

数学试卷

4. 填涂选择题和作图用 2B 铅笔, 作答其余题型用黑色字迹钢笔、签字笔或圆珠笔。

D. 两个直角三角形

D. $y = (x + 4)^2 - x^2$

第 1 页 / 共 33 页

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的定义. 形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函数是二次函数, 据此进行逐项分析, 即可作答.

【详解】解: A、 $y = \frac{3}{4}x$ 不是二次函数, 故该选项不符合题意;

B、 $y = \frac{1}{x}$ 不是二次函数, 故该选项不符合题意;

C、 $y = x(2x-1) = 2x^2 - x$ 是二次函数, 故该选项符合题意;

D、 $y = (x+4)^2 - x^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16$ 不是二次函数, 故该选项不符合题意;

故选: C.

3. 下列说法中, 一定正确的是 ()

A. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 且 $\vec{b} = -2\vec{a}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量, 那么 $\vec{e} = 1$

C. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是相等向量

D. 如果 $k = 0$, $\vec{a}$ 是非零向量, 那么 $k\vec{a} = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查向量, 根据向量的基本概念和平行向量的定义判断各选项的正确性.

【详解】解: $\because$ 选项 A 中, $\vec{b} = -2\vec{a}$ 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 非零,

$\therefore \vec{b}$ 是 $\vec{a}$ 的标量倍数, 方向相反,

$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$, 故 A 正确;

$\because$ 选项 B 中, 单位向量的模为 1, 但向量不等于标量 1, 故 B 错误;

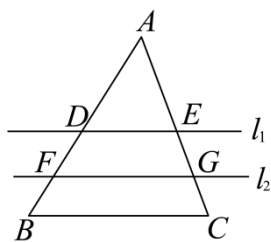
$\because$ 选项 C 中, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 方向相反, 不是相等向量, 故 C 错误;

$\because$ 选项 D 中, 当 $k = 0$ 时, $k\vec{a}$ 是零向量, 但等式中 “0” 可能表示标量, 向量不等于标量, 故 D 错误;

故选: A.

4. 如图, 已知 $\triangle ABC$, 直线 l_1 与边 AB 、 AC 分别相交于点 D 、 E , 直线 l_2 与边 AB 、 AC 分别相交于点

F 、 G , $l_1 \parallel l_2 \parallel BC$, 那么下列比例式一定正确的是 ()



- A. $\frac{AD}{DF} = \frac{DE}{GF}$ B. $\frac{AD}{BF} = \frac{AE}{GC}$ C. $\frac{DE}{FG} = \frac{FG}{BC}$ D. $\frac{DF}{BF} = \frac{GC}{EG}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线分线段成比例，相似三角形的判定与性质，先结合 $l_1 // l_2 // BC$ ，得出

$\triangle AED \sim \triangle AGF$ ， $\frac{DE}{GF} = \frac{AD}{AF}$ ， $\frac{AD}{BF} = \frac{AE}{GC}$ ， $\frac{DF}{BF} = \frac{EG}{GC}$ ，再进行逐项分析，即可作答.

【详解】解：A、 $\because l_1 // l_2$ ， $\therefore \triangle AED \sim \triangle AGF$ ，则 $\frac{DE}{GF} = \frac{AD}{AF} \neq \frac{AD}{DF}$ ，故该选项不符合题意；

B、 $\because l_1 // l_2 // BC$ ，由平行线分线段成比例定理，设 $\frac{AD}{AB} = x$ ， $\frac{AF}{AB} = y$ ，

则 $0 < x < y < 1$ ， $AD = x \cdot AB$ ， $\triangle AED \sim \triangle AGF \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = x, \quad \frac{AG}{AC} = \frac{AF}{AB} = y,$$

$$\therefore DE = x \cdot BC, \quad FG = y \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{x \cdot AB}{(1-y)AB} = \frac{x}{1-y},$$

$$\therefore \frac{AE}{GC} = \frac{x \cdot AC}{(1-y)AC} = \frac{x}{1-y},$$

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{AE}{GC}, \text{ 故该选项符合题意;}$$

C、 $\because l_1 // l_2 // BC$ ，由平行线分线段成比例定理，设 $\frac{AD}{AB} = x$ ， $\frac{AF}{AB} = y$ ，

则 $0 < x < y < 1$ ， $AD = x \cdot AB$ ， $\triangle AED \sim \triangle AGF \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = x, \quad \frac{AG}{AC} = \frac{AF}{AB} = y,$$

$$\therefore DE = x \cdot BC, \quad FG = y \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{FG} = \frac{x}{y}, \quad \frac{FG}{BC} = y,$$

则 x, y 不一定相等,

则 $\frac{DE}{FG}, \frac{FG}{BC}$ 不一定相等, 故该选项不符合题意;

D、 $\because l_1 // l_2 // BC$, 则 $\frac{DF}{BF} = \frac{EG}{GC} \neq \frac{GC}{EG}$, 故该选项不符合题意;

故选: B.

5. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 是常数, 且 $a < 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$, 且与 x 轴有两个交点, 下列结论一定正确的是 ()

A. $c < 0$

B. $b < 0$

C. $2a + b = 0$

D. $a + b + c = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象及性质, 由对称轴为 $x = 1$, 根据二次函数对称轴公式可得 $-\frac{b}{2a} = 1$, 从而推导出 $2a + b = 0$, 其他选项不一定成立.

【详解】解: A、由题意无法得到抛物线与 y 轴的交点位置, 故无法确定 c 的符号, 故本选项的结论不一定成立;

B、由 $b = -2a$, $a < 0$, 得 $b > 0$, 故本选项的结论错误;

C、 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore 2a + b = 0, \text{ 故本选项的结论正确;}$$

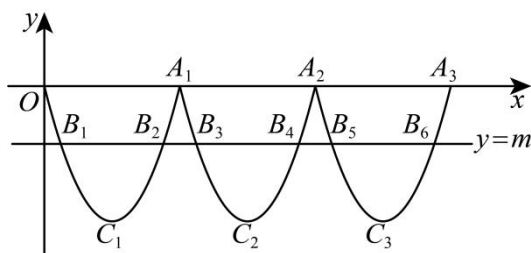
D、由于抛物线与 x 轴有两个交点, 则抛物线顶点不在 x 轴上, 即当 $x = 1$ 时, $y = a + b + c \neq 0$, 故本选项的结论错误.

故选: C.

6. 如图, 已知抛物线 $C_1: y = x^2 - 6x (0 \leq x \leq 6)$ 与 x 轴交于 O, A_1 两点. 将抛物线 C_1 向右平移得到抛物线

C_2 , 交 x 轴于点 A_1, A_2 ; 再将抛物线 C_2 向右平移得到抛物线 C_3 , 交 x 轴于点 A_2, A_3 . 若直线

$y = m (-9 < m < 0)$ 与这 3 条抛物线交于点 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, 则这 6 个点的横坐标之和是 ()



A. 6

B. 18

C. 30

D. 54

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图像的平移，二次函数自变量函数值的计算，根据抛物线

$C_1: y = x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, 得对称轴为直线 $x = 3$, 设 B_1 和 B_2 的横坐标分别为 x_1, x_2 , 所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 3$,

则 $x_1 + x_2 = 6$, 即 B_1 与 B_2 的横坐标和为 6, 同理 B_3 与 B_4 的横坐标和为 18, B_5 与 B_6 的横坐标和为 30,

由此即可求解, 掌握二次函数平移的性质是解题的关键.

【详解】 解: 抛物线 $C_1: y = x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 (0 \leq x \leq 6)$ 与 x 轴交于 O, A_1 两点,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 3$,

令 $y = 0$, 则 $x^2 - 6x = 0$,

解得: $x_1 = 0, x_2 = 6$,

$\therefore A_1(6, 0)$,

$\therefore OA_1 = 6$,

设 B_1 和 B_2 的横坐标分别为 x_1, x_2 ,

$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = 3$,

$\therefore x_1 + x_2 = 6$,

$\therefore B_1$ 与 B_2 的横坐标和为 6,

$\therefore$ 将抛物线 C_1 向右平移得到抛物线 C_2 , 交 x 轴于点 A_1, A_2 ;

$\therefore A_1A_2 = OA_1 = 6$,

$\therefore$ 将抛物线 C_1 向右平移 6 个单位得到抛物线 C_2 ,

$\therefore C_2: y = (x-3-6)^2 - 9 = (x-9)^2 - 9 (6 \leq x \leq 12)$,

∴ 对称轴为直线 $x=9$,

设 B_3 和 B_4 的横坐标分别为 x_3, x_4 ,

$$\therefore \frac{x_3 + x_4}{2} = 9,$$

$$\therefore x_3 + x_4 = 18,$$

∴ B_3 与 B_4 的横坐标和为 18,

同理, 将抛物线 C_2 向右平移 6 个单位得到抛物线 C_3 , 交 x 轴于点 A_2, A_3 ,

$$\therefore C_2: y = (x - 9 - 6)^2 - 9 = (x - 15)^2 - 9 \quad (12 \leq x \leq 18),$$

∴ 对称轴为直线 $x=15$,

设 B_5 和 B_6 的横坐标分别为 x_5, x_6 ,

$$\therefore \frac{x_5 + x_6}{2} = 15,$$

$$\therefore x_5 + x_6 = 30,$$

∴ B_5 与 B_6 的横坐标和为 30,

∴ 这 6 个点的横坐标之和 $6 + 18 + 30 = 54$,

故选: D .

二、填空题 (共 48 分, 每小题 4 分)

7. 如果 $a:b=2:3$, 那么代数式 $\frac{b-a}{a}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据比例的性质可得 $a = \frac{2}{3}b$, 则代入原代数式计算即可.

【详解】 由题意: $a = \frac{2}{3}b$,

$$\therefore \frac{b-a}{a} = \frac{b - \frac{2}{3}b}{\frac{2}{3}b} = \frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题主要考查比例的性质, 熟练根据比例的性质变形求解是解题关键.

8. 计算: $2(3\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{b} =$ _____.

【答案】 $6\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的运算, 先根据向量的数乘分配律去括号, 再合并同类向量.

【详解】 解: $2(3\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{b} = 6\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{b} = 6\vec{a} + \vec{b}$.

故答案为: $6\vec{a} + \vec{b}$.

9. 如果两个相似三角形的面积之比为 $16:9$, 那么它们的周长之比是_____.

【答案】 $4:3$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质, 相似三角形的面积比等于相似比的平方, 周长比等于相似比, 据此进行列式计算, 即可作答.

【详解】 解: 设两个相似三角形的相似比为 $k(k > 0)$,

则面积比为 k^2 ,

由题意, $k^2 = \frac{16}{9}$,

解得 $k = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$,

周长比等于相似比, 即它们的周长之比是 $4:3$,

故答案为: $4:3$.

10. 已知长方形的长是 x , 宽是长的一半, 面积是 y , 那么 y 关于 x 的解析式是_____. (不要求写定义域).

【答案】 $y = \frac{x^2}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了列二次函数的解析式, 根据长方形面积公式, 将宽表示为长的一半, 代入公式求解.

【详解】 解: $\because$ 长方形的长是 x , 宽是长的一半,

因此宽为 $\frac{x}{2}$. 长方形的面积 y 等于长乘以宽,

$$\text{即 } y = x \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{故答案为 } y = \frac{x^2}{2}.$$

11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $\angle B$ 的余弦值是 $\frac{3}{4}$, 那么 AB 的长是_____.

【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查了已知角的余弦值求边长. 根据余弦定义, 在直角三角形中, 锐角的余弦值等于邻边与斜边的比, 即 $\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$, 再把 $BC = 12$ 代入计算, 即可作答.

【详解】 解: $\because \angle B$ 的余弦值是 $\frac{3}{4}$, $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4},$$

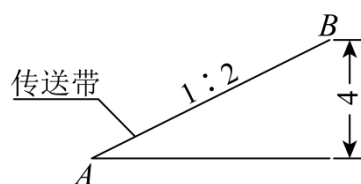
$$\therefore BC = 12,$$

$$\therefore \frac{12}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } AB = 16,$$

故答案为: 16.

12. 如图, 传送带和地面所成斜坡的坡度为 $1:2$, 它把物体从地面送到离地面 4 米高的地方, 那么物体所经过的路程是_____米 (结果保留根号).



【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查坡度问题, 勾股定理, 掌握相关知识是解决问题的关键. 根据坡度为 $1:2$, 得 $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{2}$, 可求得 AH , 进而用勾股定理求出 AB .

【详解】 解: 作 $BH \perp AH$,

$$\because \text{坡度为 } 1:2,$$

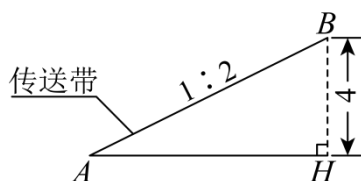
$$\therefore \frac{BH}{AH} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{4}{AH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AH = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

故答案为: $4\sqrt{5}$.



13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的黄金分割点, 且 $AD > DB$, $AE > EC$, $BC = 2$, 那么 DE 的长是_____ (结果保留根号).

【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了黄金分割, 相似三角形的判定和性质, 由黄金分割的定义可得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, 进而可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 再根据相似三角形的性质即可求解, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 点 D 是 AB 的黄金分割点, 且 $AD > DB$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{同理可得 } \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\text{又 } \because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB},$$

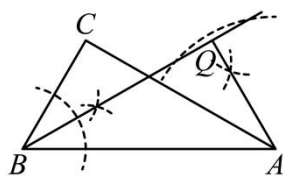
$$\text{即 } \frac{DE}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{5}-1,$$

故答案为: $\sqrt{5}-1$.

14. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 12$, 结合尺规作图痕迹所提供的信息可求出 AQ 的长

是_____.



【答案】6

【解析】

【分析】本题考查角平分线和垂线的尺规作图，含 30° 的直角三角形的性质，掌握相关知识是解决问题的关键. 根据作图痕迹可知， BQ 平分 $\angle ABC$ ， $AQ \perp BQ$ ，因为 $\angle ABC = 60^\circ$ ，则 $\angle ABQ = 30^\circ$ ，利用含 30° 的直角三角形的性质即可求 AQ .

【详解】解：根据作图痕迹可知， BQ 平分 $\angle ABC$ ， $AQ \perp BQ$ ，

$$\because \angle ABC = 60^\circ,$$

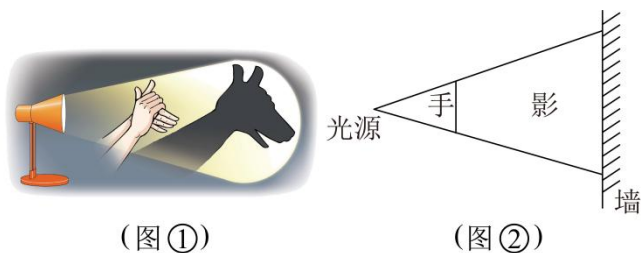
$$\therefore \angle ABQ = 30^\circ,$$

$$\because AB = 12,$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6.$$

故答案为：6.

15. 如图①中小狗手影是一种常见的游戏，它利用的原理是：光是沿直线传播的. 如图②我们把光源看成一个点，手面看成平行于墙面的一条线段. 在一次游戏中，手距离墙壁3米，光源与手的距离为1米. 在手的位置不变的情况下，如果光源与手的距离增加1米，那么小狗手影的高度变为原来的_____ (填“几分之几”).



(图①)

(图②)

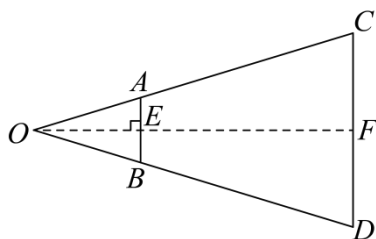
【答案】 $\frac{5}{8}$

【解析】

【分析】此题考查了相似三角形的应用举例，如图，证明 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$. 得 $\frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF} = \frac{1}{4}$ ，设 $AB = 3x$ ， $CD = 4x$ ，当光源与手的距离增加1米时，即 $OE' = 1 + 1 = 2$ (米)， $E'F' = 3$ 米，同理求出

$C'D' = \frac{5}{2}x$. 进而即可求出答案.

【详解】解：如图，



由题意可知 $AB \parallel CD$, $OE = 1$ 米, $EF = 3$ 米, 且 $OE \perp AB, OF \perp CD$,

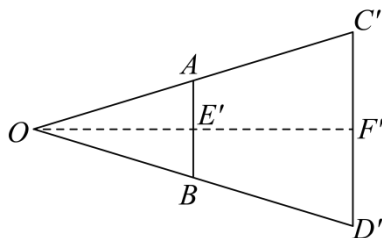
$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OCD$,

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF} = \frac{OE}{OE + EF} = \frac{1}{4},$$

设 $AB = x, CD = 4x$,

$\therefore$ 光源与手的距离增加 1 米, 即 $OE' = 1 + 1 = 2$ (米), $E'F' = 3$ 米,

如图,



同理, 得 $\triangle OAB \sim \triangle OC'D'$,

$$\therefore \frac{AB}{C'D'} = \frac{OE'}{OF'} = \frac{OE'}{OE' + E'F'} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5},$$

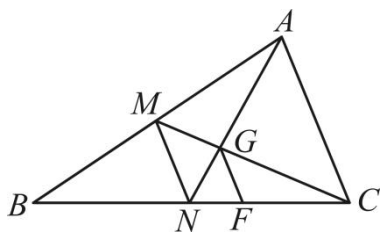
$$\therefore \frac{x}{C'D'} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore C'D' = \frac{5}{2}x,$$

$$\therefore \frac{C'D'}{CD} = \frac{\frac{5}{2}x}{4x} = \frac{5}{8},$$

故答案为: $\frac{5}{8}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点, 连接 AN 、 CM 交于点 G , $GF \parallel AC$ 交 BC 于点 F , 那么 $S_{\triangle NGF} : S_{\triangle GAC} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】根据中位线的性质，可知 $MN \parallel AC$ ，进而可知 $\triangle GNM \sim \triangle GAC$ ，根据线段关系可知相似比，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方，可知 $\frac{S_{\triangle NGF}}{S_{\triangle NAC}} = \frac{1}{9}$ ， $\frac{S_{\triangle GAC}}{S_{\triangle NAC}} = \frac{2}{3}$ ，进而可转化出答案.

本题考查了相似三角形的性质，掌握基本概念是解题关键.

【详解】解：在 ABC 中，

$\because$ 点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点，

$\therefore MN$ 是 ABC 的中位线，

则 $MN \parallel AC$ ， $MN = \frac{1}{2} AC$ ，

$\therefore \angle NMG = \angle ACG$ ， $\angle GNM = \angle CAG$ ，

$\therefore \triangle GNM \sim \triangle GAC$ ，

$\therefore \frac{MN}{AC} = \frac{MG}{CG} = \frac{NG}{AG} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore S_{\triangle GAC} : S_{\triangle GNM} = 4 : 1$ ，

$\therefore S_{\triangle GNM} : S_{\triangle GNC} = MG : GC = 1 : 2$

$\because GF \parallel AC$ ，

$\therefore \angle NGF = \angle NAC$ ，

$\therefore \triangle NGF \sim \triangle NAC$ ，

$\therefore NG : AG = 1 : 2$ ，

$\therefore GN : AN = 1 : 3$ ，

$\therefore \frac{S_{\triangle NGF}}{S_{\triangle NAC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

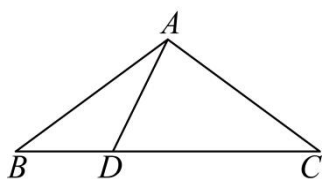
在 $\triangle NAC$ 中， $\triangle GAC$ 和 $\triangle NAC$ 等高，

$$\therefore \frac{S_{\triangle GAC}}{S_{\triangle NAC}} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle NFG}}{S_{\triangle GAC}} = \frac{\frac{1}{9}S_{\triangle NAC}}{\frac{2}{3}S_{\triangle NAC}} = \frac{1}{6},$$

故答案为：1:6.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AC = 10$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$ ，点 D 是边 BC 上的一点，连接 AD ，如果 $\angle ADB = 90^\circ + \angle BAD$ ，那么 $AD =$ _____.

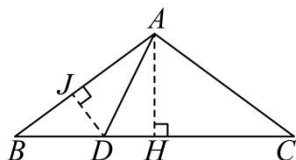


【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】如图，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 D 作 $DJ \perp AB$ 于点 J ．解直角三角形求出 BH ， AH ，再利用勾股定理求出 DH 后，进一步利用勾股定理求出 AD 即可．

【详解】解：如图，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 D 作 $DJ \perp AB$ 于点 J ．



$$\because AB = AC = 10, \quad AH \perp BC,$$

$$\therefore BH = CH,$$

$$\because \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BH = CH = 8,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\because \angle ADB = 90^\circ + \angle BAD = 90^\circ + \angle DAH,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAH,$$

$$\because DJ \perp AB, \quad DH \perp AH,$$

$$\therefore DJ = DH,$$

$$\because \triangle ABH \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times AH \times BH = \frac{1}{2} \times AB \times DJ + \frac{1}{2} \times AH \times DH,$$

$$\therefore 6 \times 8 = DH \times (10 + 6),$$

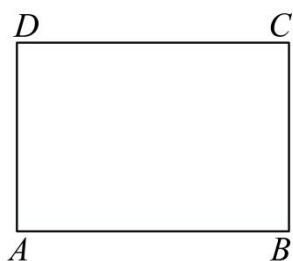
$$\therefore DH = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}.$$

故答案为: $3\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查解直角三角形，勾股定理，角平分线的性质，等腰三角形的性质，解题的关键是掌握相关知识解决问题.

18. 如图，矩形 $ABCD$ 中，连接 BD ，点 E 是 BC 的中点，过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 CD 于点 F ，将 $\triangle CEF$ 沿直线 EF 翻折，点 C 落在平面内点 G 处，如果点 G 恰在 AE 上，那么 $BG:AE$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

【解析】

【分析】连接 CG 交 EF 于点 M ，设 $CD = 2a$ ， $BC = 2b$ ， $BD = 2c$ ，根据平行线性质得 $\frac{CF}{DF} = \frac{CE}{BE} = 1$ ，得 $CF = DF = a$ ，根据矩形性质，得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ， $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4a^2 + b^2}$ ，由折叠性质，得 EF 垂直平分 CG ，证明点 G 在 BD 上，得 $\triangle ADG \sim \triangle EBG$ ，得 $\frac{AG}{EG} = \frac{DG}{BG} = \frac{AD}{BE} = 2$ ，可得 $AE = 3b$ ，得 $\sqrt{4a^2 + b^2} = 3b$ ，解得 $a = \sqrt{2}b$ ，得 $BD = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3}b$ ，又得 $BD = 3BG$ ，得

$$3BG = 2\sqrt{3}b, \text{ 得 } BG = \frac{2\sqrt{3}}{3}b, \text{ 即得 } \frac{BG}{AE} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}b}{3b} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

【详解】解：连接 CG 交 EF 于点 M ，
 设 $CD = 2a$ ， $BC = 2b$ ， $BD = 2c$ ，
 $\because$ 点 E 是 BC 的中点，
 $\therefore BE = CE = b$ ，

∴ 过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 CD 于点 F ,

$$\therefore \frac{CF}{DF} = \frac{CE}{BE} = 1,$$

$$\therefore CF = DF = a,$$

∴ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 2a$, $AD = BC = 2b$, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}, AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4a^2 + b^2},$$

由折叠知, EF 垂直平分 CG ,

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CM \cdot EF = \frac{1}{2} CF \cdot CE,$$

$$\therefore CM = \frac{ab}{c},$$

$$\therefore CG = 2CM = \frac{2ab}{c},$$

设 $\triangle BCD$ 的边 BD 上的高为 h ,

$$\text{则 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot h = \frac{1}{2} CD \cdot BC,$$

$$\therefore h = \frac{2ab}{c},$$

$$\therefore CG = h,$$

∴ 点 G 在 BD 上,

∵ $AD \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle EBG,$$

$$\therefore \frac{AG}{EG} = \frac{DG}{BG} = \frac{AD}{BE} = 2,$$

$$\therefore AG = 2EG = 2b,$$

$$\therefore AE = 3b,$$

$$\therefore \sqrt{4a^2 + b^2} = 3b,$$

$$\therefore 4a^2 + b^2 = 9b^2,$$

解得 $a = \sqrt{2}b$ ($b > 0$),

$$\therefore BD = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3}b,$$

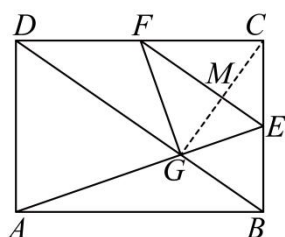
$$\therefore DG = 2BG,$$

$$\therefore BD = 3BG,$$

$$\therefore 3BG = 2\sqrt{3}b,$$

$$\therefore BG = \frac{2\sqrt{3}}{3}b,$$

$$\therefore \frac{BG}{AE} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}b}{3b} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$



【点睛】本题考查了矩形折叠. 熟练掌握矩形性质, 折叠性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 面积法求三角形的高, 是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 共 78 分) 如无特别说明, 本大题作答须写出证明或计算的主要步骤.

19. 计算: $\sin 45^\circ - 2\sin 60^\circ + \frac{2\cot 45^\circ}{\tan 60^\circ + 1}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

【解析】

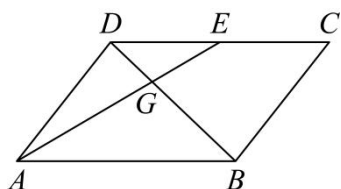
【分析】此题考查了特殊角的三角函数值的混合运算. 把特殊角的三角函数值代入, 利用二次根式的运算法则计算即可.

【详解】解: 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2 \times 1}{\sqrt{3} + 1}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

20. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 DC 的中点, AE 与对角线 BD 交于点 G , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}.$



(1) 填空：向量 $\overrightarrow{DB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，向量 $\overrightarrow{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(注：本题结果用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

(2) 作出向量 $\overrightarrow{DG}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量。

(注：画图不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的向量)

【答案】 (1) $\vec{a} - \vec{b}$ ， $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查平面向量、三角形中位线定理、平行四边形的性质、作图—复杂作图，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题。

(1) 由题意得 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$ 。由平行四边形的性质得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$ ， $AB \parallel CD$ ，可得 $\triangle ABG \sim \triangle EDG$ ，则 $\frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$ ， $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ 。由题意得 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，则可得 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 。

(2) 结合平面向量的分向量的定义作图即可。

【小问1详解】

解：∵ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，

∴ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$ ，

∵ 点 E 是边 DC 的中点，

∴ $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，

∵ 四边形 ABCD 为平行四边形，

∴ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$

∵ 点 E 是边 DC 的中点，

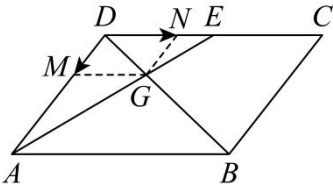
∴ $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ， $DE = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB$ ，

∴ $AB \parallel CD$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABG \sim \triangle EDG, \\ \therefore \frac{EG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}, \\ \therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}. \\ \therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b}, \\ \therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解： $\overrightarrow{DG}$ 在 $\vec{a}$ 上的分向量为 $\overrightarrow{DN}$ ， $\overrightarrow{DG}$ 在 $\vec{b}$ 上的分向量为 $\overrightarrow{DM}$



21. 人工智能已经逐渐融入我们的生活. 某餐厅为了跟上时代的步伐, 购买了一个送餐机器人, 这种机器人与地面的接触面积是可以调整的. 在水平地面上, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间存在的反比例函数关系 (数据如表一所示). 餐厅的地面由玻璃、木地板和大理石三种材质拼接而成. 地面材质与地面承受的最大压强的关系如表二所示.

表一：地面所受压强与接触面积之间的关系

地面所受 压强 $p(\text{Pa})$		4×10^4	6×10^4	8×10^4	1×10^5	
接触面积 $S(\text{m}^2)$		1.2×10^{-3}	8×10^{-4}	6×10^{-4}	4.8×10^{-4}	

表二：地面材质与地面承受的最大压强的关系

地面材质	玻璃	木地板	大理石
能承受的最大压强 $p \text{ (Pa)}$	4.8×10^7	2.4×10^7	2.5×10^8

(1) 求地面所受压强 $p(\text{Pa})$ 关于接触面积 $S(\text{m}^2)$ 的函数表达式 (不写定义域);

(2) 求该机器人与地面的接触面积至少为多少平方米?

【答案】 (1) $P = \frac{48}{S}$

(2) $2 \times 10^{-6} \text{m}^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了以物理知识为情境的反比例函数的应用相关知识, 知道物理学中压力、压强与接触面积三者之间的关系是解题的关键. 计算时需要仔细.

(1) 由表格的数据可知, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间成反比例函数的关系, 设地面所受压强 $p(\text{Pa})$ 关于接触面积 $S(\text{m}^2)$ 的函数表达式为 $p = \frac{F}{S}$, 将一对数据代入即可求出 F 的值.

(2) 为确保机器人在所有地面材质上都能安全行驶, 其压强不能超过三种材质能承受的最大压强的最小值, 即木地板的 $2.4 \times 10^7 \text{Pa}$. 当压强最大时, 接触面积最小. 把 $p = 2.4 \times 10^7$ 代入 (1) 中所求函数表达式中, 即可求出这种机器人与地面的最小接触面积.

【小问 1 详解】

解: 由表格的数据可知, 当机器人对地面的压力一定时, 地面所受压强与接触面积之间成反比例函数的关系.

设地面所受压强 $p(\text{Pa})$ 关于接触面积 $S(\text{m}^2)$ 的函数表达式为 $p = \frac{F}{S}$.

将 $(4 \times 10^4, 1.2 \times 10^{-3})$ 代入 $p = \frac{F}{S}$, 得 $F = 4 \times 10^4 \times 1.2 \times 10^{-3} = 48$,

$\therefore$ 地面所受压强 $p(\text{Pa})$ 关于接触面积 $S(\text{m}^2)$ 的函数表达式为 $p = \frac{48}{S}$.

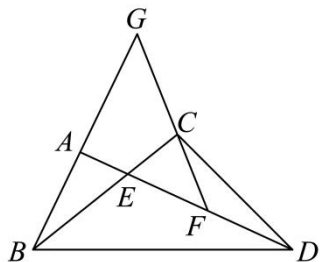
【小问 2 详解】

解: 为确保机器人在所有地面材质上都能安全行驶, 其压强不能超过三种材质能承受的最大压强的最小值, 即木地板的 $2.4 \times 10^7 \text{Pa}$. 当压强最大时, 接触面积最小. 把 $p = 2.4 \times 10^7$ 代入 $p = \frac{48}{S}$ 得,

$$S = \frac{48}{2.4 \times 10^7} = 2 \times 10^{-6},$$

答: 该机器人与地面的接触面积至少为 2×10^{-6} 平方米.

22. 如图, 线段 AD 、 BC 相交于点 E , 点 F 是线段 ED 的中点, 连接 AB 、 BD 、 CD , 分别延长 BA 、 FC 交于点 G . 已知 $\angle BAD = 90^\circ$, 且 $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$.



(1) 求证: $\angle ABE = \angle FCD$;

(2) 如果 DA 平分 $\angle BDC$, 求证: $\frac{BG}{BD} = \frac{BC}{2CF}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定与性质, 直角三角形的性质, 等腰三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

(1) 根据已知易证 $\triangle AEB \sim \triangle CED$, $\angle ECD = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle ADC$, 由直角三角形的性质可得 $CF = DF$, 进而得到 $\angle ADC = \angle FCD$, 即可证明结论;

(2) 由题意得 $\angle ADC = \angle ADB$, 易证 $\angle ABE = \angle ADB$, 由直角三角形的性质可得 $DE = 2CF$, $FC = FE$, 推出 $\angle FEC = \angle FCE$, $\angle BED = \angle BCG$, 易证 $\triangle BED \sim \triangle GCB$, 即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$, $\angle AEB = \angle CED$,

$\therefore \triangle AEB \sim \triangle CED$,

$\therefore \angle ECD = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle ADC$,

又 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中, 点 F 为 ED 中点,

$\therefore CF = DF$,

$\therefore \angle ADC = \angle FCD$,

$\therefore \angle ABE = \angle FCD$;

【小问 2 详解】

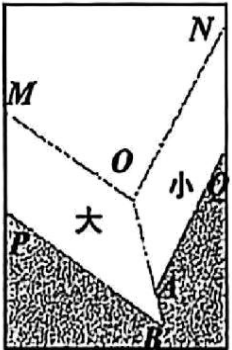
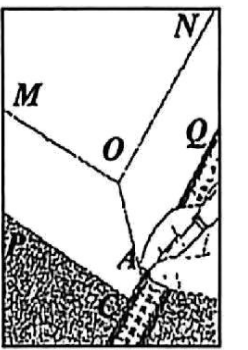
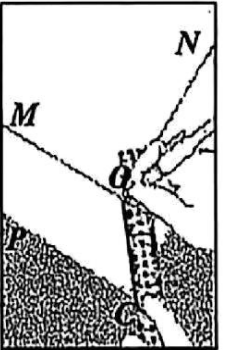
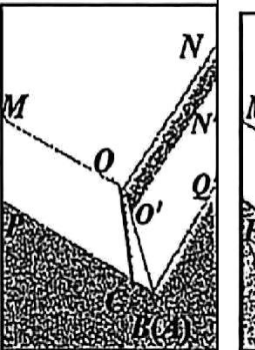
证明: $\because DA$ 平分 $\angle BDC$,

$\therefore \angle ADC = \angle ADB$,

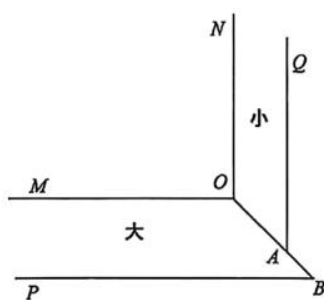
$\because \angle ABE = \angle FCD = \angle ADC$,
 $\therefore \angle ABE = \angle ADB$,
 又 $\because F$ 点是 DE 中点, $\angle ECD = 90^\circ$,
 $\therefore DE = 2CF$, $FC = FE$,
 $\therefore \angle FEC = \angle FCE$,
 $\therefore \angle FEC + \angle BED = \angle FCE + \angle BCG = 180^\circ$
 $\therefore \angle BED = \angle BCG$,
 $\therefore \triangle BED \sim \triangle GCB$,
 $\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{2CF}$.

23. 探究活动：巧拼地砖外边.

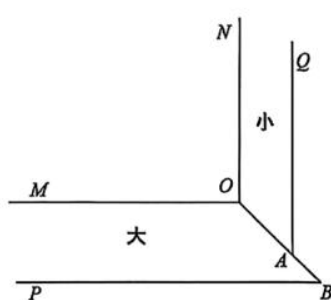
装修工人有一大一小两根条形边角料（大条形边角料 $MOBP$ 中 $MO \parallel PB$ ，小条形边角料 $NOAQ$ 中 $ON \parallel AQ$ ， $\angle MOB = \angle NOA = 135^\circ$ ），如图 1 拼接到直角地砖（ $\angle MON = 90^\circ$ ）的外边上，发现点 A 与点 B 不能重合. 为了尽可能节约用料，又能使两根条形边角料能拼成一个直角，工人师傅使用一把直尺、一支笔和一台切割机，经过图 2—图 9 的操作解决了问题，完成了拼接.

				
图 1	图 2	图 3	图 4	图 5
【操作说明】 将一大一小两根条形边角料拼在直角地砖的外边.	【操作说明】 画出 QA 的延长线, 交 BP 于点 C .	【操作说明】 连接 OC.	【操作说明】 沿着射线 OB 方向, 平移小条形边角料 $NOAQ$, 使点 A 与点 B 重合, 得到四边形	【操作说明】 画出 MO 的延长线, 交小条形边角料的边于 D.

			$O'N'Q'B$	
图 6	图 7	图 8	图 9	
【操作说明】 连接 BD .		【操作说明】 沿着 OC 、 BD 切割.	【操作说明】 拼接切割后的两根条形边角料.	



图①



图②

- (1) 请根据图 2-图 6 的操作说明，在图①中画出操作过程相应的图形，并按操作过程标注相应的字母；
- (2) 如果大条形边角料为 $MOBP$ 的宽度为 12cm ，小条形边角料为 $NOAQ$ 的宽度为 9cm ，大条形边角料 $MOBP$ 裁剪后的锐角是 $\angle OCP$ ，那么 $\tan\angle OCP = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 请根据上述探究，设计一个新裁剪方案，在图②中画出剪裁方法，并简单说明理由。

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{4}{3}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据提示的基本操作，按照顺序依次作图，标注好字母即可；

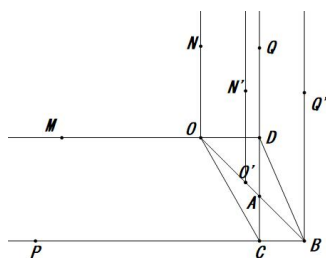
(2) 延长 NO ，交 BP 于点 T ，根据题意，得到 $\angle MON = 90^\circ$ ，结合 $MO \parallel PB$ ，得到 $TO \perp BP$ ，且 $TO = 12\text{cm}$ ，同理可证 $DO = 9\text{cm}$ ，再证明四边形 $ODCT$ 是矩形，得到 $CT = DO = 9\text{cm}$ ，根据 $\tan\angle OCP = \frac{OT}{TC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ ，解答即可。

(3) 延长 QA ，交 BP 于点 E ，连接 OE ，过点 A 作 $AF \parallel OE$ ，交 NO 于点 F ，利用平行四边形的判定和性质，三角形外角性质证明即可。

本题考查了基本作图，平移，矩形的判定和性质，平行四边形的判定和性质，正切函数的应用，三角形外角性质的应用，熟练掌握判定和性质，三角函数的应用是解题的关键。

【小问 1 详解】

解：根据提示的基本操作，按照顺序依次作图，标注字母画图如下：



则画图即为所求。

【小问 2 详解】

解：延长 NO ，交 BP 于点 T ，

根据题意， $\therefore \angle MOB = \angle NOA = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle MON = 90^\circ$ ，

$\therefore MO \parallel PB$ ，

$\therefore \angle PTO = \angle MON = 90^\circ$ ，

$\therefore TO \perp BP$ ，

$\therefore$ 大条形边角料为 $MOBP$ 的宽度为 12cm ，

$\therefore TO = 12\text{cm}$ ，

$\therefore ON \parallel AQ$ ，

$\therefore \angle QDO = \angle MON = 90^\circ$ ，

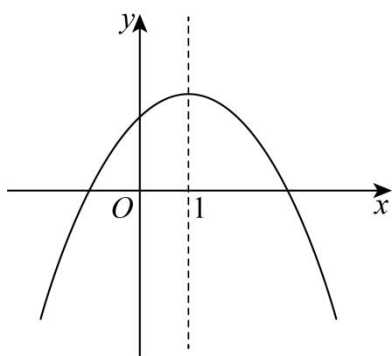
$\therefore DO \perp AQ$ ，

$\therefore$ 小条形边角料为 $NOAQ$ 的宽度为 9cm ，

$\therefore DO = 9\text{cm}$ ，

$\therefore \angle OTC = \angle QDO = \angle MON = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ODCT$ 是矩形，



(1) 求抛物线 C_1 的函数表达式及点 B 的坐标.

(2) 点 M 为抛物线 C_1 上的动点, 过点 M 作直线 $x = m$.

①当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分 (包含交点) 的最高点的纵坐标为 $2 - m$, 求 m 的值;

②当点 M 不在坐标轴上时, 直线 $x = m$ 交抛物线 $C_2: y = x^2 - 2x - 3$ 于点 P , 过点 P 作 y 轴垂线, 垂足为点 D , 在线段 PD 的延长线上截取 $DQ = 2PD$, 连接 MQ , 当抛物线 C_1 的顶点 B 在 $\triangle PQM$ 内部时, 直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$, $B(1, 2)$

(2) ① $m = 2 + \sqrt{3}$; ② $m > 1 + \sqrt{6}$ 或 $-3 < m < 1 - \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图像与性质, 求二次函数的解析式, 二次函数与几何综合, 掌握相关知识是解决问题的关键.

(1) 由对称轴可得 $b = 1$, 进而再将 $(5, -6)$ 代入求出 c 值即可求出抛物线解析式, 进而求出顶点坐标;

(2) ①当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分是 y 随 x 增大而减小, M 点即为最高点, 据此求解即可;

②分两种情况 $m \geq 1$ 或 $m < 1$ 分类讨论, 每种情况下当点 B 在线段 PQ 和 MQ 上时为临界点, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1,$$

$$\therefore b = 1,$$

∵ 抛物线 $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + c$ 经过点 $A(5, -6)$,

$$\therefore -\frac{25}{2} + 5 + c = -6,$$

$$\text{解得 } c = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2},$$

当 $x = 1$ 时, $y = 2$,

$$\therefore B(1, 2);$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: ①由题可知 } M\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2}\right),$$

当点 M 在对称轴右侧时, 抛物线在直线 $x = m$ 右侧部分是 y 随 x 增大而减小,

∴ M 点即为最高点,

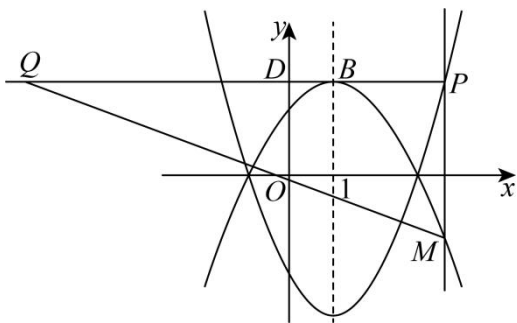
$$\text{此时 } -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} = 2 - m,$$

$$\text{解得 } m = 2 \pm \sqrt{3},$$

∴ M 在对称轴右侧, 即 $m > 1$,

$$\therefore m = 2 + \sqrt{3};$$

②当 $m \geq 1$, 如图,



找出临界值, 点 B 在 PQ 上时,

$$\text{由题可知 } P(m, m^2 - 2m - 3),$$

$$\therefore m^2 - 2m - 3 = 2,$$

$$\text{解得 } m = 1 + \sqrt{6} \text{ 或 } m = 1 - \sqrt{6} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore m > 1 + \sqrt{6};$$

点 B 在线段 MQ 上时,

由题意 $Q(-2m, m^2 - 2m - 3)$, $M\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2}\right)$

设直线 MQ 解析式为 $y = kx + p$, 代入 M, Q 坐标得:

$$\begin{cases} -2mx + p = m^2 - 2m - 3 \\ mx + p = -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = \frac{-m^2 + 2m + 3}{2m} \\ p = 0 \end{cases}$

$\therefore MQ$ 解析式为 $y = \frac{-m^2 + 2m + 3}{2m}x$,

点 B 在线段 MQ 上时, 代入 B 坐标得:

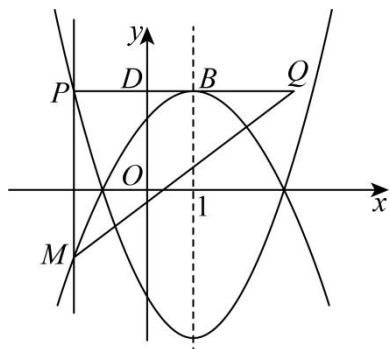
$$\frac{-m^2 + 2m + 3}{2m} = 2$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$m_1 = -3 \text{ (舍去)}, m_2 = 1,$$

综上 $m > 1 + \sqrt{6}$

当点 M 在点 B 左侧时, 即 $m < 1$, 如图,



同理可得 $m < 1 - \sqrt{6}$;

点 B 在线段 MQ 上时,

由题意 $Q(-2m, m^2 - 2m - 3)$, $M\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2}\right)$

设直线 MQ 解析式为 $y = kx + b$, 代入 M, Q 坐标得:

$$\begin{cases} -2mx + b = m^2 - 2m - 3 \\ mx + b = -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = \frac{-m^2 + 2m + 3}{2m} \\ b = 0 \end{cases}$

$\therefore MQ$ 解析式为 $y = \frac{-m^2 + 2m + 3}{2m}x$,

点 B 在线段 MQ 上时, 代入 B 坐标得:

$$\frac{-m^2 + 2m + 3}{2m} = 2$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$m_1 = -3, m_2 = 1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore -3 < m < 1 - \sqrt{6}$$

综上, $m > 1 + \sqrt{6}$ 或 $-3 < m < 1 - \sqrt{6}$.

25. 如图, 已知在 ABC 中, 点 D 是边 AC 上的一点.

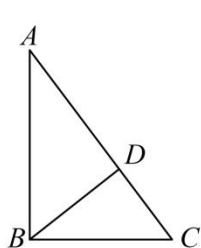


图1

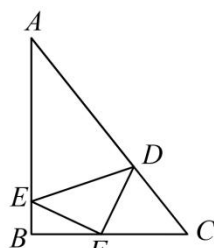


图2

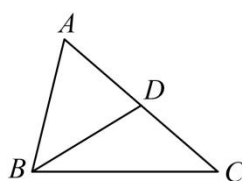


图3

(1) 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时.

①如图 1, BD 是边 AC 上的高, 求证: $BD^2 = AD \cdot CD$;

②如图 2, $AD = AE$, 点 F 在边 BC 上, 且 $CF = CD$, 顺次连接 DE 、 EF 、 FD . 如果

$EF = DF$, $\tan \angle EFB = \frac{1}{2}$, 求 $\cot C$ 的值.

(2) 如图 3, 如果点 D 是边 AC 的中点, $\angle ABD = \angle ACB$, 点 G 在线段 DB 延长线上, 且 $BG = BC$, 连接 CG , 取 CG 中点 H , 分别延长 HB 、 CA 交于点 O , 求 $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COH}}$ 的值.

【答案】(1) ①见解析; ② $\cot C = \frac{3}{4}$

$$(2) \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COH}} = 2 - \sqrt{2}$$

【解析】

【分析】(1) ①根据题意易证 $\angle A = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, 易证 $\triangle ADC \sim \triangle BDC$, 推出 $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$, 即可得出结论; ②如图, 分别过点 C, D 作 $CG \perp DF, DH \perp CF$, 由题意得

$\triangle AED, \triangle EFD, \triangle CDF$ 都是等腰三角形, 设

$\angle AED = \angle ADE = \alpha, \angle CDF = \angle CFD = \beta, \angle FED = \angle FDE = \gamma$, 证明 $\triangle BEF \cong \triangle HFD$ (AAS), 推出 $BE = FH, BF = DH$, 由 $\tan \angle EFB = \frac{1}{2}$, 设 $BE = x, BF = 2x$, 则 $BE = FH = x, BF = DH = 2x$, 求出 $EF = DF = \sqrt{FH^2 + DH^2} = \sqrt{5}x$, 再证明 $\triangle BEF \sim \triangle GFC$, 求出 $CF = \frac{5}{2}x$, 即可求解;

(2) 如图, 过点 A 作 $AM \perp OB$, 设 $\angle ABD = \angle ACB = \alpha, \angle ADB = \beta$, 证明 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, 推出 $\angle ADB = \angle ABC = \beta, \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, 利用三角形内角和定理结合等腰三角形的性质证明 $\angle O = \angle ABO$, 得到 $OA = AB$, 求出 $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$, 即 $AC = \sqrt{2}OA$, 证明 $\triangle OAM \sim \triangle OCH$, 推出

$$\frac{S_{\triangle OAM}}{S_{\triangle COH}} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \text{ 设 } S_{\triangle OAM} = a, \text{ 则 } S_{\triangle COH} = \frac{a}{3 - 2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})a, \text{ 再求出}$$

$$S_{\triangle OBD} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} S_{\triangle OAB} = (2 + \sqrt{2})a, \text{ 即可解答.}$$

【小问 1 详解】

①证明: $\because BD$ 是边 AC 上的高,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = \angle CBD + \angle C = 90^\circ,$$

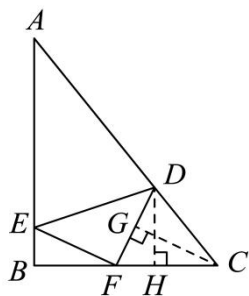
$$\therefore \angle A = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot CD;$$

②如图，分别过点 C, D 作 $CG \perp DF, DH \perp CF$ ，



$$\because AD = AE, CF = CD, EF = DF,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADE, \angle CDF = \angle CFD, \angle FED = \angle FDE, \triangle AED, \triangle EFD, \triangle CDF \text{ 都是等腰三角形},$$

$$\therefore DG = FG, \angle DCG = \angle FCG = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\text{设 } \angle AED = \angle ADE = \alpha, \angle CDF = \angle CFD = \beta, \angle FED = \angle FDE = \gamma,$$

$$\text{则 } \angle ACB = 180^\circ - 2\beta, \angle FEB = 180^\circ - \alpha - \gamma, \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle FEB = \beta = \angle CFD,$$

$$\text{在 } \triangle BEF \text{ 与 } \triangle HFD \text{ 中, } \begin{cases} \angle B = \angle DHF = 90^\circ \\ \angle BEF = \angle DFH \\ EF = DF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle HFD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = FH, BF = DH,$$

$$\because \tan \angle EFB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } BE = x, BF = 2x, \text{ 则 } BE = FH = x, BF = DH = 2x,$$

$$\therefore EF = DF = \sqrt{FH^2 + DH^2} = \sqrt{5}x,$$

$$\because \triangle CDF \text{ 是等腰三角形, } CG \perp DF,$$

$$\therefore FG = DG = \frac{1}{2}DF = \frac{\sqrt{5}}{2}x,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle CFG = \beta, \angle B = \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle GFC,$$

$$\therefore \frac{BE}{FG} = \frac{EF}{CF}, \text{ 即 } \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x} = \frac{\sqrt{5}x}{CF},$$

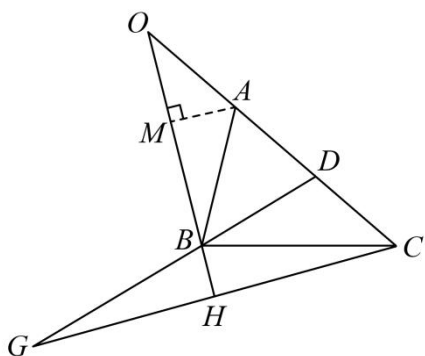
$$\therefore CF = \frac{5}{2}x,$$

$$\therefore CH = CF - FH = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore \cot C = \frac{CH}{DH} = \frac{\frac{3}{2}x}{2x} = \frac{3}{4};$$

【小问2详解】

解：如图，过点 A 作 $AM \perp OB$ ，



设 $\angle ABD = \angle ACB = \alpha$, $\angle ADB = \beta$,

$$\therefore \angle BAC = \angle BAC, \angle ABD = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABC = \beta, \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = \beta - \alpha,$$

$$\therefore BC = BG,$$

$$\therefore \angle G = \angle BCG,$$

$$\therefore \angle G + \angle BCG = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle G = \angle BCG = \frac{1}{2} \angle CBD = \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle ACH = \angle ACB + \angle BCG = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2},$$

$\because BC = BG$, 点 H 是 CG 的中点,

$\therefore BH \perp CG$, 即 $\angle BHC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CBH = 90^\circ - \angle BCG = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad \angle O = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - \frac{\beta + \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle ABO = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBH = 180^\circ - \beta - \left(90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta + \alpha}{2},$$

$\therefore \angle O = \angle ABO$,

$\therefore OA = AB$,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{AD}{OA},$$

$\because$ 点 D 是 AC 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{\frac{1}{2} AC}{OA},$$

$$\therefore OA^2 = \frac{1}{2} AC^2,$$

$$\therefore OA = \frac{\sqrt{2}}{2} AC, \text{ 即 } AC = \sqrt{2} OA,$$

$\because \angle OMA = \angle OHC = 90^\circ, \angle O = \angle O$,

$\therefore \triangle OAM \sim \triangle OCH$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OH},$$

$$\therefore \frac{OM}{OH} = \frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OA + AC} = \frac{OA}{OA + \sqrt{2}OA} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OAM}}{S_{\triangle COH}} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$\text{设 } S_{\triangle OAM} = a, \text{ 则 } S_{\triangle COH} = \frac{a}{3 - 2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})a,$$

$\because OA = AB, AM \perp OB$,

$$\therefore OB = 2OM ,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = 2a ,$$

$$\because OA = \frac{\sqrt{2}}{2} AC , \quad AD = \frac{1}{2} AC ,$$

$$\therefore OA = \sqrt{2} AD , \text{ 即 } AD = \frac{\sqrt{2}}{2} OA ,$$

$$\therefore OD = OA + AD = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} OA ,$$

$$\therefore S_{\triangle OBD} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} S_{\triangle OAB} = (2 + \sqrt{2}) a ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COH}} = \frac{(2 + \sqrt{2}) a}{(3 + 2\sqrt{2}) a} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = (2 + \sqrt{2}) \times (3 - 2\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} .$$

【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，解直角三角形，二次根式的运算，全等三角形的判定与性质，构造三角形相似是解题的关键.