对值小于1时,  $n$  是负整数. 据此解答即可.

【详解】解: 数字0.000000001用科学记数法可以表示为  $1 \times 10^{-9}$ .

故答案为:  $1 \times 10^{-9}$ .

12. 某商品成本价100元, 商家以120元价格售出, 那么这件商品的盈利率为\_\_\_\_\_. (用百分数表示)

【答案】20%

【解析】

【分析】本题考查一元一次方程的应用, 设这件商品的盈利率为  $x$ , 根据“售价 = 成本 + 成本  $\times$  盈利率”, 再根据“商品成本价100元, 商家以120元价格售出”列出关于  $x$  的一元一次方程, 求解即可. 正确理解题意, 根据数量关系列出方程是解题的关键.

【详解】解：设这件商品的盈利率为 $x$ ，

依题意，得： $100+100x=120$ ，

解得： $x=0.2=20\%$ ，

$\therefore$  这件商品的盈利率为 $20\%$ 。

故答案为： $20\%$ 。

13. 布袋中有6个红球和若干个白球，这些球除颜色外都相同，如果从布袋中随机摸出球，摸出的是白球的概率是 $\frac{2}{5}$ ，那么布袋中白球的个数是\_\_\_\_\_。

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了概率的概念：所有等可能的结果有 $n$ 个，其中某事件占 $m$ 个，则这个事件的概率

$P=\frac{m}{n}$ 。根据概率的概念建立等量关系 $\frac{n}{6+n}=\frac{2}{5}$ ，解方程即可。

【详解】解：设布袋中有 $n$ 个白球，

根据题意，得 $\frac{n}{6+n}=\frac{2}{5}$ ，

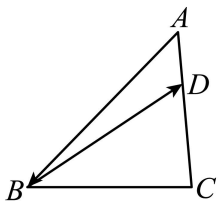
解得： $n=4$ ，

则布袋中白球有4个；

故答案为：4。

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 $D$ 是线段 $AC$ 上的点，且 $CD=2DA$ ，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ ，那么

$\overrightarrow{BC}$  = \_\_\_\_\_。（用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示）



【答案】 $2\vec{a}+3\vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查了平面向量，三角形法则，解题的关键是掌握三角形法则。

利用三角形法则求解即可。

【详解】解：由题意得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{b}$ ，

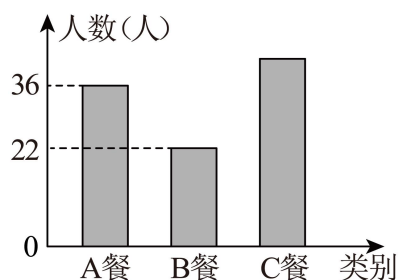
$\because CD=2DA$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = 2(\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 3\vec{b},$$

故答案为:  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

15. 某校为满足学生午餐的多样性, 将学生午餐分成了  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三类供学生自主选择. 在前期的调研中, 从全校 1500 人中随机抽取了 100 人进行问卷调查, 并将问卷的结果整理后绘制成图. 根据该数据, 估计全校约有\_\_\_\_\_人会选择  $C$  类午餐.



【答案】 630

【解析】

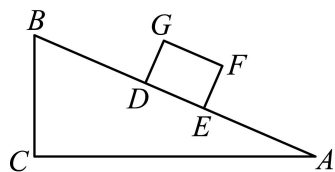
【分析】 本题考查样本估计总体, 先根据统计图求得选择  $C$  午餐的人数, 再用全校人数乘以样本中选择  $C$  午餐所占的比例求解即可.

【详解】 解: 由统计图, 样本中, 选择  $C$  类午餐的人数为  $100 - 22 - 36 = 42$  (人),

$\therefore$  估计全校选择  $C$  类午餐的人数约为  $1500 \times \frac{42}{100} = 630$  (人).

故答案为: 630.

16. 如图, 一个矩形木箱  $DEFG$  沿坡比为  $1:2.4$  的斜面  $AB$  下滑,  $EF = 1.2$  米, 当木箱滑至如图位置时,  $AE = 3.1$  米, 那么木箱端点  $F$  离地面  $AC$  的高度是\_\_\_\_\_米.

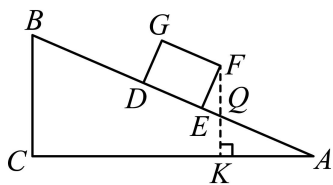


【答案】 2.3

【解析】

【分析】 本题考查的是坡度的含义, 解直角三角形的应用, 过  $F$  作  $FK \perp AC$  于  $K$ , 交  $AB$  于点  $Q$ , 证明  $\triangle EFQ \sim \triangle BAC$ , 结合坡度的含义求解  $EQ = 0.5$ ,  $FQ = \sqrt{FE^2 + EQ^2} = 1.3$ , 再求解  $QK = 1$ , 从而可得答案.

【详解】 解: 过  $F$  作  $FK \perp AC$  于  $K$ , 交  $AB$  于点  $Q$ ,



∵ 斜坡的坡比为 1:2.4,

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \angle FEQ = \angle QKA = 90^\circ, \angle EQF = \angle AQK,$$

$$\therefore \angle EFQ = \angle BAC,$$

$$\text{在 Rt} \triangle FEQ \text{ 中, } \tan \angle EFQ = \frac{EQ}{FE} = \frac{EQ}{1.2} = \tan \angle BAC = \frac{5}{12},$$

$$\therefore EQ = 0.5, FQ = \sqrt{FE^2 + EQ^2} = 1.3,$$

$$\therefore AE = 3.1,$$

$$\therefore AQ = 3.1 - 0.5 = 2.6,$$

$$\text{在 Rt} \triangle AQK \text{ 中, } \tan \angle QAK = \frac{5}{12} = \frac{QK}{AK},$$

设  $QK = 5m$ , 则  $AK = 12m$ ,

$$\therefore AQ = \sqrt{QK^2 + AK^2} = 13m = 2.6,$$

解得:  $m = 0.2$ ,

$$\therefore QK = 5m = 1,$$

$$\therefore FK = FQ + QK = 2.3 \text{ 米},$$

∴ 木箱端点  $F$  离地面的距离是 2.3 米;

故答案为: 2.3.

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = 14$ ,  $\tan B = \frac{2}{3}$ ,  $\tan C = \frac{1}{2}$ , 将  $\triangle ABC$  翻折, 点  $C$  恰好落在线段  $AB$  的中点  $D$  处, 折痕分别交  $AC$ 、 $BC$  于  $M$ 、 $N$ , 此时  $CN =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{125}{22}$

【解析】

【分析】 根据  $\tan B = \frac{2}{3}$ ,  $\tan C = \frac{1}{2}$ , 求得  $BF = 6$ , 再证出  $\triangle DBE \sim \triangle ABF$  得到  $DE = 2$ ,

$EC = BC - BE = 14 - 3 = 11$ , 然后借助勾股定理即可求解.

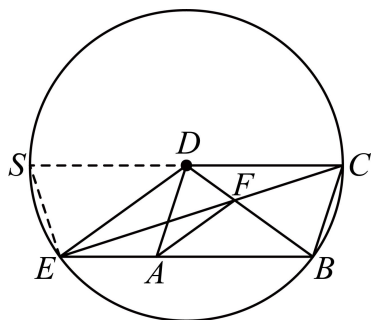
【详解】 解: 过点  $A$  作  $AF \perp BC$  交于点  $F$ , 过点  $D$  作  $DE \perp BC$  交于点  $E$ , 连接  $DN$ ,



得  $S, E, B, C$  四点在同一个圆上, 即  $S, E, B, C$  四点在  $\odot D$  上, 证明  $\triangle BAF \sim \triangle BED$ ,  $\angle AFE = \angle BEC$ ,

设  $AE = AF = x$ , 再进一步利用相似三角形的性质建立方程求解即可.

【详解】解: 如图, 延长  $CD$  至  $S$ , 使  $CD = SD$ , 连接  $ES$ ,



$\therefore$  在  $\square ABCD$  中,  $\angle A < 90^\circ, AB = 4$ ,

$\therefore AB = CD = DS = 4, AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle EDS = \angle DEB, \angle CDB = \angle DBE, \angle EBC + \angle SCB = 180^\circ$ ,

$\therefore DE = DB$ ,

$\therefore \angle DEB = \angle DBE$ ,

$\therefore DE = DB, \angle EDS = \angle BDC$ ,

$\therefore \triangle DES \cong \triangle DBC$ ,

$\therefore \angle S = \angle DCB$ ,

$\therefore \angle S + \angle EBC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle SEB + \angle SCB = 180^\circ$ ,

$\therefore S, E, B, C$  四点在同一个圆上, 即  $S, E, B, C$  四点在  $\odot D$  上,

$\therefore DE = DC = 4 = DB = AB$ ,

$\therefore \angle DCE = \angle DEC$ ,

$\therefore AB \parallel DC$ ,

$\therefore \angle DCE = \angle BEC$ ,

$\therefore \angle DEC = \angle BEC$ ,

$\therefore AF \parallel DE$ ,

$\therefore \angle AFE = \angle DEC, \triangle BAF \sim \triangle BED$ ,

$\therefore \angle AFE = \angle BEC$ ,

$\therefore$  设  $AE = AF = x$ ,

$\therefore \triangle BAF \sim \triangle BED$ ,

$$\therefore \frac{BA}{BE} = \frac{AF}{DE},$$

$$\therefore \frac{4}{4+x} = \frac{x}{4},$$

$$\therefore x^2 + 4x - 16 = 0,$$

解得:  $x_1 = -2 + 2\sqrt{5}$ ,  $x_2 = -2 - 2\sqrt{5}$  (经检验不符合题意, 舍去),

$$\therefore AE = 2\sqrt{5} - 2.$$

故答案为:  $2\sqrt{5} - 2$

【点睛】 本题考查的是等腰三角形的判定与性质, 圆周角定理的应用, 相似三角形的判定与性质, 作出合适的辅助线是解本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 满分 78 分) 如无特殊说明, 本大题作答需写出证明或计算的主要步骤.

19. 计算:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \cos 45^\circ - |2 - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$

【答案】  $2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算, 涉及负整数指数幂、特殊角的三角形函数值、化简绝对值、分母有理化, 根据相关运算法则正确求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \cos 45^\circ - |2 - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - (2 - \sqrt{3}) + \frac{1 \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

20. 解方程组: 
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x^2 + 5xy + 4y^2 = 0 \end{cases}.$$

【答案】  $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=\frac{16}{7} \\ y=-\frac{4}{7} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解方程组，先将  $x^2 + 5xy + 4y^2 = 0$  因式分解为  $x + y = 0$ ③ 或  $x + 4y = 0$ ④，再分别联立①③，①④解二元一次方程组即可.

【详解】 解:  $\begin{cases} x-3y=4 \text{①} \\ x^2+5xy+4y^2=0 \text{②} \end{cases}$ ,

由②得  $(x+y)(x+4y)=0$ ,

$\therefore x+y=0$ ③ 或  $x+4y=0$ ④,

联立①③得  $\begin{cases} x-3y=4 \text{①} \\ x+y=0 \text{③} \end{cases}$ ,

解得  $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ,

联立①④得  $\begin{cases} x-3y=4 \text{①} \\ x+4y=0 \text{④} \end{cases}$ ,

解得  $\begin{cases} x=\frac{16}{7} \\ y=-\frac{4}{7} \end{cases}$ .

21. (1) 在  $\triangle ABC$  中, 记  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ .

①如图 1, 当  $\triangle ABC$  是等边三角形 (即  $a=b=c$ ) 时,  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_ (结果用含  $a$  的代数式表示);

②如图 2, 当  $a=2\text{cm}$ ,  $b=6\text{cm}$ ,  $\angle C=120^\circ$  时, 求  $\triangle ABC$  的面积;

(2) 三个含  $120^\circ$  的全等的三角形 ( $a < b < c$ ) 可以拼成一个大等边三角形, 内含一个小的等边三角形 (如图 3 所示), 当大等边三角形的面积是小等边三角形面积的 16 倍时, 直接写出  $a$ 、 $b$  满足的数量关系\_\_\_\_\_.

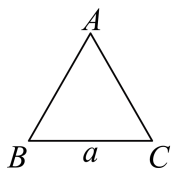


图1

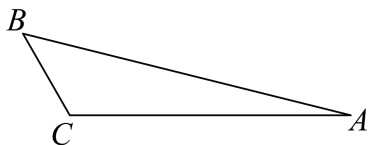


图2

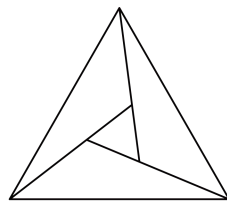


图3

【答案】(1) ①  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ; ②  $3\sqrt{3}\text{cm}^2$ ; (2)  $a = \frac{11-\sqrt{21}}{10}b$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形，等边三角形的性质，解一元二次方程；

(1) ①  $ABC$  的高  $= AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，再根据面积公式求解即可；

②如图，过点  $B$  作  $BD \perp AC$  的延长线于点  $D$ ，先求出  $BD = BC \cdot \sin \angle BCD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，再根据面积公式求解即可；

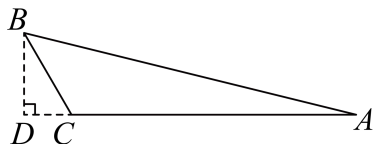
(2) 由 (1) ①可得小等边三角形的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)^2$ ，由 (1) ②可得三个含  $120^\circ$  的全等的三角形的面积为  $3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ ，得到大等边三角形的面积  $= \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ ，再根据大等边三角形的面积是小等边三角形面积的 16 倍，列方程求解即可。

【详解】解：(1) ①  $ABC$  的高  $= AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

$$ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

故答案为：  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ；

②如图，过点  $B$  作  $BD \perp AC$  的延长线于点  $D$ ，



根据题意得，  $BC = a = 2\text{cm}$ ，  $AC = b = 6\text{cm}$ ，

$\therefore \angle C = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore BD = BC \cdot \sin \angle BCD = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}ab = 3\sqrt{3}\text{cm}^2;$$

(2)  $\because$  三个含  $120^\circ$  的全等的三角形 ( $a < b < c$ ) 可以拼成一个大等边三角形, 内含一个小的等边三角形,

$\therefore$  小的等边三角形边长为  $b - a$ ,

$$\therefore \text{由 (1) ① 可得小等边三角形的面积为 } \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)^2,$$

$$\text{由 (1) ② 可得三个含 } 120^\circ \text{ 的全等的三角形的面积为 } 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab,$$

$$\therefore \text{大等边三角形的面积} = \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}ab,$$

$\therefore$  大等边三角形的面积是小等边三角形面积的 16 倍,

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}ab = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)^2,$$

$$\text{化简得, } 5a^2 - 11ab + 5b^2 = 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{10}b,$$

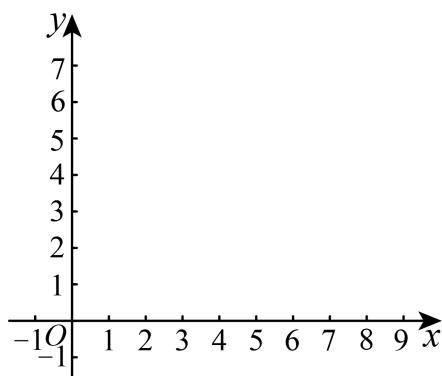
$$\therefore a < b,$$

$$\therefore a = \frac{11 - \sqrt{21}}{10}b,$$

$$\text{故答案为: } a = \frac{11 - \sqrt{21}}{10}b.$$

22. 已知: 在平面直角坐标系中 (如图), 反比例函数  $y = \frac{6}{x}$  在第一象限内的图像与直线  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) 的

交点为  $A(3, m)$ , 且直线  $y = kx + b$  与直线  $y = -\frac{1}{3}x$  平行.



(1) 求直线  $y = kx + b$  的表达式;

(2) 若以  $A$  为圆心、半径长为  $r$  的  $\odot A$  与以原点  $O$  为圆心、半径长为 1 的  $\odot O$  相切, 求  $r$  的值.

**【答案】** (1)  $y = -\frac{1}{3}x + 3$

(2)  $\sqrt{13} - 1$  或  $\sqrt{13} + 1$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了反比例函数和一次函数的交点问题, 涉及待定系数法求函数解析式和两圆相切的性质, 熟练掌握待定系数法求函数解析式和两圆相切的性质是解题的关键.

(1) 根据交点求出  $m$  的值, 再根据两直线平行求出  $k$  的值, 再代入点  $A$  坐标即可求出  $b$  的值;

(2) 根据相切的性质, 分两圆内切和外切两种情况讨论即可.

**【小问 1 详解】**

解:  $\because$  反比例函数  $y = \frac{6}{x}$  在第一象限内的图像与直线  $y = kx + b (k \neq 0)$  的交点为  $A(3, m)$ ,

$$\therefore m = \frac{6}{3} = 2,$$

$\because$  直线  $y = kx + b$  与直线  $y = -\frac{1}{3}x$  平行,

$$\therefore k = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore 2 = -\frac{1}{3} \times 3 + b,$$

解得  $b = 3$ ,

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + 3.$$

**【小问 2 详解】**

解:  $\because A(3, 2)$ ,

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$\therefore$  以  $A$  为圆心、半径长为  $r$  的  $\odot A$  与以原点  $O$  为圆心、半径长为 1 的  $\odot O$  相切,

当两圆外切时,  $r+1=\sqrt{13}$ ,

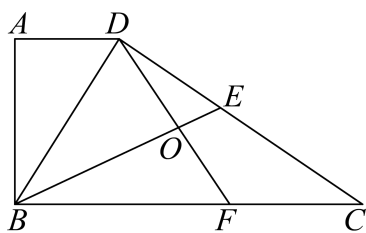
$$\therefore r=\sqrt{13}-1;$$

当两圆内切时,  $r-1=\sqrt{13}$ ,

$$\therefore r=\sqrt{13}+1;$$

$\therefore r$  的值为  $\sqrt{13}-1$  或  $\sqrt{13}+1$ .

23. 已知: 如图, 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $BD^2 = AD \cdot BC$ , 点  $E$  是腰  $CD$  上的点,  $\angle ABD = \angle DBE$ , 点  $F$  是线段  $BC$  上的点, 联结  $DF$  交  $BE$  于点  $O$ .



(1) 求证:  $\angle ABD = \angle C$ ;

(2) 当  $DB = DF$  时, 求证:  $\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{BD}$ .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定与性质、平行线的性质、等腰三角形的性质等知识, 熟练运用相似三角形的性质是解答的关键.

(1) 证明  $\triangle ABD \sim \triangle DCB$ , 利用相似三角形的对应角相等求解即可;

(2) 先证明  $\triangle DBE \sim \triangle DCB$  得到  $\angle DEB = \angle DBC$ , 结合等腰三角形的性质得到  $\angle BEC = \angle DFC$ , 进而

证明  $\triangle BEC \sim \triangle DFC$  得到  $\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{BC}$ , 再由  $\triangle ABD \sim \triangle DCB$  得到  $\frac{CD}{BC} = \frac{AB}{BD}$ , 进而可得结论.

【小问 1 详解】

证明:  $\because AD \parallel BC$ ,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\because BD^2 = AD \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C;$$

【小问 2 详解】

证明:  $\because \angle ABD = \angle DBE$ ,  $\angle ABD = \angle C$ ,

$$\therefore \angle DBE = \angle C,$$

$$\text{又 } \angle BDE = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle DBC,$$

$$\because DB = DF,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DFB,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle DFB,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle DFC, \text{ 又 } \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle BEC \sim \triangle DFC,$$

$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{CD}{BC},$$

$$\because \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{BC}{BD}, \text{ 即 } \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{BD},$$

$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{AB}{BD}.$$

24. 数学综合与实践课上, 如图 1 老师发给每个小组一张矩形纸片、一个内角为  $30^\circ$  的直角三角板 (说明: 仅能作:  $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$  的角)、一把无刻度的直尺 (说明: 仅能作直线) 和一块橡皮.

实践任务: 仅利用提供的工具将矩形纸片三等分, 使原纸片的宽作为等分后纸片的一边.

对核心任务进行数学抽象: 如图 2, 已知矩形  $ABCD$ , 利用含  $30^\circ$  的直角三角板和无刻度的直尺, 在  $AB$  上

确定点  $P$ , 使  $BP = \frac{1}{3} AB$ .

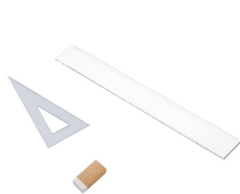


图1



图2

下表是某组同学展示完成实践任务的操作步骤:

|      |    |
|------|----|
| 操作步骤 | 图示 |
|------|----|

第一步:

如图 3 所示, 分别以点  $D$ , 点  $C$  为顶点,  $DA$ ,  $CB$  为边作  $30^\circ$  的角与  $AB$  交于点  $E$ ,  $F$ , 连接  $DF$ ,  $CE$ , 交于点  $G$ , 过点  $G$  作  $GM \perp AB$  于点  $M$ , 并延长  $MG$  交  $CD$  于点  $N$ .

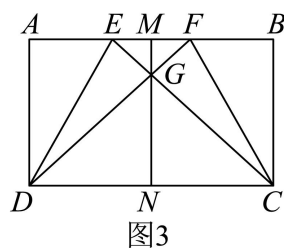


图3

第二步:

如图 4 所示, 擦除第一步中的线段  $DE$ ,  $EC$ ,  $DF$ ,  $CF$ , 点  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , 仅保留  $MN$ , 连接  $AC$ ,  $BN$  交于点  $O$ , 过点  $O$  作  $OP \perp AB$  于点  $P$ , 并延长  $PO$  交  $CD$  于点  $Q$ .

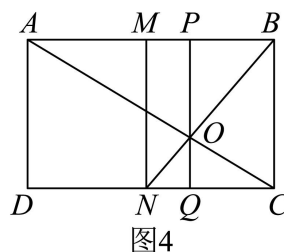


图4

(1) 在图 3 中, 证明: 点  $M$  为  $AB$  的中点;

(2) 在图 4 中, 证明:  $BP = \frac{1}{3}AB$ ;

(3) 请你再设计一种作图方案 (仅利用提供的工具), 在图 5 画出满足条件的点  $P$ , 写出作法, 并验证作图的正确性.

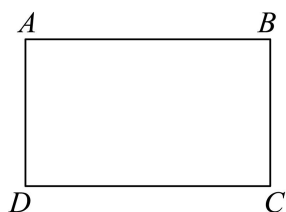


图5

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】本题属于四边形综合题, 考查了矩形的性质, 平行线分线段成比例定理, 全等和相似三角形的判定和性质等知识.

(1) 利用全等三角形的性质分别证明  $AE = BF$ ,  $EM = MF$ , 可得结论;

(2) 利用相似三角形的性质证明即可;

(3) 根据等腰三角形的性质作出图形即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图 3 中,  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

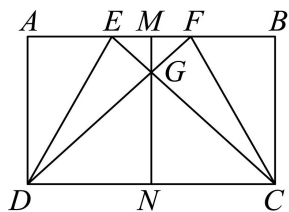


图3

$$\therefore AD = CB, \quad \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle FCB = 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CBF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\therefore AF = BE,$$

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \triangle DAF \cong \triangle CBE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AFD = \angle CEB,$$

$$\therefore GE = GF,$$

$$\therefore GM \perp AB,$$

$$\therefore EM = MF,$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\therefore MA = MB,$$

$\therefore$  点  $M$  是  $AB$  的中点;

**【小问 2 详解】**

证明：如图 4 中，

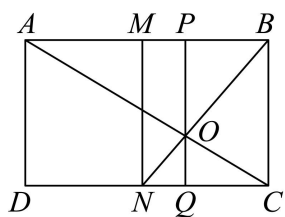


图4

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore \angle DCB = \angle ABC = 90^\circ, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore MN \perp AB,$$

$$\therefore AD \parallel MN \parallel BC,$$

$$\therefore AM = MB,$$

$$\therefore DN = CN,$$

$$\because CN \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle CNO, \triangle AOP \sim \triangle COQ,$$

$$\therefore \frac{AB}{CN} = \frac{AO}{OC} = 2, \quad \frac{AP}{CQ} = \frac{AO}{CO} = 2,$$

$$\therefore AP = 2CQ,$$

$$\because OP \perp AB,$$

$$\therefore \angle QPB = \angle PBC = \angle BCQ = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $PQCB$  是矩形,

$$\therefore PB = CQ,$$

$$\therefore BP = \frac{1}{3} AB;$$

【小问 3 详解】

解: 如图 5, 点  $P$  即为所求.

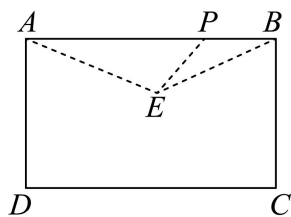


图5

作法: ①分别以点  $A$ , 点  $B$  为顶点,  $AB$  为底边作  $30^\circ$  角的等腰  $\triangle ABE$ ;

②利用  $90^\circ$  角, 过点  $E$  作  $EP \perp AE$  于点  $E$ , 交  $AB$  于点  $P$ ;

则点  $P$  即为所求;

理由:  $\because \angle EAB = \angle EBA = 30^\circ,$

$$\therefore \angle AEB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEP = 30^\circ = \angle ABE,$$

$$\therefore EP = PB,$$

Rt  $\triangle AEP$  中,  $AP = 2EP,$

$$\therefore AP = 2PB,$$

$$\therefore BP = \frac{1}{3} AB.$$

25. 已知抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴交于点  $C$ , 顶点为点  $D$ .

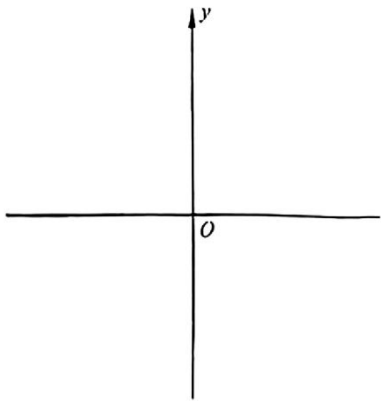
(1) 当点 A 在  $x$  轴负半轴, 且  $\tan \angle ACO = 2$  时,

①求抛物线  $C_1$  的表达式;

②将抛物线向上或向下平移得到抛物线  $C_2$ , 抛物线  $C_2$  与  $y$  轴的负半轴交于点  $E$ , 顶点  $D'$  的纵坐标为  $n$ ,

如果线段  $AE$  与线段  $BD'$  有交点, 求  $n$  的取值范围;

(2) 当抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$  的系数  $b$  变化时, 表述顶点  $D$  的运动轨迹, 并画出图像.



【答案】(1) ①  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$ ; ②  $n \leq -\frac{15}{8}$

(2) 顶点  $D$  的运动轨迹: 开口向下的抛物线, 顶点为  $(0, -2)$ , 对称轴为  $y$  轴, 图像见解析

【解析】

【分析】(1) ①确定  $C(0, -2)$ , 得  $OC = 2$ , 根据正切的定义得  $\frac{AO}{2} = 2$ , 确定  $A(-4, 0)$ , 代入

$C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$  求出  $b$  的值即可;

②确定  $B(1, 0)$ , 抛物线  $C_2$  的表达式为:  $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + n$ ,  $D'\left(-\frac{3}{2}, n\right)$ , 得  $E\left(0, n + \frac{9}{8}\right)$ , 求出  $BD$  的

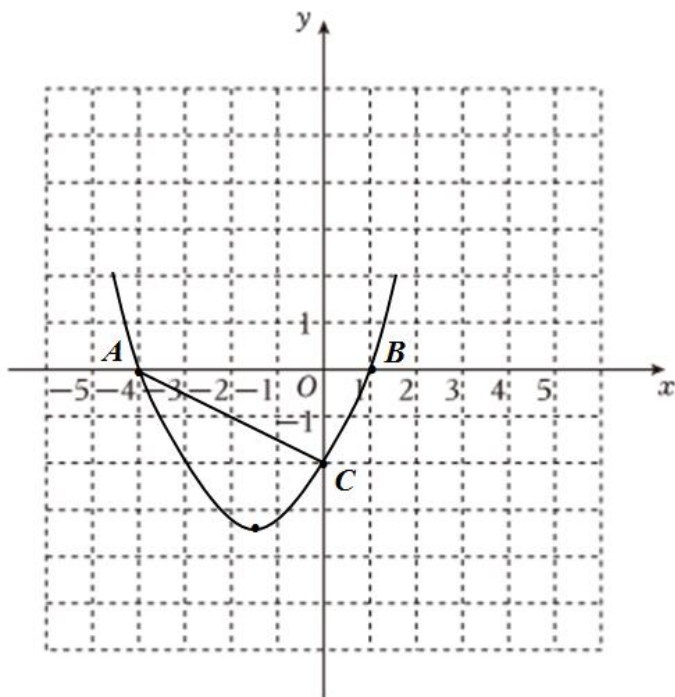
解析式为  $y = -\frac{2n}{5}x + \frac{2n}{5}$ , 得线段  $BD$  与  $y$  交点的纵坐标为  $\frac{2n}{5}$ , 根据“线段  $AE$  与线段  $BD'$  有交点”得

$n + \frac{9}{8} \leq \frac{2n}{5}$ , 求解即可;

(2) 确定  $D\left(-b, -\frac{1}{2}b^2 - 2\right)$ , 得  $\begin{cases} x = -b \\ y = -\frac{1}{2}b^2 - 2 \end{cases}$ , 继而得到  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$ , 即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: ①如图,



$\therefore$  抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，

当  $x = 0$  时，得：  $y = -2$ ，

$$\therefore C(0, -2),$$

$$\therefore OC = 2,$$

$\therefore$  点  $A$  在  $x$  轴负半轴，且  $\tan \angle ACO = 2$ ， $\angle AOC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \tan \angle ACO = 2, \text{ 即 } \frac{AO}{2} = 2,$$

$$\therefore AO = 4,$$

$$\therefore A(-4, 0),$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{2} \times (-4)^2 + b \times (-4) - 2,$$

$$\text{解得: } b = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2;$$

②  $\therefore$  抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时，得: } \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } x = -4 \text{ 或 } x = 1,$$

$$\therefore B(1, 0),$$

∵ 将抛物线向上或向下平移得到抛物线  $C_2$ ，抛物线  $C_2$  与  $y$  轴的负半轴交于点  $E$ ，顶点  $D'$  的纵坐标为  $n$ ，

$$C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{8},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2 \text{ 的表达式为: } y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + n, \quad D'\left(-\frac{3}{2}, n\right),$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 得: } y = n + \frac{9}{8},$$

$$\therefore E\left(0, n + \frac{9}{8}\right),$$

$$\text{设 } BD \text{ 的解析式为 } y = k_1x + b_1, \text{ 过点 } B(1,0), \quad D'\left(-\frac{3}{2}, n\right),$$

$$\therefore \begin{cases} k_1 + b_1 = 0 \\ -\frac{3}{2}k_1 + b_1 = n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -\frac{2}{5}n \\ b_1 = \frac{2}{5}n \end{cases},$$

$$\therefore BD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{2n}{5}x + \frac{2n}{5},$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 得: } y = \frac{2n}{5},$$

$$\text{即线段 } BD \text{ 与 } y \text{ 交点的纵坐标为 } \frac{2n}{5},$$

$$\therefore \text{线段 } AE \text{ 与线段 } BD' \text{ 有交点, } E\left(0, n + \frac{9}{8}\right),$$

$$\therefore n + \frac{9}{8} \leq \frac{2n}{5},$$

$$\text{解得: } n \leq -\frac{15}{8},$$

$$\therefore n \text{ 的取值范围为 } n \leq -\frac{15}{8};$$

【小问 2 详解】

$$\therefore \text{抛物线 } C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2 = \frac{1}{2}(x+b)^2 - \frac{1}{2}b^2 - 2, \text{ 顶点为点 } D.$$

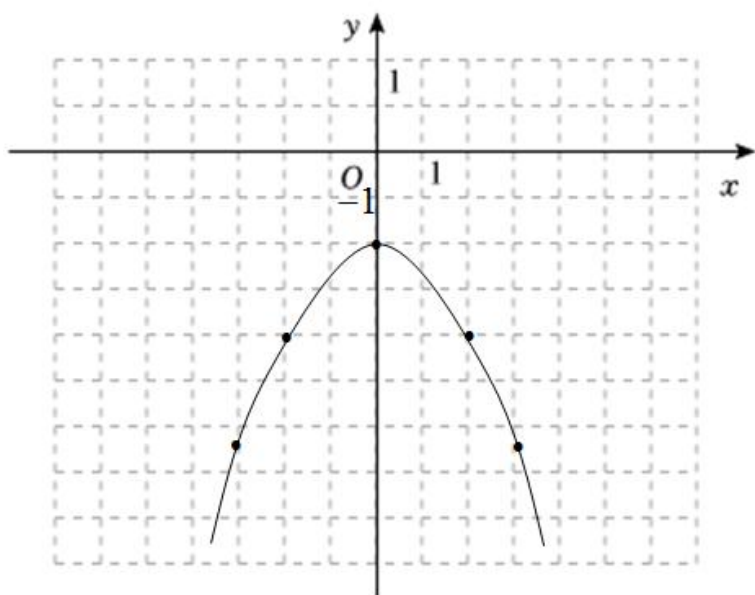
$$\therefore D\left(-b, -\frac{1}{2}b^2 - 2\right),$$

$$\therefore \begin{cases} x = -b \\ y = -\frac{1}{2}b^2 - 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - 2,$$

$\therefore$  当抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$  的系数  $b$  变化时，顶点  $D$  的运动轨迹为：开口向下的抛物线，顶点为

$(0, -2)$ ，对称轴为  $y$  轴，图像如下图所示.



**【点睛】** 本题是二次函数的综合题，考查了抛物线与坐标轴的交点坐标，正切的定义，待定系数法确定函数的解析式，函数图象平移的规律，不等式的应用，画函数图象等知识点．掌握二次函数的图像与性质及锐角三角函数的定义是解题的关键．