

静安区 2025 学年第一学期期末课程实施调研

九年级数学试卷

(满分 150 分, 用卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上. 】

1. 下列各选项中的两个图形一定相似的是 ()

- | | |
|------------|-----------|
| A. 两个直角三角形 | B. 两个矩形 |
| C. 两个等腰梯形 | D. 两个正五边形 |

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了相似图形, 根据相似图形的定义逐项判断即可求解, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】 解: A、两个直角三角形不一定相似, 该选项不符合题意;

B、两个矩形不一定相似, 该选项不符合题意;

C、两个等腰梯形不一定相似, 该选项不符合题意;

D、两个正五边形所有内角均为 108° , 对应角相等; 所有边成比例, 故一定相似, 该选项符合题意;

故选: D.

2. 如果将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 向下平移若干个单位, 那么下列结论中错误的是 ()

- | | |
|-----------|------------------|
| A. 顶点坐标不变 | B. 开口方向不变 |
| C. 对称轴不变 | D. 与 y 轴交点个数不变 |

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的平移, 根据二次函数图象的平移规律解答即可求解, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】解：设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点式为 $y = a(x-h)^2 + k$ ，向下平移 m ($m > 0$) 个单位，则平移前抛物线的顶点坐标为 (h, k) ，平移后抛物线的解析式为 $y = a(x-h)^2 + k - m$ ，

$\therefore$ 平移后抛物线的顶点坐标为 $(h, k-m)$ ，

$\therefore$ 顶点坐标发生变化，故选项 A 错误；

$\therefore a$ 的值不变，

$\therefore$ 抛物线开口方向不变，故选项 B 正确；

$\therefore$ 平移后抛物线的顶点坐标为 $(h, k-m)$ ，

$\therefore$ 平移后抛物线的对称轴为直线 $x = h$ ，与平移前的相同，故选项 C 正确；

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时，对应的 y 值只有 1 个，

$\therefore$ 平移前后抛物线与 y 轴的交点个数都是 1，故选项 D 正确；

综上，结论中错误的是 A，

故选：A。

3. 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，那么下列条件中能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 相似的是 ()

A. $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$

B. $\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{BC}$

C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

D. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{BC}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形相似的判定，掌握各判定定理的内容是关键；选项 C 中 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ 可转化为 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，且 $\angle A$ 为公共角，满足三角形相似的判定条件，因此 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ；其他选项均因对应边或夹角不匹配而不能判定相似。

【详解】解： $\because$ 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，

$\therefore \angle DAE = \angle BAC$ (公共角)。

对于选项 C： $\because \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ ，即 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，且 $\angle DAE = \angle BAC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

对于选项 A： $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$ ，但 DE 与 BC 的对应关系不明确，且夹角不一定是公共角，故不能判定相似。

对于选项 B： $\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{BC}$ ，类似地，对应边和夹角不匹配，不能判定相似。

对于选项 D: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{BC}$, 但 AD 、 AE 的夹角为 $\angle A$, AB 、 BC 的夹角为 $\angle B$, 夹角不相等, 故不能判定相似.

因此, 能判定相似的是 C.

故选: C.

4. 已知一个三角形三边之比为 $3:4:5$, 与它相似的另一个三角形最短边的长为 6 cm , 那么另一个三角形的周长为 ()

- A. 12 cm B. 24 cm C. 36 cm D. 48 cm

【答案】 B

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的性质, 根据相似三角形的对应边成比例, 可得新三角形三边比也为 $3:4:5$, 进而根据新三角形最短边为 6 cm 新三角形的其他两边长, 再相加即可求解, 掌握相似三角形的性质是解题的关键.

【详解】解: $\because$ 相似三角形对应边成比例, 且原三角形三边比为 $3:4:5$,
 $\therefore$ 新三角形三边比也为 $3:4:5$, 设新三角形三边分别为 $3k\text{ cm}$ 、 $4k\text{ cm}$ 、 $5k\text{ cm}$,
 $\because$ 新三角形的最短边 $3k = 6$,
 $\therefore k = 2$,
 $\therefore$ 新三角形的另两边长分别为 8 cm 、 10 cm ,
 $\therefore$ 新三角形的周长为 $6 + 8 + 10 = 24\text{ cm}$,
故选: B.

5. 已知点 $A(-1, y_1)$, $B(4, y_2)$, $C(6, y_3)$ 在抛物线 $y = -3x^2 + 12x - m$ (其中, m 为常数) 上, 那么 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_3 < y_1 < y_2$ C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】 B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数函数值大小的比较; 通过计算抛物线在各点的函数值, 比较大小关系.

【详解】解: $\because$ 点 $A(-1, y_1)$, $B(4, y_2)$, $C(6, y_3)$ 在抛物线 $y = -3x^2 + 12x - m$ 上,
 $\therefore y_1 = -3 \times (-1)^2 + 12 \times (-1) - m = -15 - m$,

$$y_2 = -3 \times 4^2 + 12 \times 4 - m = -m,$$

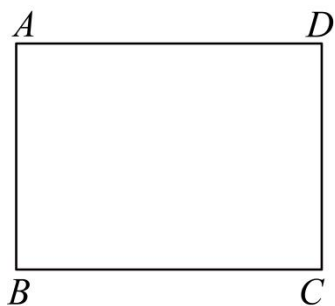
$$y_3 = -3 \times 6^2 + 12 \times 6 - m = -36 - m,$$

$\because m$ 为常数,

$$\therefore y_3 < y_1 < y_2.$$

故选: B.

6. 如图, 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6, BC = 8$, 如果分别以 A, C 为圆心的两圆相切, 且点 D 在 $\odot C$ 内, 点 B 在 $\odot C$ 外, $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是 ()



A. $6 < r < 8$ 或 $10 < r < 18$

B. $2 < r < 4$ 或 $10 < r < 18$

C. $2 < r < 4$ 或 $16 < r < 18$

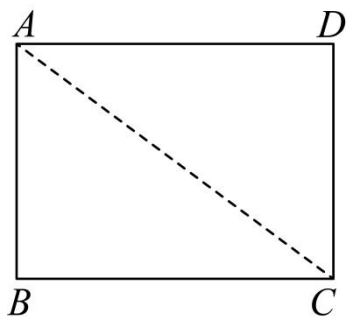
D. $6 < r < 8$ 或 $16 < r < 18$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了点和圆的位置关系, 两圆的位置关系, 勾股定理, 矩形的性质等知识, 熟练掌握两圆的位置关系是解题的关键. 首先求出 $\odot C$ 的半径 R 的取值范围为 $6 < R < 8$, 再根据两圆的圆心距是 10, 分内切和外切两种情况进一步即可求出答案.

【详解】解: 连接 AC ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB = 6, BC = 8$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

∴点 D 在 $\odot C$ 内, 点 B 在 $\odot C$ 外,

∴ $\odot C$ 的半径 R 的取值范围为 $6 < R < 8$,

当分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切时, 圆心距等于两圆半径之和, 是 10, 即 $R + r = 10$,

∴ $6 < 10 - r < 8$,

解得 $2 < r < 4$,

当分别以 A 、 C 为圆心的两圆内切时, 圆心距等于两圆半径之差, 是 10, 即 $r - R = 10$,

∴ $6 < r - 10 < 8$,

∴ $16 < r < 18$,

综上所述, $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是 $2 < r < 4$ 或 $16 < r < 18$,

故选: C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知, 则 $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{3}$

【解析】

【分析】直接用同一未知数表示出 x 、 y 的值, 进而得出答案.

【详解】解: ∵ $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$,

∴ 设 $x = 4a$, $y = 3a$,

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{4a+3a}{3a} = \frac{7}{3}.$$

故答案为: $\frac{7}{3}$

【点睛】此题主要考查了比例式的性质, 正确用同一未知数表示各数是解题关键.

8. 二次函数 $y = (x-2)^2 + 2$ 的图象与 y 轴交点坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(0, 6)$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与 y 轴的交点坐标, 把 $x = 0$ 代入函数解析式求出 y 的值即可求解, 正确计算是解题的关键.

【详解】解: 当 $x = 0$ 时, $y = (0-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$,

∴ 二次函数 $y = (x-2)^2 + 2$ 的图象与 y 轴交点坐标是 $(0,6)$,

故答案为: $(0,6)$.

9. 已知一个二次函数的图像最低点坐标为 $(0,1)$, 那么该二次函数的解析式可以是_____. (写出一个即可)

【答案】 $y = x^2 + 1$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的性质, 求二次函数的解析式; 根据二次函数顶点坐标公式, 结合最低点条件, 确定解析式形式, 进而即可得到答案.

【详解】 解: 由二次函数图像最低点坐标为 $(0,1)$, 可知顶点为 $(0,1)$, 且抛物线开口向上, 即 $a > 0$.

设二次函数解析式为 $y = a(x-h)^2 + k$, 其中 (h,k) 为顶点坐标,

代入 $h=0$, $k=1$, 得 $y = ax^2 + 1$.

取 $a=1$, 得 $y = x^2 + 1$.

故答案为 $y = x^2 + 1$.

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分对应值如下表:

x	...	-3	-2	0	1	3	5	...
y	...	7	1	-8	-9	-5	7	...

当 $x=2$ 时, 对应的函数值 $y =$ _____.

【答案】 -8

【解析】

【分析】 根据抛物线的对称性根据表中数据即可求出答案.

【详解】 ∵ $x=-3$ 和 $x=5$ 时, $y=7$,

∴ 对称轴 $x = \frac{-3+5}{2} = 1$,

∴ $x=2$ 的点关于对称轴 $x=1$ 对称的点为 $x=0$,

∴ $x=0$ 时, $y=-8$,

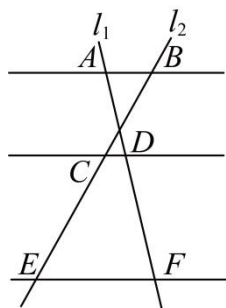
∴ $x=2$ 时, $y=-8$,

故答案为: -8.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质，要求掌握二次函数的对称性，会利用表格中的数据规律找到对称点，确定对称轴，再利用对称轴求得对称点.

11. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A 、 D 、 F 和点 B 、 C 、 E 。如果

$\frac{AD}{DF} = \frac{5}{4}$ ， $BE = 18$ ，那么线段 BC 的长是_____.



【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例定理，根据平行线分线段成比例定理直接解答即可求解，熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】 解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ，

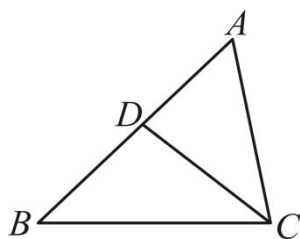
$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DF} = \frac{5}{4},$$

$$\because BE = 18,$$

$$\therefore BC = \frac{5}{9}BE = \frac{5}{9} \times 18 = 10,$$

故答案为： 10.

12. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $AD = 4, DB = 5, \angle ACD = \angle B$ ，那么 $\frac{CD}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键. 先求出 $AB = 9$ ，再证出 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质求解即可得.

【详解】 解： $\because AD = 4, DB = 5$ ，

$$\therefore AB = AD + DB = 9,$$

在 $\triangle ACD$ 和 ABC 中,

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle B \\ \angle A = \angle A \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}, \text{ 即 } \frac{AC}{9} = \frac{4}{AC} = \frac{CD}{BC},$$

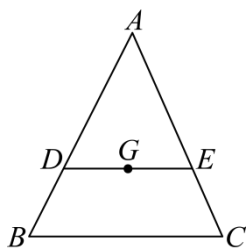
$$\therefore AC = 6 \text{ 或 } AC = -6 < 0 \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

经检验, $AC = 6$ 是所列方程的解,

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

13. 如图, 已知点 G 是 ABC 的重心, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 线段 DE 经过点 G , 且 $DE \parallel BC$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$ 为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

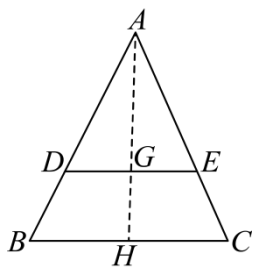
【分析】 此题考查了相似三角形的判定和性质, 向量的线性运算, 重心的性质等知识, 求出 $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$,

再根据相似三角形的判定和性质证明 $DE = \frac{2}{3}BC$, 即可得到答案.

【详解】 解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

连接 AG 并延长 AG 交 BC 于点 H ,



∵ 点 G 是 ABC 的重心,

$$\therefore \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}$$

∵ 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 线段 DE 经过点 G , 且 $DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABH, \triangle AGE \sim \triangle AHC,$$

$$\therefore \frac{DG}{BH} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}, \frac{EG}{CH} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DG = \frac{2}{3}BH, GE = \frac{2}{3}HC,$$

$$\therefore DE = DG + GE = \frac{2}{3}(BH + HC) = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a},$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

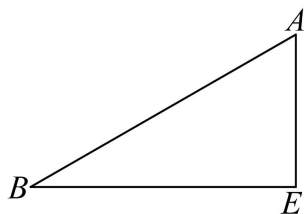
14. 传送带和地面所成斜坡的坡度 $i = 1:2.4$, 如果它把某物体从地面送到离地面 2.5 米高的地方, 那么该物体所经过的路程是_____米.

【答案】6.5

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理、坡度问题; 根据坡度定义, 垂直高度与水平距离的比为 1:2.4, 已知垂直高度为 2.5 米, 可求水平距离, 再利用勾股定理求斜坡长度.

【详解】 解: 由坡度 $i = 1:2.4$, 如图, 垂直高度 $AE = 2.5$ 米,



则水平距离 BE 满足 $\frac{AE}{BE} = \frac{1}{2.4}$, 即 $\frac{2.5}{BE} = \frac{1}{2.4}$,

解得 $BE = 2.5 \times 2.4 = 6$ (米).

斜坡 $AB = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$ (米).

故答案为: 6.5.

15. 已知点 A 坐标为 $(1, -3)$, 如果半径为 r 的 $\odot A$ 与 x 轴无公共点, 与 y 轴有公共点, 那么 r 的取值范围是

_____.

【答案】 $1 \leq r < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了直线与圆的位置关系; 根据圆与坐标轴的位置关系, 利用圆心到直线的距离与半径的关系列不等式求解.

【详解】 解: 圆心 $A(1, -3)$ 到 x 轴的距离为 $|-3| = 3$,

由于圆与 x 轴无公共点,

故圆心到 x 轴的距离大于半径, 即 $r < 3$;

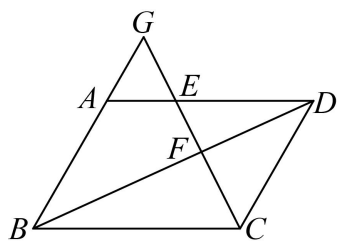
圆心到 y 轴的距离为 1, 由于圆与 y 轴有公共点,

故圆心到 y 轴的距离小于或等于半径, 即 $r \geq 1$;

因此, r 的取值范围是 $1 \leq r < 3$.

故答案为: $1 \leq r < 3$.

16. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, $AE = \frac{1}{2}ED$, 射线 CE 交 BD 于点 F , 交射线 BA 于点 G , 那么 $GE:EF:FC =$ _____. (结果化为最简整数比)



【答案】 $5:4:6$

【解析】

【分析】 此题考查了相似三角形的判定和性质, 平行四边形的性质, 证明 $\triangle GAE \sim \triangle GBC$, $\triangle DEF \sim \triangle BCF$, 根据相似三角形的性质即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$

$\therefore \angle GAE = \angle GBC, \angle GEA = \angle BCG, \angle DEF = \angle BCF, \angle EDF = \angle CBF,$

$$\therefore \triangle GAE \sim \triangle GBC, \triangle DEF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{GE}{GC}, \frac{EF}{FC} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}ED,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BC, DE = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \frac{GE}{GC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{3}, \frac{EF}{FC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

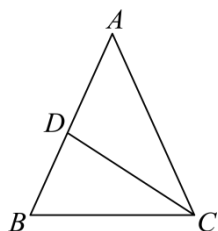
$$\therefore \frac{GE}{EC} = \frac{1}{2}, EC = \frac{5}{3}CF, EF = \frac{2}{3}CF,$$

$$\therefore GE = \frac{1}{2}EC = \frac{5}{6}CF,$$

$$\therefore GE : EF : FC = \frac{5}{6}CF : \frac{2}{3}CF : FC = 5 : 4 : 6;$$

故答案为: 5:4:6.

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 13$, $BC = 10$, CD 是中线, 那么 $\tan \angle BCD$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{4}{5}$

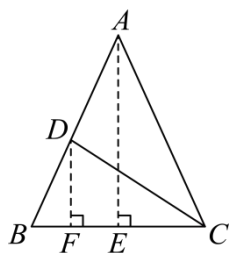
【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 以及三角函数等知识.

作 $AE \perp BC$ 于点 E , 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 由三线合一得 $BE = CE = \frac{1}{2}BC = 5$, 由勾股定理得 $AE = 12$. 证

明 $\triangle BDF \sim \triangle BAE$ 可求出 $DF = 6$, $BF = \frac{5}{2}$, 然后根据 $\tan \angle BCD = \frac{DF}{CF}$ 求解即可.

【详解】 解: 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 作 $DF \perp BC$ 于点 F ,



$$\therefore AB = AC = 13, BC = 10,$$

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = 5.$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 12.$$

$\because CD$ 是中线,

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2}.$$

$\because AE \perp BC, DF \perp BC,$

$\therefore DF \parallel AE,$

$\therefore \triangle BDF \sim \triangle BAE,$

$$\therefore \frac{DF}{AE} = \frac{BF}{BE} = \frac{BD}{AB},$$

$$\therefore \frac{DF}{12} = \frac{BF}{5} = \frac{1}{2},$$

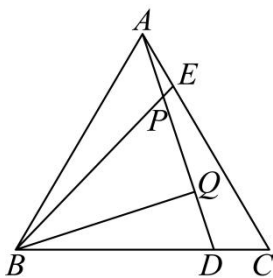
$$\therefore DF = 6, BF = \frac{5}{2},$$

$$\therefore CF = BC - BF = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2},$$

$$\therefore \tan \angle BCD = \frac{DF}{CF} = 6 \div \frac{15}{2} = \frac{4}{5}$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

18. 如图, 等边 ABC 中, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, $AE = CD$, AD 交 BE 于点 P , $BQ \perp AD$ 于点 Q . 如果 $PQ = 3PE$, 且 PE 的长为 a , 那么等边 ABC 的边长为_____. (结果用含 a 的代数式表示)

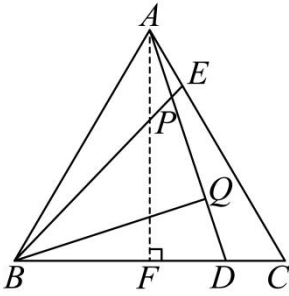


【答案】 $3\sqrt{7}a$

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CAD$ (SAS), 则 $BE = AD$. $\angle ABE = \angle CAD$, 求出 $\angle PBQ = 30^\circ$, 得到 $BP = 2PQ$, $BQ = 3\sqrt{3}a$, $BP = 6a$. 得到 $BE = 7a$, 证明 $\triangle ABE \sim \triangle PAE$, 得到 $AE^2 = PE \cdot BE = 7a^2$, 得到 $CD = AE = \sqrt{7}a$, 设 $AB = BC = AC = x$, 则 $BD = x - \sqrt{7}a$, 再根据等积法列出一元二次方程, 解方程即可得到答案.

【详解】解：过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AB = AC, \angle BAC = \angle C = \angle ABC = 60^\circ, \angle BAF = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAD$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle ACD, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAD (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = AD, \angle ABE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle ABP + \angle BAP = \angle CAD + \angle BAP = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle APE = 60^\circ$$

又 $\because BQ \perp AD$,

$$\therefore \angle BQP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PBQ = 180^\circ - \angle BPQ - \angle BQP = 30^\circ,$$

$$\therefore BP = 2PQ,$$

$$\therefore PQ = 3PE, \text{ 且 } PE \text{ 的长为 } a,$$

$$\therefore PQ = 3PE = 3a,$$

$$\therefore BP = 2PQ = 6a.$$

$$\therefore BE = AD = BP + PE = 7a, BQ = \sqrt{BP^2 - PQ^2} = \sqrt{(6a)^2 - (3a)^2} = 3\sqrt{3}a,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CAD, \angle APE = \angle BAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle PAE,$$

$$\therefore \frac{AB}{PA} = \frac{AE}{PE} = \frac{BE}{AE},$$

$$\therefore AE^2 = PE \cdot BE = 7a^2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{7}a,$$

$$\therefore CD = AE = \sqrt{7}a,$$

$$\text{设 } AB = BC = AC = x, \text{ 则 } BD = BC - CD = x - \sqrt{7}a, \quad AF = AB \sin \angle ABC = AB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BQ = \frac{1}{2}BD \cdot AF,$$

$$\therefore 7a \cdot 3\sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}x(x - \sqrt{7}a)$$

$$\text{解得 } x_1 = 3\sqrt{7}a, x_2 = -2\sqrt{7}a \text{ (不合题意, 舍去)}$$

$$\therefore \text{等边 } ABC \text{ 的边长为 } 3\sqrt{7}a,$$

$$\text{故答案为: } 3\sqrt{7}a$$

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质、解直角三角形、全等三角形的判定和性质、等边三角形的性质、解一元二次方程、勾股定理等知识，综合性较强，熟练掌握相似三角形的判定和性质、解直角三角形是解题的关键。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

$$19. \text{ 计算: } \frac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ \cdot \cos 30^\circ} - \sqrt{(\cos 45^\circ - 1)^2} - \sin 45^\circ.$$

$$\text{【答案】 } -\frac{1}{3}$$

【解析】

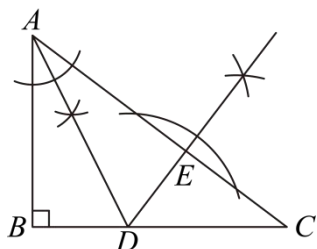
【分析】本题考查了特殊角三角函数的混合运算，熟记特殊角的三角函数值是关键；由特殊角的三角函数值及二次根式的运算即可求解。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: 原式} &= \frac{1}{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，通过尺规作图，小明作出了线段 AD 、射线 DE ，依据作图痕迹：



(1) 判断下列结论正确的是_____.

① $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ ；② $AD = DC$ ；

③ $AB + EC = AC$. 请填写编号)

(2) 如果 $\cos C = 0.8$, $AB = 3$ ，求 AD 的长.

【答案】 (1) ①③ (2) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据相似三角形的判定方法即可判定①正确；无法判定②正确；证明 $\triangle ABD \cong \triangle AED$ (AAS)，得出 $AE = AB$ ，即可判定③正确；

(2) 设 $BC = 4x$ ，则 $AC = 5x$ ，根据勾股定理得出 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 3x$ ，求出 $x = 1$ ，得出 $BC = 4$ ， $AC = 5$ ，根据 $\cos C = \frac{CE}{DC} = 0.8$ ，得出 $DC = \frac{CE}{0.8} = \frac{2}{0.8} = 2.5$ ，根据勾股定理求出 $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + (1.5)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 即可.

【小问1详解】

解：①根据作图可得： $DE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle B,$$

$$\therefore \angle C = \angle C,$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC$ ，故①正确；

② $\because E$ 点不一定是 AC 的中点,

$\therefore DE$ 不一定垂直平分 AC ,

$\therefore AD$ 不一定等于 DC , 故②错误;

③根据作图可得 AD 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD = \angle EAD$,

$\because \angle B = \angle AED = 90^\circ$, $AD = AD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$ (AAS),

$\therefore AE = AB$,

$\therefore AB + EC = AE + EC = AC$;

综上, 正确的有①③;

【小问 2 详解】

解: $\because \cos C = \frac{BC}{AC} = 0.8$,

$\therefore$ 设 $BC = 4x$, 则 $AC = 5x$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 3x$,

$\because AB = 3$,

$\therefore 3x = 3$,

解得: $x = 1$,

$\therefore BC = 4$, $AC = 5$,

根据解析 (1) 可得: $AE = AB = 3$,

$\therefore CE = 5 - 3 = 2$,

$\because \cos C = \frac{CE}{DC} = 0.8$,

$\therefore DC = \frac{CE}{0.8} = \frac{2}{0.8} = 2.5$,

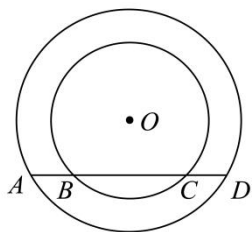
$\therefore BD = BC - DC = 4 - 2.5 = 1.5$,

$\therefore AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + (1.5)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 解直角三角形的相关计算, 尺规作垂线和角平分线, 解题的关键是熟练掌握相关的判定和性质.

21. 如图, 以 O 为圆心的两个同心圆中, 不经过圆心的线段与两圆相交, 自左向右的交点依次为点 A 、 B 、

C 、 D 。



(1) 求证: $AB = CD$;

(2) 连接 OA 、 OB , 如果 $\angle OAD = 30^\circ$, $\angle OBC = 45^\circ$, $AB = 2$, 求小圆半径 r 的值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

【解析】

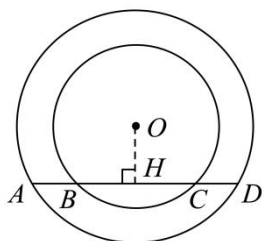
【分析】(1) 过点 O 作 $OH \perp AD$ 于点 H , 由垂径定理得 $AH = DH$, $BH = CH$, 进而即可求证;

(2) 连接 OA 、 OB , 可得 $OA = 2OH$, $\angle BOH = \angle OBH = 45^\circ$, 即得 $BH = OH$, 设 $BH = OH = x$, 则 $OA = 2x$, $AH = AB + BH = 2 + x$, 利用勾股定理求出 x 的值进而即可求解;

本题考查了垂径定理, 直角三角形的性质, 勾股定理等, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 过点 O 作 $OH \perp AD$ 于点 H ,



$\therefore OH \perp AD$,

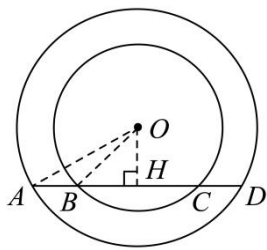
$\therefore AH = DH$, $BH = CH$,

$\therefore AH - BH = DH - CH$,

即 $AB = CD$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 OA 、 OB ,



$\because OH \perp AD$,

$\therefore \angle OHA = \angle OHB = 90^\circ$,

$\because \angle OAD = 30^\circ$, $\angle OBC = 45^\circ$,

$\therefore OA = 2OH$, $\angle BOH = \angle OBH = 45^\circ$,

$\therefore BH = OH$,

设 $BH = OH = x$, 则 $OA = 2x$, $AH = AB + BH = 2 + x$,

在 $\text{Rt}\triangle AHO$ 中, $\because AH^2 + OH^2 = OA^2$,

$$\therefore (2+x)^2 + x^2 = (2x)^2,$$

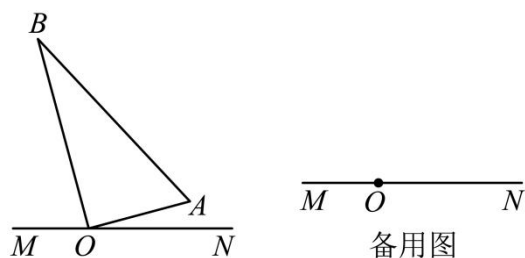
解得 $x = \sqrt{3} + 1$,

$$\therefore BH = OH = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore OB = \sqrt{2}BH = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

即小圆半径 r 的值为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

22. 问题提出 气象部门为研究雷暴生成与发展的规律, 优化雷电预警机制, 某雷雨天, 在地面上点 O 处, 对雷电的发生实施监测 (检测仪高度忽略不计, 闪电光传播时间忽略不计): 闪电发生瞬间, 首先测得闪电始发点 A 处的仰角为 15° , 8 秒钟后接收到该闪电传出的雷声; 接着又在另一闪电的始发点 B 处, 测得仰角为 75° , 15 秒钟后接收到该闪电的雷声, 已知点 A 、 B 、 O 在同一个垂直于地面的平面内. 你能依据所提供数据, 求出 A 、 B 两个闪电之间的距离吗? (雷声在空气中传播的速度为 340 米/秒)



分析解决

(1) 建立模型: 小海画出示意图, MN 表示地面 (如图所示), 他将雷声传播速度 340 米/秒记作 a , 得到

$OA = 8a, OB = 15a$ ，请根据他的思路，求出 AB 之间的距离是多少米.

(2) 反思质疑：小华提出，除了小海所解的这种情形外，依据题意，点 A 、 B 的位置是否还存在其他情况呢？若存在，请在备用图中画出草图，并求出 AB 之间的距离是多少米；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) 5780 米.

(2) 存在，图见解析，4420 米.

【解析】

【分析】此题考查了勾股定理的应用，解直角三角形的应用，熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

(1) 证明 $\angle AOB = 90^\circ$ ，利用勾股定理即可求出答案；

(2) 根据题意可画出图形，如图，过点 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H ，求出 AH ， BH ，再利用勾股定理即可求出 AB 之间的距离.

【小问 1 详解】

解：由题意可知， $\angle AON = 15^\circ, \angle BOM = 75^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle AON - \angle BOM = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $OA = 8a, OB = 15a$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{(8a)^2 + (15a)^2} = 17a,$$

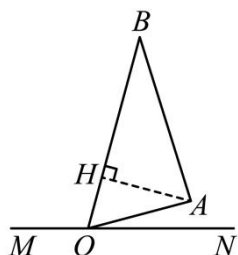
$\therefore$ 雷声传播速度 340 米/秒记作 a ，

$$\therefore AB = 17a = 17 \times 340 = 5780 \text{ (米)},$$

即 AB 之间的距离是 5780 米.

【小问 2 详解】

解：如图，过点 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H ，则 $\angle AHO = \angle AHB = 90^\circ$ ，



在 $\text{Rt}\triangle AHO$ 中， $\angle AOB = \angle BON - \angle AON = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ ，

$$\therefore AH = OA \sin \angle AOH = 8a \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}a, \quad OH = OA \cos \angle AOH = 8a \times \cos 60^\circ = 4a,$$

$$\therefore BH = OB - OH = 15a - 4a = 11a,$$

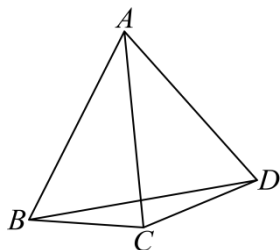
$$\therefore AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{(11a)^2 + (4\sqrt{3}a)^2} = 13a,$$

$\therefore$ 雷声传播速度 340 米/秒记作 a ,

$$\therefore AB = 13a = 13 \times 340 = 4420 \text{ (米)},$$

即 AB 之间的距离是 4420 米.

23. 探究活动: “奇异四边形”的特征值. 如果一个四边形的四条边和两条对角线这 6 条线段中只有两种不同的长度, 我们把这样的四边形叫做“奇异四边形”, 其中较短线段与较长线段长度的比值称为特征值, 记作 λ . 例如, 如图所示, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC = AD = BD$, $BC = DC$, 我们就可将它称为奇异四边形, 它的特征值 λ 为 BC 与 AB 的比值. 请解答:



(1) 正方形是奇异四边形吗? _____; 如果是, 它的特征值 λ 为 _____; 如果不是, 请说明理由.

(2) 请构造一个符合奇异四边形特征的梯形, 画出这个梯形的草图, 写出在四条边和两条对角线中相等的线段, 并求出它的特征值 λ .

【答案】(1) 是, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 作图见详解, $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了奇异四边形的理解与应用, 正方形的性质及相似三角形的判定与性质.

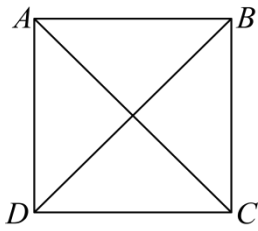
(1) 根据题意画出正方形 $ABCD$, 得出 $AB = BC = CD = AD$, $AC = BD$, 从而求得特征值 λ ;

(2) 根据题意可画出梯形 $ABCD$, 其中 $AB = BC = AD$, $AC = BD = CD$, 设 $\angle BAC = \alpha$, 利用等腰三角形的性质求得 $\alpha = 36^\circ$, 从而证得 $\triangle BCO \sim \triangle BDC$, 利用相似三角形的性质设 $BD = CD = 1$,

$BC = OC = x$, 列出线段比例方程求解 x 的值, 此时 x 的值即为特征值 $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【小问 1 详解】

解: 如图, 在正方形 $ABCD$ 中,



$$AB = BC = CD = AD, \quad AC = BD,$$

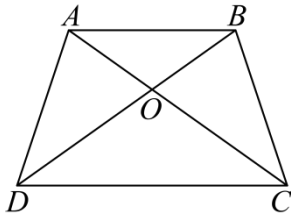
$\therefore$ 符合题中的奇异四边形定义,

$$\therefore \text{特征值 } \lambda = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为: 是, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 梯形 $ABCD$ 即为所求,



其中, $AB \parallel CD, AB = BC = AD, AC = BD = CD$,

设 $\angle BAC = a$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD = a,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 2a,$$

$$\because AC = CD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ADC = \frac{180^\circ - a}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}a + a = 90^\circ + \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore 90^\circ + \frac{1}{2}a = 180^\circ - 2a, \text{ 解得: } a = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BCO = 36^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCO \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BO}{BC},$$

$$\therefore BC^2 = BD \cdot BO = BD \cdot (BD - DO),$$

设 $BD = CD = 1$, $BC = OC = x$,

$\therefore \angle BDC = \angle ACD = 36^\circ$,

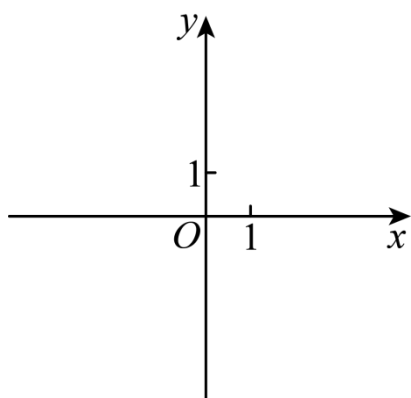
$\therefore OD = OC = x$,

$\therefore x^2 = 1 - x$,

解得: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去),

$\therefore \lambda = \frac{BC}{BD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

24. 已知平面直角坐标系 xOy (如图所示), 抛物线 $y = kx^2 - 2kx + k + 1 (k \neq 0)$ 的顶点为 D , 与 y 轴交于点 A , 直线 $l: y = kx - k + 1 (k \neq 0)$.



(1) 求证: 抛物线的顶点 D 在直线 l 上.

(2) 如果抛物线与直线 l 除点 D 外, 同时还经过另一点 C , 已知点 $E(0, 1)$, 连接 CE 、 AD 交于点 G , 连接 CD .

①试说明: $S_{\triangle AEG} = S_{\triangle CDG}$;

②当 $\triangle ADC$ 为等边三角形时, 求 k 的值及 $\angle ECD$ 的正弦值.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) ①证明见解析; ② $k = \pm\sqrt{3}$, $\sin \angle ECD = \frac{\sqrt{21}}{14}$

【解析】

【分析】 (1) 把函数解析式转化为顶点式, 求出顶点 D 的坐标, 进而代入一次函数解析式即可求证;

(2) ①求出点 C 和点 A 坐标, 连接 AC 、 ED , 可得 $AC \parallel DE$, 即得 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle CDE}$, 进而即可求证;

②由点 A 和点 C 坐标可得 $AC = 2$, 进而由等边三角形和平行线的性质得到 $AD = AC = 2$,

$\angle ADE = \angle CAD = 60^\circ$ ，又由点 A 、 E 得 $AE = |k+1-1| = |k|$ ，由锐角三角函数得

$AE = AD \cdot \sin \angle ADE = \sqrt{3}$ ，即得 $|k| = \sqrt{3}$ ，得到 $k = \pm\sqrt{3}$ ，再分 $k = \sqrt{3}$ 和 $k = -\sqrt{3}$ 两种情况，分别画出图形，根据正弦的定义解答即可求解；

本题考查了二次函数的顶点式，二次函数的几何应用，锐角三角函数等，熟练掌握知识点是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明： $\because y = kx^2 - 2kx + k + 1 = k(x-1)^2 + 1$ ，

$\therefore$ 顶点 $D(1,1)$ ，

把 $x=1$ 代入直线 $l: y = kx - k + 1$ ，得 $y = k - k + 1 = 1$ ，

$\therefore$ 抛物线的顶点 D 在直线 l 上；

【小问 2 详解】

①证明：令 $kx^2 - 2kx + k + 1 = kx - k + 1$ ，得 $kx^2 - 3kx + 2k = 0$ ，

即 $k(x^2 - 3x + 2) = 0$ ，

$\because k \neq 0$ ，

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$ ，

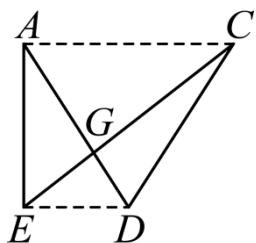
解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ，

$\therefore C(2, k+1)$ ，

把 $x=0$ 代入 $y = kx^2 - 2kx + k + 1$ ，得 $y = k + 1$ ，

$\therefore A(0, k+1)$ ，

连接 AC 、 ED ，如图，



$\because D(1,1)$ ， $E(0,1)$ ，

$\therefore AC \parallel DE$ ，

$$\therefore S_{\triangle AED} = S_{\triangle CDE},$$

$$\therefore S_{\triangle AED} - S_{\triangle GED} = S_{\triangle CDE} - S_{\triangle GED},$$

$$\text{即 } S_{\triangle AEG} = S_{\triangle CDG};$$

$$\textcircled{2} \because A(0, k+1), C(2, k+1),$$

$$\therefore AC = 2,$$

$\therefore \triangle ADC$ 为等边三角形,

$$\therefore AD = AC = 2, \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore AC \parallel DE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore A(0, k+1), E(0, 1),$$

$$\therefore AE = |k+1-1| = |k|,$$

$$\text{又 } \because \angle AED = 90^\circ,$$

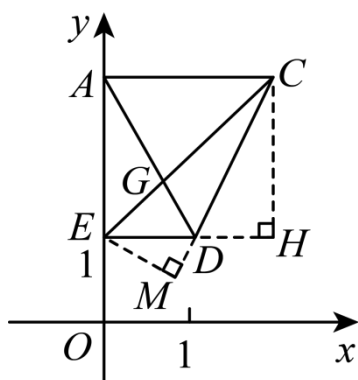
$$\therefore AE = AD \cdot \sin \angle ADE = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } |k| = \sqrt{3},$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{3},$$

$$\text{当 } k = \sqrt{3} \text{ 时, } A(0, \sqrt{3}+1), C(2, \sqrt{3}+1),$$

如图, 过点 C 作 $CH \perp ED$ 的延长线于点 H , 过点 E 作 $EM \perp CD$ 的延长线于点 M , 则 $\angle H = \angle M = 90^\circ$,



$$\text{则 } DH = 2 - 1 = 1, CH = \sqrt{3} + 1 - 1 = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\therefore \angle M = \angle H = 90^\circ, \quad \angle EDM = \angle CDH,$$

$$\therefore \triangle EDM \sim \triangle CDH,$$

$$\therefore \frac{EM}{CH} = \frac{DM}{DH} = \frac{ED}{CD},$$

$$\therefore ED = 1,$$

$$\therefore \frac{EM}{\sqrt{3}} = \frac{DM}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EM = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad DM = \frac{1}{2},$$

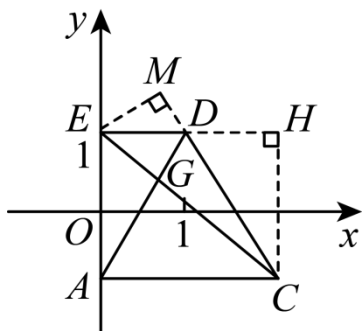
$$\therefore CM = CD + DM = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore CE = \sqrt{CM^2 + EM^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \sin \angle ECD = \frac{EM}{CE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14};$$

$$\text{当 } k = -\sqrt{3} \text{ 时, } A(0, -\sqrt{3}+1), \quad C(2, -\sqrt{3}+1),$$

如图, 过点 C 作 $CH \perp ED$ 的延长线于点 H , 过点 E 作 $EM \perp CD$ 的延长线于点 M , 则 $\angle H = \angle M = 90^\circ$,

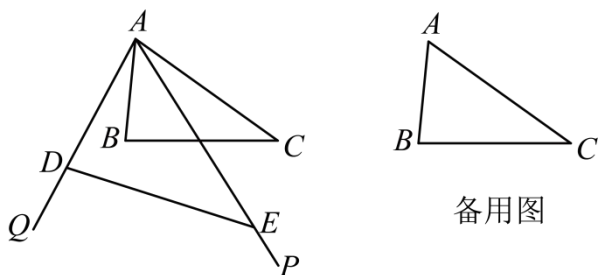


$$\text{同理可得 } \sin \angle ECD = \frac{EM}{CE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14};$$

$$\text{综上, } k = \pm\sqrt{3}, \quad \sin \angle ECD = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, 已知射线 AP 在 $\angle BAC$ 内部, 射线 AQ 与射线 AP 在边 AB 的两侧,

$\angle QAP = \angle BAC$, 点 E 、 D 分别在射线 AP 、 AQ 上, $AD \cdot AC = AB \cdot AE$.



- (1) 如图，连接 DB 、 CE ，求证： $\angle ABC - \angle AEC = \angle BDE$ 。
- (2) 如果 AP 平分 $\angle BAC$ ，线段 AE 与边 BC 的公共点为 G ， $AB = AG = 6$ ， $AE = x$ ， $DE = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；
- (3) 如果 $AP \perp BC$ ，垂足为点 K ，且 $DE \parallel AC$ ， $AC = 6$ ， $EK = \sqrt{2}$ ，求 DE 的长。

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) y = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}x \quad (x \geq 6)$$

$$(3) 12 - 4\sqrt{3} \text{ 或 } 6 - 2\sqrt{3}$$

【解析】

【分析】(1) 分别证明 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ 和 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ，得到 $\angle ADE = \angle ABC$ 和 $\angle ADB = \angle AEC$ ，进而即可求证；

(2) 过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H ，由已知可得 $\angle C = 45^\circ$ ， $\angle ABH = 30^\circ$ ，即得 $AH = \frac{1}{2}AB = 3$ ，

$CH = BH = 3\sqrt{3}$ ，进而得到 $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = 3\sqrt{6}$ ， $AC = AH + CH = 3 + 3\sqrt{3}$ ，再利用 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ 即可求解；

(3) 分点 K 在点 E 下方和上方两种情况，分别画出图形，利用相似三角形的性质解答即可求解；
 本题考查了相似三角形的判定和性质，直角三角形的性质，等腰三角形的判定和性质等，掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键。

【小问 1 详解】

证明：如图， $\because AD \cdot AC = AB \cdot AE$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}，$$

$$\because \angle QAP = \angle BAC，$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC，$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC，$$

$$\therefore \angle QAP = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle QAP - \angle BAP = \angle BAC - \angle BAP,$$

$$\text{即 } \angle DAB = \angle CAE,$$

$$\text{又 } \because AD \cdot AC = AB \cdot AE,$$

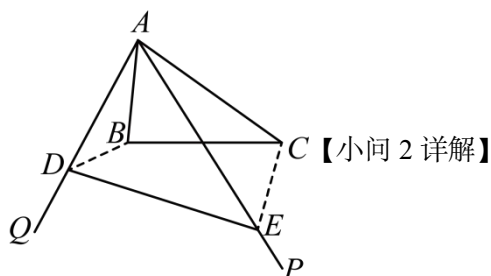
$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE,$$

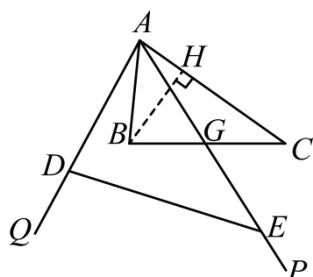
$$\therefore \angle ADB = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle ADE - \angle ADB = \angle BDE,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle AEC = \angle BDE;$$



解：如图，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H ，则 $\angle AHB = \angle CHB = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle BAC = 60^\circ, \quad AP \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle CAG = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = AG,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle AGB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle AGB - \angle CAG = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AHB = 90^\circ, \quad \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = 30^\circ,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle CHB = 90^\circ, \quad \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBH = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore CH = BH = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{6}, \quad AC = AH + CH = 3 + 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC,$$

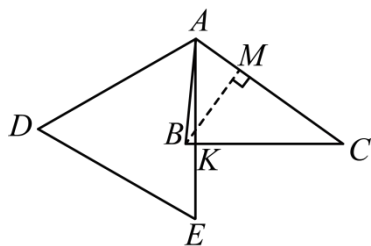
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{y}{3\sqrt{6}} = \frac{x}{3+3\sqrt{3}},$$

$$\therefore y = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}x (x \geq 6);$$

【小问3 详解】

解：当点 K 在点 E 下方时，如图，过点 B 作 $BM \perp AC$ 于 M ，则 $\angle AMB = \angle CMB = 90^\circ$ ，



$$\therefore AK \perp BC,$$

$$\therefore \angle AKC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle E = \angle C,$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle E = \angle CAK,$$

$$\therefore \angle C = \angle CAK = 45^\circ,$$

$$\therefore AK = CK,$$

$$\therefore AC = 6,$$

$$\therefore AK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore EK = \sqrt{2},$$

$$\therefore AE = AK + EK = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ, \quad \angle AMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AM,$$

设 $AM = a$, 则 $AB = 2a$,

$$\therefore BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\because \angle CMB = 90^\circ, \quad \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBM = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore CM = BM = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore AC = AM + CM = a + \sqrt{3}a = 6,$$

$$\text{解得 } a = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore BM = CM = \sqrt{3}a = 9 - 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}BM = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{6},$$

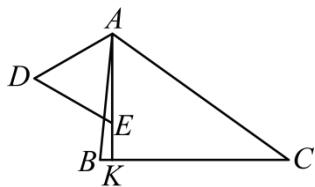
$$\because \triangle DAE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{DE}{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}}{6},$$

$$\text{解得 } DE = 12 - 4\sqrt{3};$$

当点 K 在点 E 上方时, 如图,



$$\text{则 } AE = AK - EK = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{同理可得 } DE = 6 - 2\sqrt{3};$$

综上, DE 的长为 $12 - 4\sqrt{3}$ 或 $6 - 2\sqrt{3}$.