

$$\therefore OB = 3, AB = 4,$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5},$$

故选：A.

【点评】此题考查直角三角形的边角关系、勾股定理，通过作辅助线构造直角三角形是解决问题的关键.

3. (4分) 如果两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，那么下列说法正确的是 ()

- A. $\vec{a} + 2\vec{b} = 0$ B. $\vec{a} - 2\vec{b} = 0$ C. $\vec{a} = 2\vec{b}$ D. $\vec{a} = -2\vec{b}$

【分析】由两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，判断出 $\vec{a} = -2\vec{b}$ 可得结论.

【解答】解： $\because$ 两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$,

$$\therefore \vec{a} = -2\vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}.$$

故选：D.

【点评】本题考查平面向量，解题的关键是掌握平面向量的有关性质.

4. (4分) 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x + 2$ 的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，如果 $x_1 < x_2 < 0$ ，那么 y_1 、 y_2 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 > y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 无法确定

【分析】根据二次函数图象上点的坐标特征解答即可.

【解答】解：二次函数 $y = -x^2 + 2x + 2$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x = 1$ ，

$x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$$\because x_1 < x_2 < 0,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故选：A.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握该知识点是关键.

5. (4分) 二次函数 $y = (a^2 + 1)x^2 - 3x + 1$ 的图象一定不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据二次函数图象与系数的关系解答即可.

【解答】解： $\because a^2 + 1 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上，

$$\because b = -3 < 0,$$

$\therefore$ 对称轴在 y 轴的右侧,

$$\because c = 1 > 0,$$

$\therefore$ 抛物线与 y 轴正半轴相交,

$\therefore$ 抛物线过一、二、四象限,

$\therefore$ 抛物线不经过第三象限.

故选: C.

【点评】 本题考查了二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的性质是关键.

6. (4 分) 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 下列说法正确的是 ()

A. 如果 $OA \cdot BD = OD \cdot AC$, 那么 $AB \parallel CD$

B. 如果 $OA \cdot OC = OD \cdot OB$, 那么 $AB \parallel CD$

C. 如果 $OA \cdot OB = OD \cdot OC$, 那么 $AB \parallel CD$

D. 如果 $OA \cdot OD = OB \cdot OC$, 那么 $AB \parallel CD$

【分析】 根据相似三角形的判定和性质判断即可.

【解答】 解: A. $\because OA \cdot BD = OD \cdot AC$,

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{AC}{BD},$$

则不能得到 $AB \parallel CD$, 故不符合题意;

B. $\because OA \cdot OC = OD \cdot OB$,

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC},$$

$$\because \angle AOB = \angle DOC,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC,$$

不能得到 $AB \parallel CD$, 故不符合题意;

C. $\because OA \cdot OB = OD \cdot OC$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB},$$

$$\because \angle AOD = \angle COB,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OCB,$$

$\therefore AD \parallel BC$, 故不符合题意;

D. $\because OA \cdot OD = OB \cdot OC$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD},$$

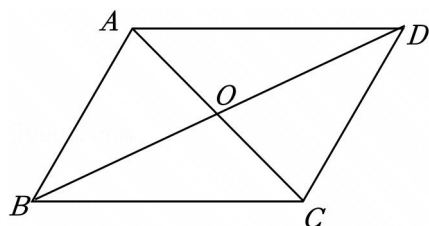
$$\because \angle AOB = \angle COD,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OCD,$$

$\therefore AB \parallel CD$, 故符合题意;

故选: D.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质定理是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{a-b}{a+b} = -\frac{1}{5}$.

【分析】 设 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} = \frac{3k}{2k}$, 得出 $a = 3k$, $b = 2k$, 再代入求出即可.

【解答】 解: 设 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} = \frac{3k}{2k}$,

则 $a = 3k$, $b = 2k$,

代入得: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{3k-2k}{3k+2k} = \frac{1}{5}$,

故答案为: $\frac{1}{5}$.

【点评】 本题考查了比例的性质, 能选择适当的方法求解是解此题的关键.

8. (4 分) 已知线段 $a = 3$, $b = 6$, 线段 c 是线段 a 、 b 的比例中项, 那么线段 c 的长是 $3\sqrt{2}$.

【分析】 根据线段比例中项的概念, 得出 $a : c = c : b$, 则 $c^2 = ab$, 即可得到答案.

【解答】 解: $\because$ 线段 c 是线段 a , b 的比例中项,

$$\therefore c^2 = ab = 3 \times 6 = 18,$$

$$\text{解得 } c = \pm 3\sqrt{2},$$

$\because$ 线段的长是正数,

$$\therefore c = 3\sqrt{2}.$$

故答案为: $3\sqrt{2}$.

【点评】 本题考查了比例线段, 正确记忆如果 $a : b = b : c$, 那么 b 叫做 a , c 的比例中项是本题关键.

9. (4分) 计算: $2(\vec{a}-3\vec{b})+5\vec{b} = \underline{2\vec{a}-\vec{b}}$.

【分析】利用平面向量的加法法则计算即可.

【解答】解: 原式 $= 2\vec{a} - 6\vec{b} + 5\vec{b}$

$$= 2\vec{a} - \vec{b}.$$

故答案为: $2\vec{a} - \vec{b}$.

【点评】本题考查平面向量, 解题的关键是掌握平面向量的加法法则.

10. (4分) 已知抛物线 $y = (k+2)x^2 + 6x - 5$ 的开口向下, 那么 k 的取值范围是 $\underline{k < -2}$.

【分析】由二次函数图象与系数的关系可得.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y = (k+2)x^2 + 6x - 5$ 的开口向下,

$$\therefore k+2 < 0,$$

$$\therefore k < -2.$$

故答案为: $k < -2$.

【点评】本题主要考查了二次函数图象的开口方向和二次项系数 a 的关系, $a > 0$, 开口向上, $a < 0$, 开口向下. 然后解不等式就可.

11. (4分) 如果两个相似三角形的对应中线之比为 $2:3$, 那么它们的对应高之比为 $\underline{2:3}$.

【分析】根据相似三角形的性质进行判断即可.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的对应中线之比为 $2:3$,

$$\therefore \text{它们的对应高之比为 } 2:3,$$

故答案为: $2:3$.

【点评】本题考查了相似三角形的性质, 掌握相似三角形的性质是解题的关键.

12. (4分) 已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上, 如果 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, 那么 $\frac{AE}{EC}$ 的值为 $\underline{\frac{1}{2}}$ 时, $DE \parallel BC$.

【分析】根据相似三角形的判定和性质、平行线的判定解答即可.

【解答】解: $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ 时, $DE \parallel BC$.

理由如下: 如图:

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

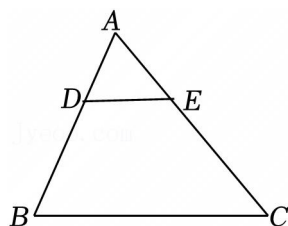
$$\therefore \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC,$$

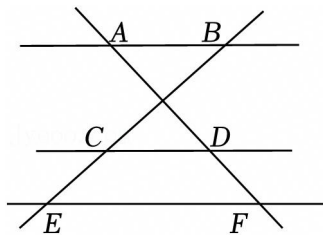
$$\therefore DE \parallel BC.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，解题的关键是掌握相似三角形的判定方法．

13. (4分) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $AD = 2$, $DF = 1.5$, $BC = 2.4$, 那么 BE 的长是 4.2.



【分析】 由直线 $AB \parallel CD \parallel EF$, 利用平行线分线段成比例, 即可求出 BE 的长.

【解答】 解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{BC}{BE},$$

$$\because AD = 2, DF = 1.5, BC = 2.4,$$

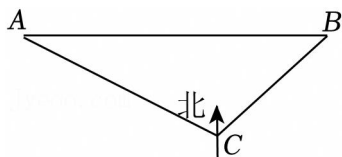
$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{2}{2+1.5} = \frac{BC}{BE} = \frac{2.4}{BE},$$

$$\therefore BE = 4.2,$$

故答案为: 4.2.

【点评】 本题考查了平行线分线段成比例, 正确记忆相关知识点是解题关键.

14. (4分) 如图, 点 A 位于点 C 的北偏西 60° 方向, 点 B 位于点 C 的东北方向, 线段 AB 为一条东西向的公路的一部分, 如果点 C 到公路 AB 的距离是 $100\sqrt{3}$ 米, 那么公路 AB 的长为 $(300+100\sqrt{3})$ 米. (结果保留根号)



【分析】过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，由题意得 $CD = 100\sqrt{3}m$ ， $\angle DCB = 45^\circ$ ， $\angle DCA = 60^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle DCB$ 和 $\text{Rt}\triangle DCA$ 中解直角三角形即可解答．

【解答】解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，

由题意得 $CD = 100\sqrt{3}m$ ， $\angle DCB = 45^\circ$ ， $\angle DCA = 60^\circ$ ，

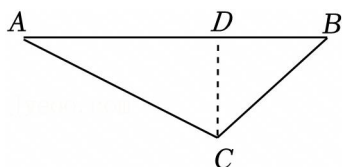
在 $\text{Rt}\triangle DCB$ 中， $AD = \tan \angle DCA \cdot CD = \sqrt{3} \times 100\sqrt{3} = 300 (m)$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DCA$ 中， $BD = \tan \angle DCB \cdot CD = 1 \times 100\sqrt{3} = 100\sqrt{3} (m)$ ，

$\therefore AB = AD + BD = 300 + 100\sqrt{3} (m)$ ，

即公路 AB 的长为 $(300 + 100\sqrt{3}) m$ ．

故答案为： $(300 + 100\sqrt{3})$ ．

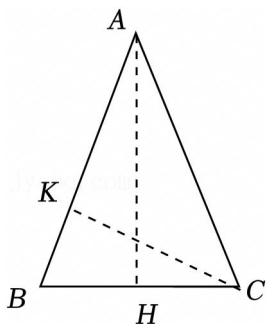


【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题，解题的关键是从实际问题中整理出直角三角形并利用解直角三角形的知识求解．

15. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 3$ ， $BC = 2$ ，那么 $\angle BAC$ 的正弦值等于 $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ．

【分析】如图，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 C 作 $CK \perp AB$ 于点 K ．利用勾股定理求出 AH ，再利用面积法求出 CK 可得结论．

【解答】解：如图，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 C 作 $CK \perp AB$ 于点 K ．



$\because AB = AC$ ， $AH \perp BC$ ，

$\therefore BH = CH = 1$ ，

$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，

$$\because CK \perp AB,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK,$$

$$\therefore CK = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

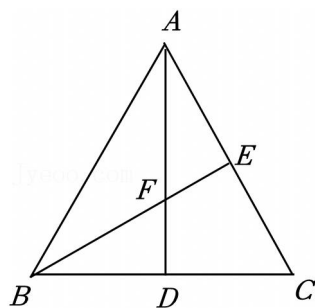
$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{CK}{AC} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

故答案为: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

【点评】 本题考查解直角三角形, 等腰三角形的性质, 解题的关键是学会利用面积法解决问题.

16. (4分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 高 AD 、 BE 相交于点 F , $\tan C = \frac{3}{2}$, $BD = CE = 6$, 那么 EF 的长为

$9 - 2\sqrt{13}$.



【分析】 由 $\triangle ABC$ 的高 AD 、 BE 相交于点 F , 得 $\angle BDF = \angle BEC = 90^\circ$, 则 $\angle BFD = \angle C = 90^\circ - \angle CBE$,

所以 $\frac{BD}{FD} = \tan \angle BFD = \tan C = \frac{BE}{CE} = \frac{3}{2}$, 求得 $FD = \frac{2}{3}BD = 4$, $BE = \frac{3}{2}CE = 9$, 所以 $BF = \sqrt{BD^2 + FD^2} =$

$2\sqrt{13}$, 则 $EF = 9 - 2\sqrt{13}$, 于是得到问题的答案.

【解答】 解: $\because \triangle ABC$ 的高 AD 、 BE 相交于点 F ,

$\therefore AD \perp BC$ 于点 D , $BE \perp AC$ 于点 E ,

$\therefore \angle BDF = \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFD = \angle C = 90^\circ - \angle CBE$,

$\because \tan C = \frac{3}{2}$, $BD = CE = 6$,

$\therefore \frac{BD}{FD} = \tan \angle BFD = \tan C = \frac{BE}{CE} = \frac{3}{2}$,

$\therefore FD = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \times 6 = 4$, $BE = \frac{3}{2}CE = \frac{3}{2} \times 6 = 9$,

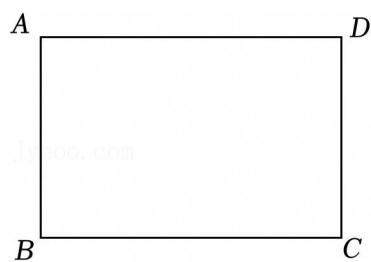
$\therefore BF = \sqrt{BD^2 + FD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$,

$\therefore EF = BE - BF = 9 - 2\sqrt{13}$,

故答案为: $9-2\sqrt{13}$.

【点评】 此题重点考查同角的余角相等、勾股定理、解直角三角形等知识, 正确地求出 BE 的长及 BF 的长是解题的关键.

17. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=6$. 点 E 在边 AD 上, 联结 BE , 将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 翻折, 点 A 的对应点是点 F , 联结 FD . 如果 $FD \parallel BE$, 那么点 F 到 CD 的距离为 $-\frac{54}{25}$.



【分析】 根据题意画出图形, 根据 $AD \parallel BC$, $AG = FG$, 得出 $AE = DE$, 再通过相等的角的三角函数值相等, 即可求出结果.

【解答】 解: 过点 F 作 $FP \perp CD$ 于点 P ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC = 6$,

$\because AG = FG$,

$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD = 3$,

$\therefore BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = 5$,

$\because FD \parallel BE$,

$\therefore \angle AFD = \angle AGE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAF = \angle ABE = \angle CDH$,

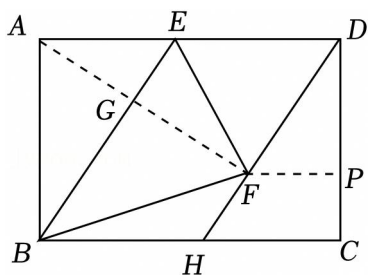
$\therefore \sin \angle DAF = \frac{DF}{AD} = \sin \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{3}{5}$,

$\therefore DF = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$,

$\because \sin \angle CDH = \frac{FP}{DF} = \frac{3}{5}$,

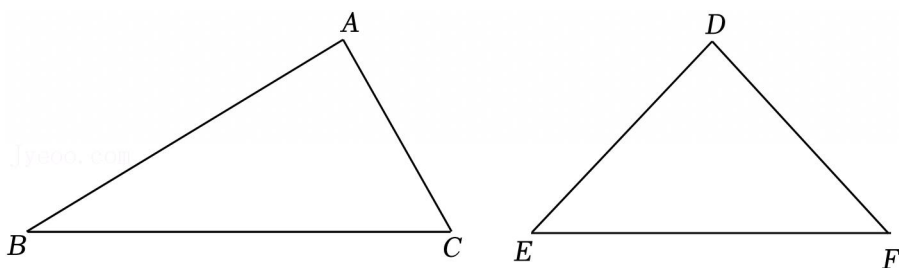
$\therefore FP = \frac{18}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{54}{25}$,

故答案为: $\frac{54}{25}$.



【点评】 本题考查了矩形的性质，翻折变换（折叠问题），掌握折叠的性质是解题的关键．

18. (4分) 如图，在一副三角尺中， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ， $AB = EF$ ，分别过点 A、点 D 画 AG、DH 交边 BC、边 EF 于点 G、点 H，如果 AG 分割 $\triangle ABC$ 得到的两个三角形与 DH 分割 $\triangle DEF$ 得到的两个三角形分别相似，那么 $\frac{AG}{DH}$ 的值为 1．



【分析】 设 $DE = DF = m$ ，则 $AB = EF = \sqrt{2}DE = \sqrt{2}m$ ，作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AG，作 $\angle EDH = 30^\circ$ ，DH 交 EF 于点 H，则 $\triangle ABE \sim \triangle EDH$ ， $\triangle ACG \sim \triangle FDH$ ，作 $GM \perp AB$ 于点 M， $HN \perp DE$ 于点 N，则 $AM = GM$ ， $EN = HN$ ，由 $BM = \sqrt{3}GM = \sqrt{3}AM$ ，得 $\sqrt{3}AM + AM = \sqrt{2}m$ ，则 $AM = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}m$ ，所以 $AG = \sqrt{2}AM = (\sqrt{3} - 1)m$ ，同理 $DN = \sqrt{3}HN = \sqrt{3}EN$ ，求得 $EN = HN = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}m$ ，则 $DH = 2HN = (\sqrt{3} - 1)m$ ，所以 $\frac{AG}{DH} = 1$ ，于是得到问题的答案．

【解答】 解： $\because \angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ， $AB = EF$ ，
 $\therefore \angle C = 60^\circ$ ， $\angle F = \angle E = 45^\circ$ ，
 $\therefore DE = DF$ ，
 设 $DE = DF = m$ ，则 $EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = \sqrt{2}DE = \sqrt{2}m$ ，
 $\therefore AB = EF = \sqrt{2}m$ ，
 作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AG，作 $\angle EDH = 30^\circ$ ，DH 交 EF 于点 H，
 $\therefore \angle BAG = \angle CAG = 45^\circ$ ， $\angle FDH = 60^\circ$ ，
 $\because \angle B = \angle EDH$ ， $\angle BAG = \angle E$ ， $\angle C = \angle FDH$ ， $\angle CAG = \angle C$ ，
 $\therefore \triangle ABE \sim \triangle EDH$ ， $\triangle ACG \sim \triangle FDH$ ，
 作 $GM \perp AB$ 于点 M， $HN \perp DE$ 于点 N，则 $\angle AMG = \angle BMG = \angle ENH = \angle DHH = 90^\circ$ ，

$$\because \angle MGA = \angle MAG = \angle NHE = \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore AM = GM, EN = HN,$$

$$\because BG = 2GM = 2AM,$$

$$\therefore BM = \sqrt{BG^2 - GM^2} = \sqrt{(2GM)^2 - GM^2} = \sqrt{3}GM = \sqrt{3}AM,$$

$$\therefore \sqrt{3}AM + AM = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}m,$$

$$\therefore AG = \sqrt{AM^2 + GM^2} = \sqrt{2}AM = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}m = (\sqrt{3} - 1)m,$$

$$\text{同理 } DN = \sqrt{3}HN = \sqrt{3}EN,$$

$$\therefore \sqrt{3}EN + EN = m,$$

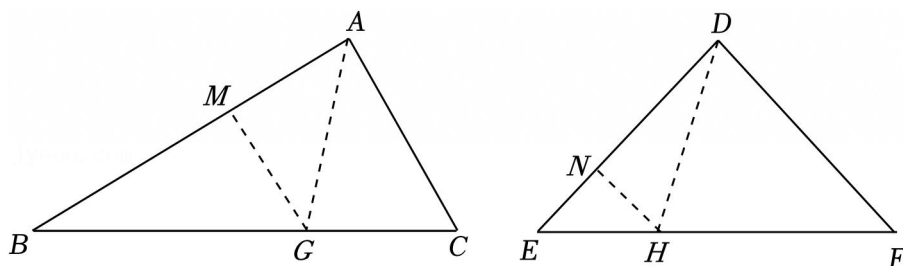
$$\therefore EN = HN = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}m,$$

$$\therefore DH = 2HN = 2 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2}m = (\sqrt{3} - 1)m,$$

$$\therefore AG = DH,$$

$$\therefore \frac{AG}{DH} = 1,$$

故答案为：1.



【点评】此题重点考查等腰直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识，正确地作出辅助线是解题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19. (10 分) 计算： $\frac{1}{6} \cot 30^\circ + \frac{\tan 30^\circ + \sin 60^\circ}{2 \cos^2 45^\circ}.$

【分析】把锐角三角函数值直接代入进行计算即可.

【解答】解：原式 = $\frac{1}{6} \times \sqrt{3} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

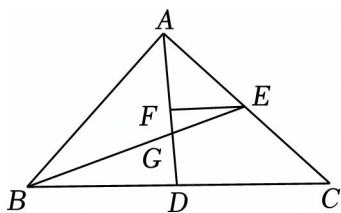
$$= \sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查特殊锐角三角函数值，掌握特殊锐角三角函数值以及实数的混合运算的方法是正确解答的关键。

20. (10分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 、 BE 交于点 G ， $EF \parallel BC$ 交 AD 于点 F 。

(1) 如果 $FG = 1$ ，求 GD 和 AF 的长；

(2) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ 。(用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【分析】 (1) 根据三角形的重心，得出比例式，即可求解；

(2) 先求出 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ ，即可得到 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ 。

【解答】 解：(1) $\because$ 中线 AD 、 BE 交于点 G ，

$\therefore$ 点 G 为重心，

$\because EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{FG}{GD} = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2},$$

$\because FG = 1$ ，

$\therefore GD = 2$ ， $DF = 3$ ，

$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{CE} = 1,$$

$\therefore AF = DF = 3$ ；

(2) $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\because EF \parallel BC, \quad EF = \frac{1}{4}CB,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}.$$

故答案为： $\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ 。

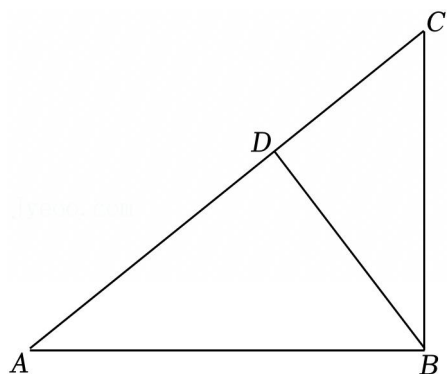
【点评】 本题考查了三角形的重心，平面向量，相似三角形的性质与判定，掌握三角形的重心是解题的

关键.

21. (10分) 如果一个锐角的正弦值等于黄金分割数, 那么我们称这个角叫做黄金角. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle A$ 是黄金角, 点 D 在边 AC 上, 且 $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC}$, 联结 BD .

(1) 找出图中相等的线段并说明理由;

(2) 如果 $AB = 6$, 求 BD 的长.



【分析】 (1) 根据所给“黄金角”的定义, 结合 $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC}$ 即可解决问题.

(2) 根据题意得出 $\triangle BCD \sim \triangle ACB$, 再结合相似三角形的性质即可解决问题.

【解答】 解: (1) $BC = AD$, 理由如下:

$\because \angle ABC = 90^\circ$, 且 $\angle A$ 是黄金角,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\text{又} \because \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC},$$

$\therefore$ 点 D 是线段 AC 的黄金分割点,

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore BC = AD.$$

(2) 由 (1) 知,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}.$$

又 $\because \angle C = \angle C$,

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AB}.$$

$$(2) \because \angle ADC = \angle ACB, \angle CAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB,$$

$$\because \triangle ACD \sim \triangle EAC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = BC \cdot CE,$$

$$\therefore AD \cdot AB = BC \cdot CE,$$

$$\because E \text{ 是 } BC \text{ 中点},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AD \cdot AB = \frac{1}{2}BC^2,$$

$$\therefore BC^2 = 2AD \cdot AB.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的性质与判定，掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键。

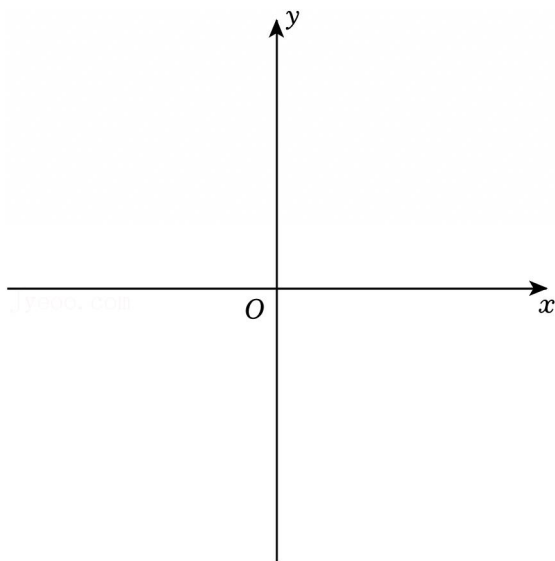
24. (12分) 如图，在直角坐标平面 xOy 内，以点 C 为顶点的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(4, 3)$ ，且与 y 轴交于点 B ，对称轴为直线 $x = 2$ 。

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 平移上述抛物线，所得的新抛物线的对称轴为直线 $x = t$ ，顶点为点 P 。

①联结 AB ，如果点 P 在 x 轴上且新抛物线与线段 AB 有公共点，求 t 的取值范围；

②设新抛物线与直线 $x = 2$ 交于点 D ，如果点 P 在原抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上，且在直线 $x = 2$ 的右侧， $\angle CPD = 2\angle CBO$ ，求点 P 的坐标。



【分析】（1）先由对称轴求出 b 的值，再把 A 点坐标代入解析式即可得到抛物线解析式；

（2）①新抛物线的解析式可设为 $y = (x - t)^2$ ，当 $y = (x - t)^2$ 的图象的对称轴右边图象过 B 点 $(0, 3)$ 时，有 $3 = (0 - t)^2$ ，解得： $t = -\sqrt{3}$ ；当 $y = (x - t)^2$ 的图象的对称轴左边图象过 A 点 $(4, 3)$ 时，有 $3 = (4 - t)^2$ ，解得： $t = 4 + \sqrt{3}$ ，从而可知 $-\sqrt{3} \leq t \leq 4 + \sqrt{3}$ ；

②如图 1 所示，作 $PE \perp CD$ ，设 $P(t, t^2 - 4t + 3)$ ，新抛物线可设为 $y = (x - t)^2 + t^2 - 4t + 3$ ，故 $D(2, 2t^2 - 8t + 7)$ ，证明 $DE = CE$ ，再利用三线合一性质说明 $\angle DPC = 2\angle CPE$ ，当 $\angle CPE = \angle CBO$ 时，即 $\tan \angle CPE = \tan \angle CBO$ 时，满足题意，至此完成二倍角的转换，最后根据 $\tan \angle CPE = \tan \angle CBO = \frac{CE}{PE} = \frac{(t-2)^2}{t-2} = t-2 = \frac{1}{2}$ ，解出 t 的值即可得解。

【解答】解：（1） $\because$ 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -2$ ，

$$\therefore b = -4, y = x^2 - 4x + c,$$

把 $A(4, 3)$ 代入 $y = x^2 - 4x + c$ ，可得 $c = 3$ ，

$$\therefore \text{抛物线表达式为 } y = x^2 - 4x + 3.$$

$$(2) \because \text{抛物线表达式为 } y = x^2 - 4x + 3,$$

故 $B(0, 3), C(2, -1)$ 。

①当点 P 在 x 轴上时，新抛物线的解析式可设为 $y = (x - t)^2$ ，

当 $y = (x - t)^2$ 的图象的对称轴右边图象过 B 点 $(0, 3)$ 时，有 $3 = (0 - t)^2$ ，

$$\text{解得： } t_1 = -\sqrt{3}, t_2 = \sqrt{3} \text{ (舍去)};$$

当 $y = (x - t)^2$ 的图象的对称轴左边图象过 A 点 $(4, 3)$ 时，有 $3 = (4 - t)^2$ ，

$$\text{解得： } t_1 = 4 + \sqrt{3}, t_2 = 4 - \sqrt{3} \text{ (舍去)}.$$

故 t 的取值范围为 $-\sqrt{3} \leq t \leq 4+\sqrt{3}$;

②如图 1 所示, 作 $PE \perp CD$,

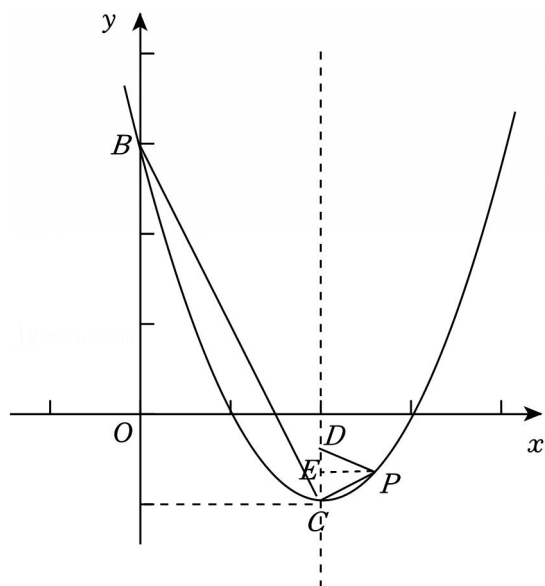


图1

设 $P(t, t^2 - 4t + 3)$, 且点 P 为新抛物线顶点, 新抛物线的对称轴为直线 $x = t$,

则新抛物线可设为 $y = (x - t)^2 + t^2 - 4t + 3$, 又 D 点横坐标为 2,

则 $y_D = 2t^2 - 8t + 7$, 故 $D(2, 2t^2 - 8t + 7)$,

$$\therefore DE = y_D - y_P = 2t^2 - 8t + 7 - t^2 + 4t - 3 = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2,$$

$$CE = y_P - y_C = (t - 2)^2,$$

$\therefore DE = CE$, 从而知 PE 为 DC 中垂线,

$\therefore DP = CP$, 由三线合一性质可得: $\angle DPC = 2\angle CPE$,

$\therefore$ 当 $\angle CPE = \angle CBO$ 时, 即 $\tan \angle CPE = \tan \angle CBO$ 时, 满足题意.

$$\text{故 } \tan \angle CPE = \tan \angle CBO = \frac{CE}{PE} = \frac{(t-2)^2}{t-2} = t-2,$$

$$\because \tan \angle CBO = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } t-2 = \frac{1}{2}, \text{ 故 } t = \frac{5}{2},$$

$$\text{故 } P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right).$$

【点评】 本题以二次函数为背景考查了待定系数法, 二次函数的图象性质, 函数图象的平移, 二次函数与线段的公共点问题, 二倍角构造问题, 熟练掌握以上内容是解题关键.

25. (14 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 、 BC 上, 且 $\angle ADE = \angle BDF$, 联结 EF .

(1) 如图 1, 如果 $BD = \frac{4}{7}AB$, $DE \perp EF$, 求 $\angle EDF$ 的余切值;

(2) 如图 2, 联结 CD 交 EF 于点 G , 如果 $\frac{AE}{BF} = \frac{2EG}{3GF}$, 求 $\frac{EC}{FC}$ 的值;

(3) 如果 $AE = 2$, $EC = 1$, $\angle CEF = \angle AED$, $\triangle ADE$ 与 $\triangle EFC$ 相似, 求 AD 的长.

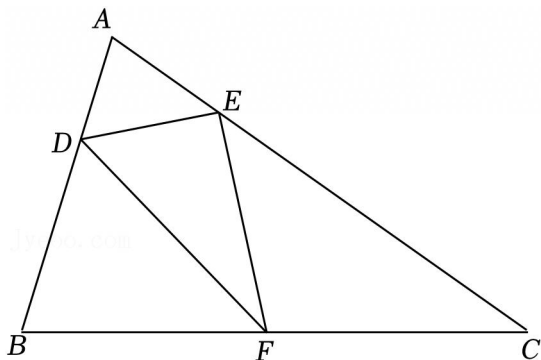


图1

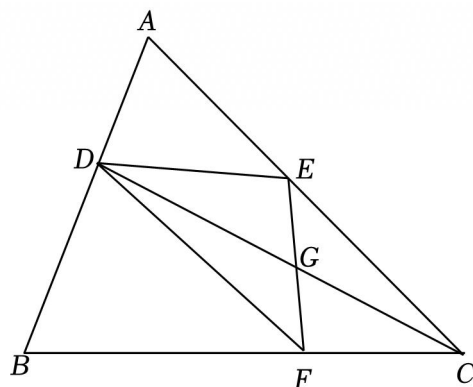


图2

【分析】解: (1) 先证明 $\triangle DAE \sim \triangle DBF$, 得出 $\cos \angle EDF = \frac{3}{4}$, 即可得到 $\cot \angle EDF = \frac{DE}{EF} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{7}$;

(2) 过点 E 作 $EM \parallel AB$ 交 CD 于 M , 过点 F 作 $FN \parallel AB$ 交 CD 于 N , 得到 $\frac{EG}{FG} = \frac{EM}{FN}$, $\frac{EM}{AD} = \frac{EC}{AC}$, $\frac{FN}{BD} = \frac{FC}{BC}$,

由此得出 $\frac{EG}{FG} = \frac{EM}{FN} = \frac{\frac{AD \cdot CE}{AC}}{\frac{BD \cdot CF}{BC}} = \frac{AD \cdot CE}{BD \cdot CF} = \frac{AE \cdot CE}{BF \cdot CF}$, 再根据 $\frac{AE}{BF} = \frac{2EG}{3GF}$, 得出 $\frac{EG}{FG} = \frac{AE \cdot CE}{BF \cdot CF} = \frac{2EG}{3GF} \cdot \frac{CE}{CF}$, 得到

$$\frac{CE}{CF} = \frac{3}{2};$$

(3) 由题意得, $\triangle DAE \sim \triangle DBF \sim \triangle EFC$, 需分类讨论, ①当 $\angle EFC = \angle B$ 时, ②当 $\angle ECF = \angle B$ 时, 两种情况进行讨论.

【解答】解: (1) $\because AC = BC$,

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BDF,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle DBF,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{DA}{DB} = \frac{3}{4},$$

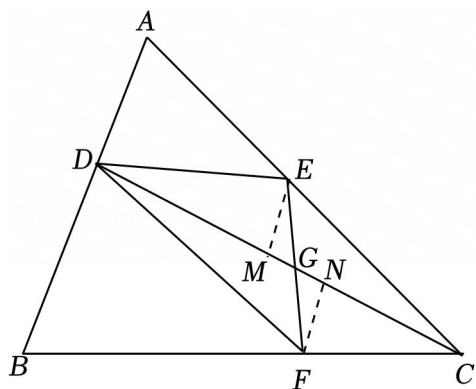
$$\therefore \cos \angle EDF = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \cot \angle EDF = \frac{DE}{EF} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{7};$$

(2) 过点 E 作 $EM \parallel AB$ 交 CD 于 M , 过点 F 作 $FN \parallel AB$ 交 CD 于 N ,



使用手机淘宝扫一扫



$$\therefore \frac{EG}{FG} = \frac{EM}{FN}, \frac{EM}{AD} = \frac{EC}{AC}, \frac{FN}{BD} = \frac{FC}{BC},$$

$$\therefore \frac{EG}{FG} = \frac{EM}{FN} = \frac{\frac{AD \cdot CE}{AC}}{\frac{BD \cdot CF}{BC}} = \frac{AD \cdot CE}{BD \cdot CF} = \frac{AE \cdot CE}{BF \cdot CF},$$

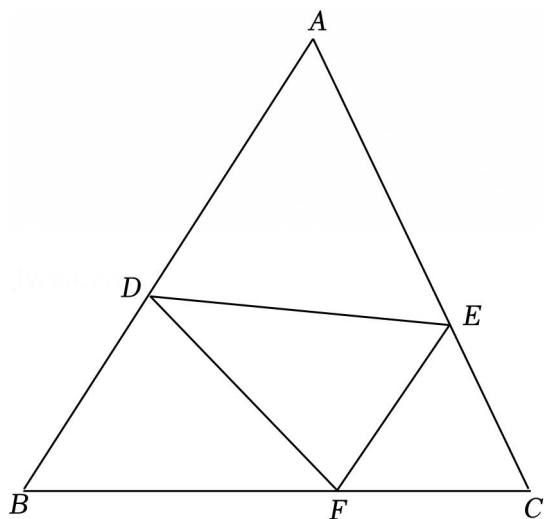
$$\therefore \frac{AE}{BF} = \frac{2EG}{3GF},$$

$$\therefore \frac{EG}{FG} = \frac{AE \cdot CE}{BF \cdot CF} = \frac{2EG}{3FG} \cdot \frac{CE}{CF},$$

$$\therefore \frac{CE}{CF} = \frac{3}{2};$$

(3) 由题意得, $\triangle DAE \sim \triangle DBF \sim \triangle EFC$, 需分类讨论,

①当 $\angle EFC = \angle B$ 时, 易得 $\triangle ADE \sim \triangle DBF$, $\triangle DBF \cong \triangle ACB$, 即 $AD = DB$,

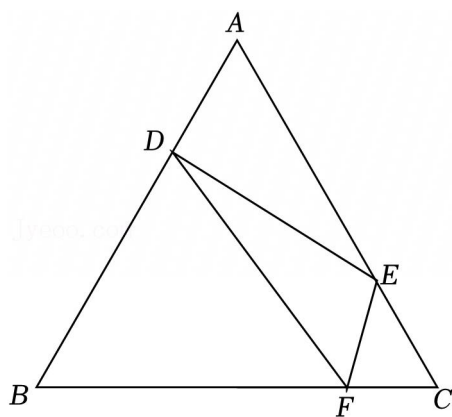


设 $AD = x$,

$$\text{由 } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}, \text{ 得: } \frac{2x}{3} = \frac{2}{x},$$

$$\text{解得: } x = \sqrt{3};$$

②当 $\angle ECF = \angle B$ 时, $\triangle ABC$ 为等边三角形,



设 $AD = x$, 则 $BD = 3 - x$, $CF = \frac{1}{2}x$, $BF = 3 - \frac{1}{2}x$,

$$\therefore \frac{BD}{BF} = \frac{AD}{AE}, \text{ 即 } \frac{3-x}{3-\frac{1}{2}x} = \frac{x}{2},$$

解得 $x = 5 - \sqrt{13}$;

综上所述: $AD = \sqrt{3}$ 或 $5 - \sqrt{13}$.

【点评】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 等腰三角形的性质, 分类讨论等, 掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.