

2025-2026 学年第一学期初三数学教学质量调研试卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【每题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 现有甲、乙、丙三个矩形, 矩形甲的一组邻边长为 4 与 9, 矩形乙的一组邻边长为 3 与 2, 矩形丙的一组邻边长为 4.5 与 2, 那么三个矩形间相似关系判断正确的是 ().

- A. 甲、乙相似
B. 乙、丙相似
C. 丙、甲相似
D. 甲、乙、丙都不相似

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查相似多边形的判定, 掌握好相关知识是关键.

判断矩形相似需比较长宽比是否相等, 通过计算各矩形的长宽比进行判断.

【详解】解: 矩形甲的长宽比为 $\frac{9}{4}$, 矩形乙的长宽比为 $\frac{3}{2}$, 矩形丙的长宽比为 $\frac{4.5}{2} = \frac{9}{4}$,

$\therefore \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \neq \frac{3}{2}$, 且矩形各内角都是 90° ,

$\therefore$ 甲、丙相似, 和乙不相似.

故选: C.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别是 a 、 b 、 c , 那么下列等式中不正确的是 ()

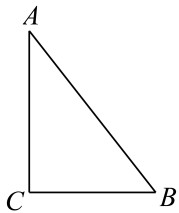
- A. $a = b \cdot \tan A$
B. $c = a \cdot \sin A$
C. $c = \frac{b}{\sin B}$
D. $b = \frac{a}{\cot B}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查锐角三角函数, 根据直角三角形中三角函数的定义, 逐一验证每个等式是否正确即可.

【详解】解：在 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别是 a 、 b 、 c ，如图，



$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b},$$

$\therefore a = b \tan A$ ，故选项 A 正确，不符合题意；

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\therefore c = \frac{a}{\sin A}, \text{ 故选项 B 错误，符合题意；}$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c},$$

$$\therefore c = \frac{b}{\sin B}, \text{ 故选项 C 正确，不符合题意；}$$

$$\therefore \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b},$$

$$\therefore b = \frac{a}{\cot B}, \text{ 故选项 D 正确，不符合题意；}$$

故选：B.

3. 宁宁同学在将某条抛物线表达式化为 $y = a(x+m)^2 + n$ 形式时，他给出的结果是 $y = (2x+4)^2 + 4$ ，那么这条抛物线的顶点坐标为 ()

A. $(-4, 4)$

B. $(-4, -4)$

C. $(-2, 4)$

D. $(-2, -4)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的顶点式，熟练掌握将非标准形式转化为标准顶点式 $y = a(x+m)^2 + n$ 并从中识别顶点坐标 $(-m, n)$ 是解题的关键.

先将给定的抛物线表达式转化为标准顶点式 $y = a(x+m)^2 + n$ ，再根据标准顶点式直接确定顶点坐标 $(-m, n)$.

【详解】解： $\because y = (2x+4)^2 + 4 = [2(x+2)]^2 + 4 = 4(x+2)^2 + 4$,

$\therefore$ 顶点形式为 $y = 4(x+2)^2 + 4$ ，对应 $m = 2, n = 4$ ，顶点坐标为 $(-2, 4)$ ，

故选：C.

4. 已知一个单位向量 $\vec{e}$ ，设 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是非零向量，那么下列等式中一定成立的是 ()

- A. $|\vec{e}|\vec{a} = \vec{a}$ B. $|\vec{b}|\vec{e} = \vec{b}$ C. $|\vec{a}| = |\vec{e}||\vec{b}|$ D. $|\vec{b}|\vec{a} = |\vec{a}|\vec{b}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查平面向量，根据平面向量的性质一一判断即可，熟练掌握知识点的应用解题的关键.

【详解】解： $\because \vec{e}$ 是单位向量，

$$\therefore |\vec{e}| = 1,$$

A、 $|\vec{e}|\vec{a} = \vec{a}$ ，该选项成立，符合题意；

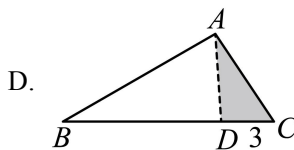
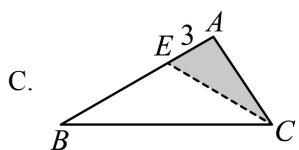
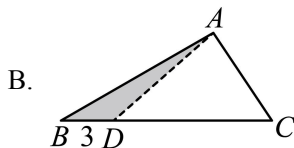
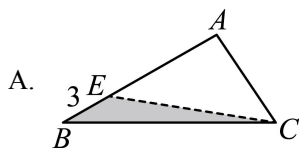
B、 $|\vec{b}|\vec{e}$ 与 $\vec{b}$ 的模长相等，但方向不一定相同，该选项不成立，不符合题意；

C $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{e}||\vec{b}| = |\vec{b}|$ ，但 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模长不一定相等，该选项不成立，不符合题意；

D、 $|\vec{b}|\vec{a}$ 与 $|\vec{a}|\vec{b}$ ，仅当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行时成立，否则不成立，该选项不成立，不符合题意；

故选：A.

5. 在三角形纸片 ABC 中， $AB = 10$ ， $BC = 12$ ， $AC = 6$ ，那么按图中数据沿虚线剪下的阴影部分三角形与 ABC 相似的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定，根据相似三角形的判定分别进行判断即可得出答案.

【详解】解：三角形纸片 ABC 中， $AB = 10$ ， $BC = 12$ ， $AC = 6$ ，

A、 $\frac{BE}{BC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ，对应边 $\frac{AB}{BC} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \neq \frac{1}{4}$ ，则沿虚线剪下的阴影部分的三角形与 ABC 不相似，故此选项错误；

B、 $\frac{BD}{AB} = \frac{3}{10}$ ，对应边 $\frac{AB}{BC} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \neq \frac{3}{10}$ ，则沿虚线剪下的阴影部分的三角形与 ABC 不相似，故此选

项错误;

C、 $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 对应边 $\frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$, 则沿虚线剪下的阴影部分的三角形与 ABC 不相似, 故此

选项错误;

D、 $\frac{CD}{CA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 对应边 $\frac{AC}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, 则沿虚线剪下的阴影部分的三角形与 ABC 相似, 故此选项正

确;

故选: D.

6. 已知 m 是常数, 它满足以下要求:

(1) 抛物线 $y = (m+1)x^2$ 的最高点就是它的顶点.

(2) 抛物线 $y = (x+m)^2 + m+1$ 的对称轴在 y 轴的右侧.

(3) 从左往右看, 抛物线 $y = (m+3)x^2 + 1$ 在 y 轴左侧部分是下降的.

那么常数 m 可以取的值是 ().

A. -3

B. -2

C. -1

D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象与性质, 熟练掌握相关知识是解题关键.

根据三个条件分别求 m 的取值范围: 条件 (1) 要求抛物线开口向下, 得 $m < -1$; 条件 (2) 要求对称轴在 y 轴右侧, 得 $m < 0$; 条件 (3) 要求抛物线在 y 轴左侧下降, 得 $m > -3$, 综合判断选项即可.

【详解】解: 对于 (1), 抛物线 $y = (m+1)x^2$ 的最高点就是它的顶点, 则图象开口向下,

$\therefore m+1 < 0$, 即 $m < -1$;

对于 (2), 抛物线 $y = (x+m)^2 + m+1$ 的对称轴为直线 $x = -m$,

$\therefore y = (x+m)^2 + m+1$ 的对称轴在 y 轴的右侧,

$\therefore -m > 0$, 即 $m < 0$;

对于 (3), 抛物线 $y = (m+3)x^2 + 1$ 在 y 轴左侧是下降的, 则图象开口向上,

$\therefore m+3 > 0$, 即 $m > -3$;

综上所述, $-3 < m < -1$, 选项中只有 -2 符合.

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 已知 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \neq 0$, 那么 $\frac{a+3b}{2b}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{11}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查比与比例的性质, 熟练掌握相关知识是关键.

利用比例关系设参数 k 来表示 a 和 b , 代入所求表达式化简即可.

【详解】 解: 设 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k (k \neq 0)$, 则 $a = 2k$, $b = 3k$,

$$\therefore \frac{a+3b}{2b} = \frac{2k+3 \times 3k}{2 \times 3k} = \frac{2k+9k}{6k} = \frac{11k}{6k} = \frac{11}{6}.$$

故答案为: $\frac{11}{6}$.

8. 计算: $\frac{3}{2}\vec{a} - 2\left(\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}\right) =$ _____.

【答案】 $\vec{a} + 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性运算, 先通过分配律去括号, 再合并同类项向量, 即可求解.

【详解】 原式 $= \frac{3}{2}\vec{a} - 2 \times \frac{1}{4}\vec{a} + 2 \times \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

故答案为 $\vec{a} + 3\vec{b}$.

9. 如果两个相似三角形的面积比为 0.25, 那么它们的周长之比为_____.

【答案】 1:2

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质, 根据相似三角形的性质, 面积比等于相似比的平方, 周长比等于相似比, 通过面积比求相似比, 再得周长比即可.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的面积比为 0.25, 即 $\frac{1}{4}$,

$$\therefore \text{相似比为 } \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{周长比为 } \frac{1}{2}, \text{ 即 } 1:2.$$

故答案为: 1:2.

10. 小宁同学在绘制《学校校园平面图》时, 经测量得知校园内 A 、 B 两点间距离为 150 米, 他考虑画一条 5 厘米的线段来表示, 那么小宁同学绘制的《学校校园平面图》的比例尺是_____.

【答案】

1:3000

【解析】

【分析】 本题考查比例尺，比例尺是图上距离与实际距离的比，需统一单位后计算即可.

【详解】 解：实际距离 150 米转换为 15000 厘米，图上距离为 5 厘米，
所以，比例尺为 $5:15000=1:3000$.

故答案为：1:3000.

11. 在下列给定的 y 关于 x 的函数中：① $y = \pi x^2 - 1$ ，② $y = ax^2 + bx + c$ ，③ $y = (\sqrt{3} - 1)^2 x + 1$ ，

④ $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ ，一定是二次函数的是_____。（填写序号）

【答案】

①

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的判断，根据二次函数的定义，形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函数是二次函数，需满足整式且 x 的最高次数为 2，据此解答即可.

【详解】 解：① $y = \pi x^2 - 1$ ，其中 $a = \pi \neq 0$ ，是二次函数；

② $y = ax^2 + bx + c$ ， a 可能为 0，不一定是二次函数；

③ $y = (\sqrt{3} - 1)^2 x + 1$ ，为一次函数，不是二次函数；

④ $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ ，是分式函数，不是二次函数.

故答案为：①.

12. 若将抛物线 $y = 2(x + m)^2 + 5$ 沿 x 轴向左平移 2 个单位后，所得抛物线的顶点恰好落在 y 轴上，那么 m 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数图象的平移以及配方法求二次函数顶点坐标等知识，利用平移的性质得出平移后解析式，进而得出其顶点坐标. 令其横坐标为 0 求解.

【详解】 解：原抛物线 $y = 2(x + m)^2 + 5$ 的顶点坐标为 $(-m, 5)$.

沿 x 轴向左平移 2 个单位后，新抛物线的解析式为 $y = 2(x + m + 2)^2 + 5$ ，顶点坐标为 $(-m - 2, 5)$.

因为顶点落在 y 轴上,

所以横坐标 $-m-2=0$,

解得 $m=-2$.

故答案为: -2 .

13. 若点 P 是线段 AB 上的一点, 满足 $AP^2 = BP \cdot AB$, 已知 $BP = \sqrt{5} - 1$, 那么 AB 的长为_____.

【答案】 $\sqrt{5}+1$

【解析】

【分析】 本题考查比例线段, 一元二次方程的求解, 熟练掌握相关知识是关键.

根据题意, 设 $AP=x$, 则 $AB = x + \sqrt{5} - 1$, 代入解方程即可.

【详解】 解: 设 $AP=x$, 则 $AB = x + \sqrt{5} - 1$,

$$\because AP^2 = BP \cdot AB,$$

$$\therefore x^2 = (\sqrt{5}-1)(x+\sqrt{5}-1),$$

$$\text{化简, 得 } x^2 - (\sqrt{5}-1)x - (\sqrt{5}-1)^2 = 0,$$

$$\text{解得, } x_1 = 2, \quad x_2 = \sqrt{5}-3 \text{ (负值舍去),}$$

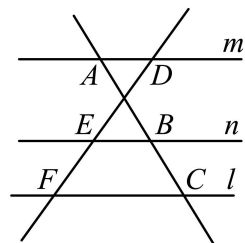
$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore AB = x + \sqrt{5} - 1 = 2 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} + 1.$$

故答案为: $\sqrt{5}+1$.

14. 如图, 两条直线被三条平行线 m 、 n 、 l 所截, 分别相交于点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F , 若 $AB = \frac{3}{2}BC$,

那么当 $EF = \frac{3}{2}$ 时, DF 的长为_____.



【答案】 $\frac{15}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例的定理, 找到对应线段的比是关键.

直接利用平行线分线段成比例定理得出 $\frac{EF}{DF} = \frac{BC}{AC}$ ，再将已知数据代入求出即可.

【详解】 $\because m \parallel n \parallel l$,

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{BC}{AC},$$

$$\text{又} \because \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2},$$

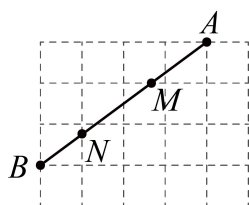
$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore EF = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{\frac{3}{2}}{DF} = \frac{2}{5}, \text{ 解得 } DF = \frac{15}{4}.$$

故答案为: $\frac{15}{4}$.

15. 如图, 在由大小相同的小正方形组成的网格图中, 连接格点 A 、 B 的线段交网格线于 M 、 N 两点, 那么 $AM: MN: BN =$ _____.

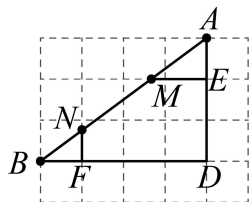


【答案】4:5:3

【解析】

【分析】本题主要考查相似三角形的判定与性质, 设小正方形的边长为 1, 根据勾股定理得 $AB = 5$, 分别证明 $\triangle AME \sim \triangle ABD$ 和 $\triangle BFN \sim \triangle BDA$, 可求出 AM , BN , MN , 从而可求出结论.

【详解】解: 如图,



设小正方形的边长为 1, 则 $AD = 3$, $BD = 4$,

根据勾股定理得 $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$\therefore ME \parallel BD$,

$\therefore \triangle AME \sim \triangle ABD$,

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AD}, \text{ 即 } \frac{AM}{5} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AM = \frac{5}{3};$$

$$\text{同理可得 } \triangle BFN \sim \triangle BDA, \text{ 则 } \frac{BN}{BA} = \frac{BF}{BD},$$

$$\text{得 } \frac{BN}{5} = \frac{1}{4},$$

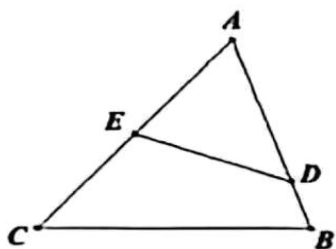
$$\therefore BN = \frac{5}{4},$$

$$\therefore MN = AB - AM - BN = 5 - \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{25}{12},$$

$$\therefore AM : MN : BN = \frac{5}{3} : \frac{25}{12} : \frac{5}{4} = 4 : 5 : 3.$$

故答案为: 4:5:3.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的点, 满足 $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{5}$, 若 E 为 AC 的中点, 且 $\angle ADE = 50^\circ$, 那么 $\frac{AB}{AC}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质, 根据三角形的内角和定理得到 $\angle C = 50^\circ$, 进而得到 $\angle ADE = \angle C$, 根据 $\angle A = \angle A$, 得到 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 列出比例式进行求解即可.

【详解】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$,

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ,$$

$$\because \angle ADE = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle C,$$

$$\text{又 } \because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB},$$

$$\therefore AD \cdot AB = AE \cdot AC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5}, \quad E \text{ 为 } AC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore AD = \frac{4}{5}AB, AE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \frac{4}{5}AB \cdot AB = \frac{1}{2}AC \cdot AC, \quad \text{即 } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore AB > 0, AC > 0,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4};$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{10}}{4}$$

17. 若抛物线 C_1 的顶点在抛物线 C_2 上, 而抛物线 C_2 的顶点又在抛物线 C_1 上 (两个顶点不重合), 那么称抛物线 C_1 和 C_2 互为“和谐抛物线”. 已知抛物线 $C: y = 2(x-1)^2 + 2$ 与 y 轴交于点 A , 点 B 与点 A 关于抛物线 C 的对称轴对称, 那么以点 B 为顶点的抛物线 C 的“和谐抛物线”的表达式为_____.

【答案】 $y = -2(x-2)^2 + 4$

【解析】

【分析】 本题考查新定义, 二次函数的图象与性质, 熟练掌握二次函数的图象与性质是解题关键.

先计算出点 A 的坐标, 由对称性计算出点 B 的坐标, 根据题意, 使用待定系数法求出符合要求的二次函数的表达式.

【详解】 解: 在抛物线 $C: y = 2(x-1)^2 + 2$ 中, 顶点坐标为 $(1, 2)$, 对称轴为直线 $x = 1$,

将 $x = 0$, 代入 $C: y = 2(x-1)^2 + 2$, 得 $y = 2 + 2 = 4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, 4)$,

$\therefore$ 点 B 与点 A 关于直线 $x = 1$ 对称,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 4)$,

设以点 B 为顶点的二次函数的表达式为 $y = a(x-2)^2 + 4 (a \neq 0)$,

将 $x = 1, y = 2$ 代入 $y = a(x-2)^2 + 4$, 得 $2 = a + 4$,

解得, $a = -2$,

$\therefore$ 以点 B 为顶点的抛物线 C 的“和谐抛物线”的表达式为 $y = -2(x-2)^2 + 4$.

故答案为: $y = -2(x-2)^2 + 4$.

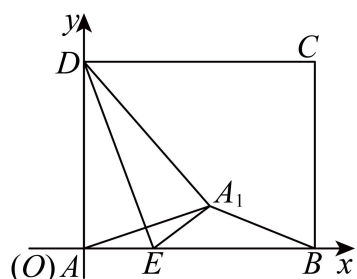
18. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 6$, $AD = BC = 5$, E 为射线 AB 上一点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 得到 $\triangle A_1DE$ (点 A 的对应点为 A_1). 联结 A_1A 、 A_1B , 当 $\triangle A_1AB$ 为等腰三角形时, AE 长是_____.

【答案】 $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{4}$, 6, 15

【解析】

【分析】以点 A 为原点建立平面直角坐标系, 设 $AE = x$, 利用翻折性质得到 $DA_1 = DA = 5$, $EA_1 = EA = x$; 分三种情况讨论 $\triangle A_1AB$ 为等腰三角形的条件, 分别求解 AE 的长度.

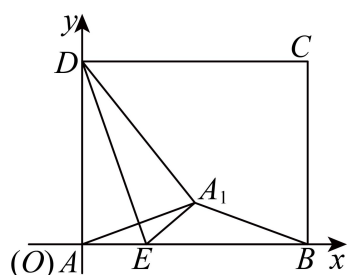
【详解】解: 以点 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 如图, 则 $A(0,0)$, $B(6,0)$, $D(0,5)$, 设 $E(x,0)$ ($x \geq 0$),



$\because \triangle ADE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle A_1DE$,

$\therefore DA_1 = DA = 5$, $EA_1 = EA = x$,

①如图, 当 $A_1A = A_1B$ 时, 则 A_1 在 AB 的垂直平分线 $x = 3$ 上,



$\therefore$ 设 $A_1(3, y)$,

$\because DA_1 = 5$, $D(0,5)$,

$\therefore 3^2 + (y-5)^2 = 5^2$,

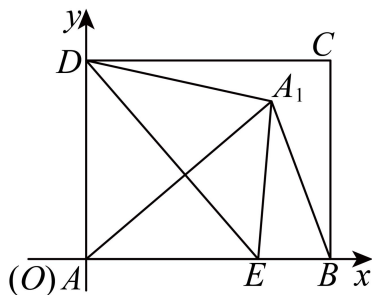
$\therefore y = 1$ 或 $y = 9$,

$$\because EA_1 = x,$$

$$\therefore 3^2 + y^2 = x^2$$

$$\therefore \text{当 } y=1 \text{ 时, } x=\frac{5}{3}; \text{ 当 } y=9 \text{ 时, } x=15;$$

②如图, 当 $A_1A = AB = 6$ 时,



设 $A_1(p, q)$

$$\because A_1A = 6 \text{ 且 } DA_1 = 5, \quad D(0, 5),$$

$$\therefore \begin{cases} p^2 + q^2 = 6^2 \\ p^2 + (q-5)^2 = 5^2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } p = 4.8, \quad q = 3.6,$$

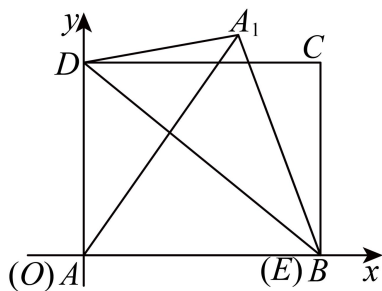
$$\therefore A_1(4.8, 3.6)$$

$$\because EA_1 = x, \quad E(x, 0),$$

$$\therefore (4.8 - x)^2 + 3.6^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{15}{4};$$

③如图, 当 $A_1B = AB = 6$ 时, 设 $A_1(p, q)$,



$$\because A_1B = 6 \text{ 且 } DA_1 = 5, \quad B(6, 0), \quad D(0, 5),$$

$$\therefore \begin{cases} (p-6)^2 + q^2 = 6^2 \\ p^2 + (q-5)^2 = 5^2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } p = \frac{300}{61}, \quad q = \frac{360}{61},$$

$$\therefore A_1 \left(\frac{300}{61}, \frac{360}{61} \right),$$

$$\therefore EA_1 = x,$$

$$\therefore \left(\frac{300}{61} - x \right)^2 + \left(\frac{360}{61} \right)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = 6,$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{3}, \frac{15}{4}, 6, 15.$$

【点睛】 本题主要考查了矩形的性质、翻折的性质、等腰三角形的判定与性质、平面直角坐标系的应用及勾股定理，熟练掌握翻折的性质并分情况讨论等腰三角形的存在性是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 写在答题纸的相应位置上】

$$19. \text{ 计算: } \frac{\sin 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}} + \tan 60^\circ - \frac{1}{\cot 30^\circ + 2\cos 45^\circ}.$$

$$\text{【答案】 } 2 + \sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了含特殊角的三角函数值的混合运算，解题的关键是熟记特殊角的三角函数值.

分别代入特殊角的三角函数值，再进行二次根式的混合运算即可.

$$\text{【详解】 解: } \frac{\sin 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}} + \tan 60^\circ - \frac{1}{\cot 30^\circ + 2\cos 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

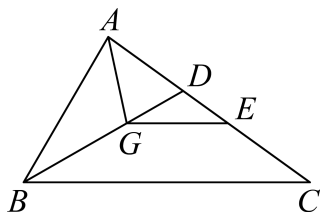
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= 2 + \sqrt{2}.$$

20. 如图, 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 连接 BG 并延长交边 AC 于点 D , 连接 AG , 过点 G 作 $GE \parallel BC$ 交边 AC 于点 E .



(1) 如果设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BG}$.

(2) 当 $AG \perp BD$, $BG = 9$, $\angle GAD = 30^\circ$ 时, 求 $\triangle DGE$ 的面积.

【答案】(1) $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

(2) $\frac{27}{8}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查平面向量, 三角形的重心, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

(1) 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BD}$, 再根据 $BG = 2DG$, 即可解决问题.

(2) 首先证明 $DG = \frac{1}{2}BG = \frac{9}{2}$, 推出 $AD = 2DG = 9$, 由勾股定理得出 $AG = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, 求出

$S_{\triangle ABD} = \frac{243}{8}\sqrt{3} = S_{\triangle BCD}$, 再证明 $\triangle DGE \sim \triangle DBC$, 利用相似三角形的性质求出 $\triangle DGE$ 的面积.

【小问 1 详解】

解: $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AD = DC$, $BG = 2GD$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$,

$\therefore \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

【小问 2 详解】

解: $\because BG = 2GD, BG = 9,$

$$\therefore DG = \frac{9}{2},$$

$$\therefore BD = BG + GD = \frac{27}{2};$$

$\because AG \perp BD, \angle GAD = 30^\circ,$

$$\therefore AD = 2DG = 9,$$

$$\text{由勾股定理得 } AG = \sqrt{AD^2 - DG^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \times AG = \frac{1}{2} \times \frac{27}{2} \times \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{243}{8}\sqrt{3};$$

$\because AD = CD,$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{243}{8}\sqrt{3};$$

$\because GE \parallel BC,$

$\therefore \triangle DGE \sim \triangle DBC,$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DGE}}{S_{\triangle DBC}} = \left(\frac{DG}{DB}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle DGE} = \frac{1}{9}S_{\triangle DBC} = \frac{1}{9} \times \frac{243}{8}\sqrt{3} = \frac{27}{8}\sqrt{3}.$$

21. 宁宁同学用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像时, 列表如下:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	5	0	3	4	3	0	-5	...

(1) 由于计算粗心, 宁宁算错了其中的一个 y 值, 请指出这个算错的 y 值所对应的 $x =$ _____.

(2) 上述函数图像的对称轴是_____, 且当 $y \geq 0$ 时, x 的取值范围是_____.

(3) 若 $A\left(\frac{5}{4}, m\right)$ 、 $B(-3, n)$ 都在这个函数图像上, 比较 m 、 n 的大小, 并说明为什么?

【答案】(1) -2

(2) 直线 $x = 1$; $-1 \leq x \leq 3$

(3) $m > n$ ，理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的性质是解题关键.

(1) 根据表格容易判断出这个二次函数的对称轴与增减性，逐个判断即可；

(2) 根据表格判断出这个二次函数的对称轴与增减性，从而判断出 x 的取值范围；

(3) 结合二次函数的对称轴和增减性，判断 m 和 n 的大小即可.

【小问 1 详解】

解：由表格中的坐标可知，这个二次函数的图象关于直线 $x = 1$ 对称，

点 $(4, -5)$ 关于对称轴直线 $x = 1$ 的对称点为 $(-2, -5)$ ，

因此 $x = -2$ 对应的 y 值应为 -5 而非 5 ；

故答案为： -2 .

【小问 2 详解】

解：由表格中的坐标可知，函数图象的对称轴为直线 $x = 1$ ，且开口向下；当 $y \geq 0$ 时， x 的取值范围为 $-1 \leq x \leq 3$ ；

故答案为：直线 $x = 1$ ； $-1 \leq x \leq 3$.

【小问 3 详解】

解：由表格中的坐标可知，这个二次函数的图象关于直线 $x = 1$ 对称，且当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大；
当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 函数图象上的点离对称轴越近，其函数值越大，

$$\left| \frac{5}{4} - 1 \right| = \frac{1}{4}, \quad |-3 - 1| = 4,$$

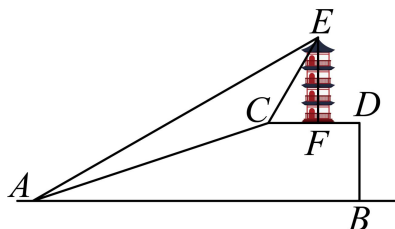
$$\therefore \frac{1}{4} < 4,$$

$\therefore$ 点 A 比点 B 更接近对称轴，

$\therefore m > n$.

22. 如图，已知水平地面 AB 上方有一水平的平台 CD ，该平台上有一个竖直的建筑物 EF ，满足

$EF \perp CD$. 从 A 到 C 处的斜坡 AC 的坡度 $i = 1:3$ ，且 $AC = 20\sqrt{10}$ 米. 已知在 A 处测得建筑物顶端 E 的仰角为 30° ，在 C 处测得 E 的仰角为 60° . 假设 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 在同一竖直平面内.



(1) 求平台 CD 的高度.

(2) 求建筑物 EF 的高度. (结果保留根号)

【答案】 (1) 20 米 (2) 建筑物 EF 的高度为 $(30\sqrt{3} - 30)$ 米

【解析】

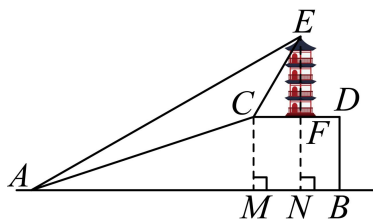
【分析】 本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，坡度坡角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

(1) 过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，根据已知可设 $CM = x$ 米，则 $AM = 3x$ 米，然后在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中，利用勾股定理进行计算，即可解答；

(2) 过点 E 作 $EN \perp AB$ 于点 N ，交 CD 于点 F ，分别在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 和 $\text{Rt}\triangle AEN$ 中，由三角函数的定义求出 $EN = AN \cdot \tan 30^\circ$ ，再进行计算即可解答.

【小问 1 详解】

解：过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，则 $CD = CM$ ，



$\because$ 斜坡 AC 的坡度 $i = 1:3$,

$$\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{1}{3},$$

设 $CM = x$ 米，则 $AM = 3x$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中，由勾股定理得： $AM^2 + CM^2 = AC^2$,

又 $AC = 20\sqrt{10}$ 米，

$$\therefore (3x)^2 + x^2 = (20\sqrt{10})^2,$$

解得 $x = 20$,

$\therefore CM = 20$ 米，

所以，平台 CD 的高度为 20 米；

【小问 2 详解】

解：过点 E 作 $EN \perp AB$ 于点 N ，交 CD 于点 F ，设 $EF = h$ 米，则： $FN = CM = 20$ 米， $MN = CF$ ，

$$\therefore EN = EF + FN = 20 + h,$$

$$\therefore CM = 20 \text{ 米},$$

$$\therefore BM = 60 \text{ 米},$$

$$\therefore AN = AM + MN = 60 + CF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ECF \text{ 中, } \angle ECF = 60^\circ, \text{ 则 } CF = \frac{EF}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}};$$

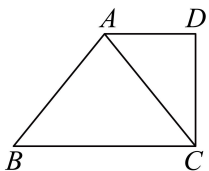
$$\text{在 Rt}\triangle AEN \text{ 中, } \angle EAN = 30^\circ, \text{ 则: } EN = AN \cdot \tan 30^\circ,$$

$$\therefore h + 20 = \left(60 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{解得: } h = 30\sqrt{3} - 30,$$

所以，建筑物 EF 的高度为 $(30\sqrt{3} - 30)$ 米.

23. 已知，如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = m$ ， $BC = n$ ， $AC = \sqrt{mn}$. 其中 $n > m$.



(1) 求证： $\triangle ACD \sim \triangle CBA$.

(2) 如果 $S_{\text{四边形}ABCD} : S_{\triangle ABC} = 3:2$ ， 求证： $BC = 2AD$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定与性质，正确运用相似三角形的判定与性质是解答本题的关键.

(1) 证明 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$ ， 结合 $\angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$ 可证明 $\triangle ACD \sim \triangle CBA$ ；

(2) 根据相似三角形的性质可得结论.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because AD = m, \quad BC = n, \quad AC = \sqrt{mn},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{m}{\sqrt{mn}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{mn}}{n} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{又 } \angle ADC = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBA;$$

【小问2详解】

$$\text{证明: } \because S_{\text{四边形}ABCD} : S_{\triangle ABC} = 3:2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2},$$

$$\because \triangle ACD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore \frac{AD^2}{AC^2} = \frac{1}{2},$$

$$\because AD = m, \quad BC = n, \quad AC = \sqrt{mn},$$

$$\therefore \frac{m^2}{mn} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore n = 2m,$$

$$\therefore BC = 2AD.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -x^2 + mx + 2$ 与 x 轴的负半轴交于点 A , 与 y 轴交于点 C .

$$(1) \text{ 已知 } \tan \angle ACO = \frac{1}{2}.$$

①求抛物线的表达式.

②若点 B 为该抛物线上一点, 且 $\triangle ABC$ 的重心恰好落在 x 轴上, 求点 B 的坐标.

(2) 坐标平面内有点 $M(0,3)$ 、 $N(2,3)$, 如果抛物线 $y = -x^2 + mx + 2$ 与线段 MN 有且只有一个公共点, 求 m 的值或取值范围.

【答案】(1) ①抛物线的表达式为 $y = -x^2 + x + 2$; ②点 B 的坐标为 $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, -2\right)$ 或 $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -2\right)$

(2) 当 $m = 2$ 或 $m > \frac{5}{2}$ 时, 抛物线 $y = -x^2 + mx + 2$ 与线段 MN 有且只有一个公共点

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象和性质，结合三角函数、一元二次方程等知识点，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

(1) ①由 $\tan \angle ACO = \frac{1}{2}$ ，判断出点 A 的坐标，利用待定系数法求函数表达式即可；②由重心的性质，结合相似三角形即可求出点 B 的坐标；

(2) 结合函数图像，可判断当顶点恰好在线段 MN 上时满足该情况，结合图像判断，由于 $x=0$ 时，函数值 $y=2$ ，在点 M 下方，故 $x=2$ 时，函数值应在点 N 上方，也可满足抛物线 $y=-x^2+mx+2$ 与线段 MN 有且只有一个公共点，据此求出 m 的取值和取值范围.

【小问 1 详解】

解：①当 $x=0$ 时， $y=2$ ，

故点 C 坐标为 $(0,2)$ ，

$\therefore OC=2$ ，

$\therefore \tan \angle ACO = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore OA=1$ ，且 A 在 x 轴负半轴上，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-1,0)$ ，

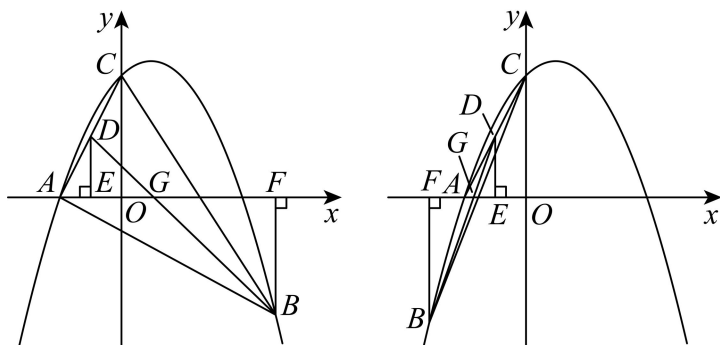
代入 $y=-x^2+mx+2$ ，得 $0=-(-1)^2+m \times (-1)+2$ ，

解得 $m=1$ ，

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+x+2$.

②解： $\because$ 重心是三角形中线的交点，且重心将中线分割成长度为 $1:2$ 的线段，若重心在 x 轴上，则点 B 一定在 x 轴的下方，

令 AC 中点为 D ，重心为点 G ，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴交 x 轴于点 E ，过点 B 作 $BF \perp x$ 轴交 x 轴于点 F ，如下图所示：



由 $A(-1,0)$, $C(0,2)$,

得点 D 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

假设点 B 的坐标为 $(a, -a^2 + a + 2)$,

$$\therefore DE = 1, \quad BF = 0 - (-a^2 + a + 2) = a^2 - a - 2,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle BGF, \quad \angle DEG = \angle BFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle BFG,$$

$$\therefore \frac{BF}{DE} = \frac{BG}{DG} = \frac{2}{1},$$

$$\text{即 } \frac{a^2 - a - 2}{1} = \frac{2}{1},$$

$$\text{得 } a^2 - a - 2 = 2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ (图左) 或 } a = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \text{ (图右),}$$

$$\text{当 } a = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ 时, } y = -a^2 + a + 2 = -2,$$

$$\text{当 } a = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \text{ 时, } y = -a^2 + a + 2 = -2,$$

$$\text{故点 } B \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, -2\right) \text{ 或 } \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, -2\right).$$

【小问 2 详解】

解: 图象开口向下, 且经过点 $C(0,2)$,

由此判断当 $m < 0$ 时, 函数对称轴为直线 $x = \frac{m}{2} < 0$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, 函数值随 x 的增大而减小, 故不可能与线段 MN 有交点,

$$\therefore m > 0,$$

当抛物线 $y = 3$ 时, 得 $-x^2 + mx + 2 = 3$,

$$\text{化简得 } x^2 - mx + 1 = 0$$

要使方程有一个解, 且对应的解应在 $0 \leq x \leq 2$ 的范围内,

$$\text{则 } \Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0,$$

解得 $m = 2$ 或 $m = -2$ (舍去),

当 $m = 2$ 时, $-x^2 + 2x + 2 = 3$,

解得 $x = -1$ (舍去) 或 $x = 1$ (满足 $0 \leq x \leq 2$),

故当 $m = 2$ 时, 满足抛物线 $y = -x^2 + mx + 2$ 与线段 MN 有且只有一个公共点;

随着 m 的增大, 函数与线段 MN 有两个交点,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, 函数值 $y = 2$, 在点 M 下方,

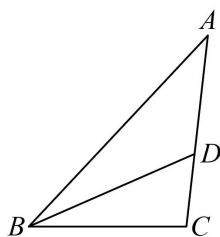
当 $x = 2$ 时, 函数值应在点 N 上方, 即 $y > 3$ 即可满足要求,

$$\text{得 } -2^2 + 2m + 2 > 3,$$

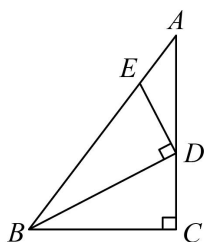
$$\text{解得 } m > \frac{5}{2},$$

综上所述, 当 $m = 2$ 或 $m > \frac{5}{2}$ 时, 抛物线 $y = -x^2 + mx + 2$ 与线段 MN 有且只有一个公共点.

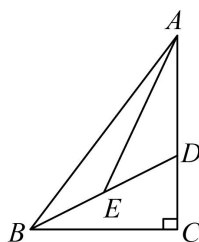
25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 边上一点, 始终满足 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.



(图1)



(图2)



(图3)

(1) 求证: $\angle ABD = \angle CBD$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 当 $\angle C = 90^\circ$ 时.

①如图 2, 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 过点 D 作 $ED \perp BD$ 交 AB 于点 E , 若 $\triangle BDE$ 的面积为 5, 求 AC 长.

②如图 3, E 为 BD 中点, 如 $\angle ABC = 2\angle DAE$, 设 BE 长为 x , 记 AB 与 BC 的差为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式及函数定义域.

【答案】 (1) 见解析 (2) ① $\frac{16}{3}$; ② $y = \sqrt{5-1}x$ ($x > 0$)

【解析】

【分析】 (1) 过点 D 作 $DE \perp AB, DF \perp BC$, 根据三角形的面积公式结合同高三角形的面积比等于底边比, 得到 $\frac{AB \cdot DE}{BC \cdot DF} = \frac{AD}{CD}$, 根据 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, 得到 $DE = DF$, 得到 BD 平分 $\angle ABC$ 即可;

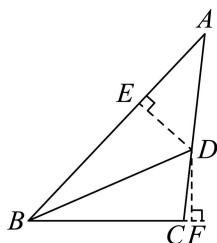
(2) ①根据 $\sin A = \frac{3}{5}$, 设 $BC = 3k, AB = 5k$, 进而得到 $AC = 4k$, 根据 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, 求出 CD , 勾股定理求出 BD , 由 (1) 可知 $\angle ABD = \angle CBD$, 得到 $\tan \angle ABD = \tan \angle CBD$, 求出 DE 的长, 再根据 BDE 的面积为 5, 进行求解即可;

②作 $DF \perp AB$ 与点 F , 证明 $\text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle BFD$, 得到 $BC = BF$, 进而得到

$AB - BC = AB - BF = AF = y$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$, 求出 $AD = \sqrt{2}x$, 连接 CE , 斜边上的中线推出 $\angle BCE = \angle CBD = \angle DAE$, 证明 $\triangle AEC \sim \triangle BCD$, 求出 CD 的长, 勾股定理求出 BC 的长, 再根据 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, 求出函数关系式即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 D 作 $DE \perp AB, DF \perp BC$,



$$\text{则: } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot DE}{\frac{1}{2}BC \cdot DF} = \frac{AB \cdot DE}{BC \cdot DF} = \frac{AD}{CD},$$

$$\text{又} \because \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD},$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD;$$

【小问 2 详解】

解: ① $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

设 $BC = 3k, AB = 5k$, 则 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4k$,

$$\because \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}, \text{ 即 } \frac{AD}{CD} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore CD = \frac{3}{8}AC = \frac{3}{2}k,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}k,$$

由 (1) 知: $\angle ABD = \angle CBD$,

$$\therefore \tan \angle ABD = \tan \angle CBD,$$

$$\because ED \perp BD, \quad \angle C = 90^\circ, \quad \tan \angle ABD = \tan \angle CBD,$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2},$$

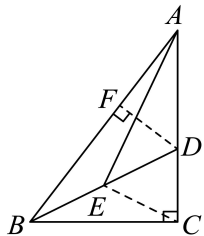
$$\therefore DE = \frac{1}{2}BD = \frac{3\sqrt{5}}{4}k,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}DE \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}k \cdot \frac{3\sqrt{5}}{4}k = 5,$$

$$\therefore k = \frac{4}{3} \quad (\text{负值舍去});$$

$$\therefore AC = 4k = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3};$$

②作 $DF \perp AB$ 于点 F ,



$$\because \angle ABD = \angle CBD, \quad \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore DF = CD,$$

$$\text{又} \because BD = BD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle BFD \quad (\text{直角三角形全等的判定定理}),$$

$$\therefore BC = BF,$$

$$\therefore AB - BC = AB - BF = AF = y,$$

$$\because \angle ABC = 2\angle DAE,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABD = \angle DAE,$$

$$\text{又} \because \angle ADE = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DE}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = DE \cdot BD,$$

$$\because E \text{ 为 } BD \text{ 中点, } BE = x,$$

$$\therefore DE = x, BD = 2x,$$

$$\therefore AD^2 = x \cdot 2x = 2x^2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}x,$$

连接 CE ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, E \text{ 为 } BD \text{ 中点},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BD = BE = DE = x,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle CBD = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ACE = \angle BCE + \angle ACE = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{EC}{CD} = \frac{AC}{BD},$$

$$\therefore AC \cdot CD = EC \cdot BD,$$

$$\therefore (AD + CD) \cdot CD = EC \cdot BD, \text{ 即 } (\sqrt{2}x + CD) \cdot CD = 2x^2,$$

$$\text{解得 } CD = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}x \text{ 或 } CD = \frac{-\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}x \text{ (舍去),}$$

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{\sqrt{5} + 1}x,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AF + BF}{BC} = \frac{AF + BC}{BC} = \frac{AD}{CD}, \text{ 即: } \frac{y + \sqrt{\sqrt{5} + 1}x}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}x} = \frac{\sqrt{2}x}{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}x},$$

$$\therefore y = \sqrt{\sqrt{5} - 1}x \quad (x > 0).$$

【点睛】 本题考查角平分线的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识点，合理添加辅助线，熟练掌握相关知识点是解题的关键。

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育” 全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫