

虹口区 2025-2026 学年度初三年级一模数学卷

2026.1

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、练习卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列四组线段中, 成比例的是 ()

- A. 1, 2, 3, 4; B. 2, 3, 4, 5; C. 1, 2, 3, 5; D. 2, 3, 4, 6.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查成比例线段的概念, 判断四条线段是否成比例, 可将四条线段的长度按从小到大排序, 看最小线段与最长线段的乘积是否等于另外两条线段的乘积. 若相等, 则四条线段成比例; 反之, 则不成比例.

【详解】解: A、 $1 \times 4 = 4, 2 \times 3 = 6, 4 \neq 6$, $\therefore$ 选项 A 中的四条线段不成比例;

B、 $2 \times 5 = 10, 3 \times 4 = 12, 10 \neq 12$, $\therefore$ 选项 B 中的四条线段不成比例;

C、 $1 \times 5 = 5, 2 \times 3 = 6, 5 \neq 6$, $\therefore$ 选项 C 中的四条线段不成比例;

D、 $2 \times 6 = 12, 3 \times 4 = 12, 12 = 12$, $\therefore$ 选项 D 中的四条线段成比例;

故选: D.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 已知 $AC = 3, BC = 4$, 下列锐角三角比中, 值为 $\frac{3}{4}$ 的是 ()

- A. $\sin B$ B. $\cos B$ C. $\tan B$ D. $\cot B$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的相关计算, 勾股定理. 结合在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3, BC = 4$, 运用勾股定理求斜边 AB , 再根据锐角三角函数的定义计算 $\angle B$ 的各个三角函数值, 即可作答.

【详解】解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3, BC = 4$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$\therefore \angle B$ 的对边为 $AC = 3$, 邻边为 $BC = 4$, 斜边为 $AB = 5$,

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5}, \tan B = \frac{3}{4}, \cot B = \frac{4}{3},$$

故选: C.

3. 已知 $y = (m-3)x^{|m-1|}$ (m 为常数) 是二次函数, 那么 m 的值是 ()

A. 3

B. -1

C. -3

D. 3 或 -1

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的定义. 根据二次函数的定义, x 的指数必须为 2, 且系数不为零, 进行分析, 即可作答.

【详解】解: $\because y = (m-3)x^{|m-1|}$ (m 为常数) 是二次函数,

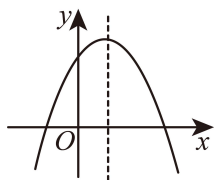
$$\therefore m-3 \neq 0, |m-1| = 2,$$

$$\therefore m \neq 3, m-1 = \pm 2,$$

解得 $m = -1$,

故选: B.

4. 如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像, 那么下列说法中, 正确的是 ()



A. $a > 0$;

B. $b > 0$;

C. $b < 0$;

D. $c < 0$.

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与系数的关系, 利用抛物线开口方向确定 a 的符号, 利用对称轴方程可确定 b 的符号, 利用抛物线与 y 轴的交点位置可确定 c 的符号.

【详解】解: $\because$ 抛物线开口向下,

$\therefore a < 0$, 故选项 A 不正确;

$\because$ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧,

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

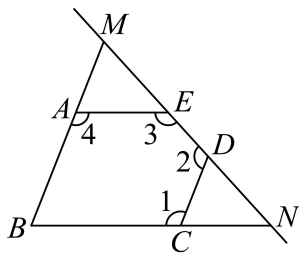
$\therefore b > 0$ ，故选项 B 正确，选项 C 不正确；

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

$\therefore c > 0$ ，故选项 D 不正确。

故选：B。

5. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中， $AE \parallel BC$ ，延长 BA 、 BC ，分别交直线 DE 于点 M 、 N 。如果添加下列一个条件后，仍无法判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$ ，那么这个条件是（ ）



A. $\angle 2 = \angle 3$

B. $CD \parallel AB$

C. $\angle 1 = \angle 4$

D. $\angle B + \angle 1 = 180^\circ$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查三角形相似的判定，根据题意得 $\triangle MAE \sim \triangle MBN$ ，逐个判断各选项是否可证 $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ 即可。

【详解】解： $\because AE \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle MAE \sim \triangle MBN$ ，

选项 A：添加 $\angle 2 = \angle 3$ ，可得 $\angle AEM = \angle CDN$ 无法判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$ ；

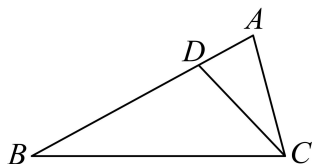
选项 B：添加 $CD \parallel AB$ ，可得 $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ ，可以判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$ ；

选项 C：添加 $\angle 1 = \angle 4$ ，可得 $\angle B + \angle 1 = 180^\circ$ ， $CD \parallel AB$ ， $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ 可以判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$ ；

选项 D：添加 $\angle B + \angle 1 = 180^\circ$ ，可得 $CD \parallel AB$ ， $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ 可以判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$ ；

故选 A。

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2AC$ ，点 D 在边 AB 上，且 $\angle ACD = \angle B$ ，如果 $AD = 2$ ，那么 BD 的长是（ ）



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，先根据 $\angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，整理得 $AC^2 = AB \times AD$ ，又因为 $AB = 2AC$ ， $AD = 2$ ，求出 $AC = 4$ ，再把数值代入 $BD = AB - AD$ 进行计算，即可作答。

【详解】解： $\because \angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}，$$

$$\therefore AC^2 = AB \times AD，$$

$$\because AB = 2AC，AD = 2，$$

$$\therefore AC^2 = 2AC \times 2，$$

解得 $AC = 4$ 或 $AC = 0$ （不合题意，舍去），

$$\therefore AB = 2 \times 4 = 8，$$

$$\therefore BD = AB - AD = 8 - 2 = 6，$$

故选：D。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 计算： $3\vec{a} - 2(\vec{b} - \vec{a}) =$ _____.

【答案】 $5\vec{a} - 2\vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查了向量的运算，根据向量的数乘和加法运算法则，先运用分配律将括号展开，再合并同类向量即可得到答案。

【详解】解： $3\vec{a} - 2(\vec{b} - \vec{a}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{a} = (3\vec{a} + 2\vec{a}) - 2\vec{b} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ 。

故答案为： $5\vec{a} - 2\vec{b}$ 。

8. 如果抛物线 $y = (a-1)x^2$ （ a 为常数）开口向下，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 1$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质。根据二次函数的性质，当二次项系数小于 0 时，抛物线开口向下，进行分析，即可作答。

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y = (a-1)x^2$ 的开口向下，

$$\therefore a-1 < 0，$$

解得 $a < 1$.

故答案为: $a < 1$

9. 已知点 $A(-5, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 都在二次函数 $y = a(x-1)^2$ ($a < 0$) 的图像上, 那么 y_1 _____ y_2 (填“>”、“<”或“=”).

【答案】<

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质, 由 $y = a(x-1)^2$ ($a < 0$), 可知函数图像开口向下, 对称轴为 $x = 1$, 再根据增减性判断即可.

【详解】解: 由 $y = a(x-1)^2$ ($a < 0$), 可知函数图像开口向下, 对称轴为 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\because -5 < -3$,

$\therefore y_1 < y_2$.

故答案为<.

10. 小丽为了画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像, 列出了表 (信息不全), 那么 m 的值是_____.

x	...	-5	-4	-2	0	m	...
y	...	10	5	1	5	10	...

【答案】

1

【解析】

【分析】本题主要考查二次函数的图象与性质, 根据二次函数的对称性, 由点 $(-4, 5)$ 和 $(0, 5)$ 确定对称轴, 再利用点 $(-5, 10)$ 和 $(m, 10)$ 关于对称轴对称求解 m 即可.

【详解】解: 由点 $(-4, 5)$ 和 $(0, 5)$ 纵坐标相同, 可得它们关于对称轴对称, 对称轴为 $x = \frac{-4+0}{2} = -2$.

所以, 点 $(-5, 10)$ 和 $(m, 10)$ 也关于对称轴对称,

因此 $\frac{-5+m}{2} = -2$,

解得 $m = 1$.

故答案为: 1.

11. 已知两个相似三角形的相似比为2:3, 且这两个三角形的周长之和为25, 那么其中较小三角形的周长是_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的性质, 根据相似三角形的周长比等于相似比设较小三角形周长为 $2k$, 较大三角形周长为 $3k$, 根据周长之和为25列方程求解.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的相似比为2:3,

$\therefore$ 它们的周长比为2:3.

设较小三角形的周长为 $2k$, 较大三角形周长为 $3k$, 则 $2k + 3k = 25$, 即 $5k = 25$,

解得 $k = 5$,

$\therefore$ 较小三角形的周长为 $2 \times 5 = 10$.

故答案为: 10.

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AB = 6$, $\sin A = \frac{1}{3}$, 那么 AC 的长是_____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查正弦, 根据正弦的定义, $\sin A$ 等于对边 BC 与斜边 AB 的比, 结合勾股定理求解.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$, $AB = 6$,

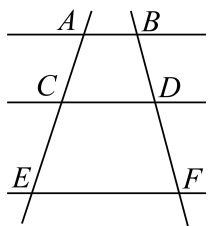
所以 $BC = AB \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$.

由勾股定理, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, 即 $6^2 = AC^2 + 2^2$,

解得: $AC = 4\sqrt{2}$.

故答案为: $4\sqrt{2}$.

13. 如图, 直线 $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $\frac{AC}{CE} = \frac{3}{4}$, $BD = 6$ 那么 BF 的长是_____.



【答案】 14

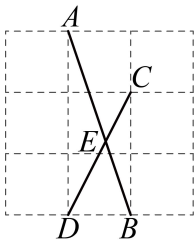
【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例，由 $\frac{AC}{CE} = \frac{3}{4}$ ，得 $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{7}$ ，由 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，得 $\frac{BD}{BF} = \frac{3}{7}$ 即可解答.

【详解】 解： $\because \frac{AC}{CE} = \frac{3}{4}$ ，
 $\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$ ，
 $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ，
 $\therefore \frac{BD}{BF} = \frac{3}{7}$ ，
 $\therefore BD = 6$ ，
 $\therefore BF = \frac{7}{3}BD = \frac{7}{3} \times 6 = 14$ ，

故答案为 14.

14. 如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长都相等，点 A 、 B 、 C 、 D 都在格点上，连接 AB 、 CD 交于点 E ，那么 $\frac{CE}{DE}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

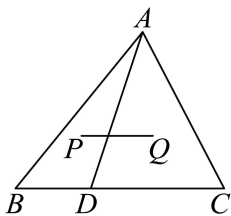
【解析】

【分析】 本题考查了利用平行判定相似，相似三角形的判定与性质综合，利用相似三角形的性质求解等知识点，解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

先证明 $\triangle BCE \sim \triangle ADE$ ，再列出比例式求解即可.

【详解】 解： $\because BC \parallel AD$ ，
 $\therefore \triangle BCE \sim \triangle ADE$ ，
 $\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$ ，
 故答案为： $\frac{2}{3}$.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，连接 AD ，点 P 和 Q 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心. 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{PQ}$ 是_____.

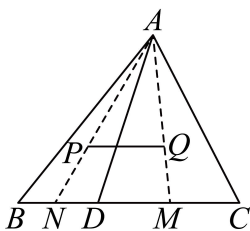


【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查了向量的运算，重心，相似三角形的判定与性质，先根据点 P 和 Q 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心，得 $\frac{AP}{AN} = \frac{2}{3} = \frac{AQ}{AM}$ ， $ND = \frac{1}{2}BD$ ， $DM = \frac{1}{2}DC$ ，证明 $\triangle PAQ \sim \triangle NAM$ ，因为 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ，整理得 $NM = \frac{1}{2}BC$ ，所以 $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ ，故 $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$ ，即可作答。

【详解】解：连接 AP, AQ ，并延长 AP, AQ 分别交 BC 于点 N, M ，



$\because$ 点 P 和 Q 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心.

$$\therefore \frac{AP}{AN} = \frac{2}{3} = \frac{AQ}{AM}, \quad ND = \frac{1}{2}BD, \quad DM = \frac{1}{2}DC$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle NAM,$$

$$\therefore \triangle PAQ \sim \triangle NAM,$$

$$\text{故 } \frac{PQ}{NM} = \frac{AQ}{AM} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\text{则 } NM = ND + DM = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\therefore \frac{PQ}{NM} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore PQ = \frac{2}{3}NM,$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{NM} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{a},$$

故答案为: $\frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{a}$.

16. 对于某个函数, 如果当 $x = x_0$ 时, 函数值 $y = -x_0$, 那么我们称 $(x_0, -x_0)$ 为此函数的“反点”. 例如函数 $y = 2x - 3$, 因为当 $x = 1$ 时 $y = -1$, 所以 $(1, -1)$ 为此函数的“反点”. 二次函数 $y = x^2 - 5x + 4$ 的“反点”是_____.

【答案】 $(2, -2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数图象上的点的坐标特征, 根据“反点”定义, 令函数值等于自变量的相反数, 建立方程求解即可.

【详解】 解: 设反点对应的自变量为 x_0 , 则函数值 $y = -x_0$, 代入函数解析式得:

$$x_0^2 - 5x_0 + 4 = -x_0$$

$$\text{整理得: } x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$$

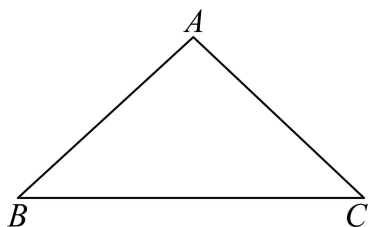
$$\text{解得: } x_0 = 2$$

$$\therefore y = -x_0 = -2,$$

$$\therefore \text{反点为 } (2, -2).$$

故答案为: $(2, -2)$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{2}{3}$. 点 D 在边 BC 上, 连接 AD , 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折得到 $\triangle AED$, 点 B 对应点 E , 连接 CE , 如果 $CE \parallel AB$, 那么 BD 的长是_____.



【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质, 勾股定理, 平行线的性质, 解直角三角形的相关计算, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

先结合 $AB = AC = 10, \sin B = \frac{2}{3}, AH \perp BC$, 求出 $AH = \frac{20}{3}$, 运用勾股定理得

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{10\sqrt{5}}{3}, \quad CH = \frac{10\sqrt{5}}{3}, \quad \text{结合角的整理得 } BD = AD, \quad \text{即 } DH = \frac{10\sqrt{5}}{3} - BD, \quad \text{运用}$$

$$\text{勾股定理得 } BD^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - BD\right)^2, \quad \text{解得 } BD = 3\sqrt{5}.$$

【详解】解：过点 A 作 $AH \perp BC$, 如图所示：

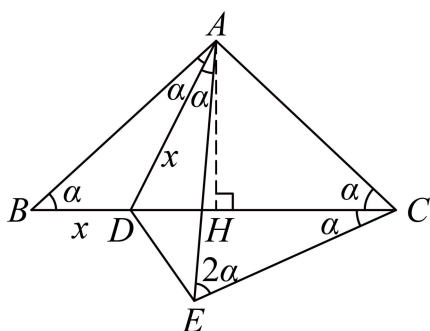
$$\because AB = AC = 10, \sin B = \frac{2}{3}, \quad AH \perp BC,$$

$$\therefore \sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{2}{3}, \quad BH = CH,$$

$$\text{即 } \frac{AH}{10} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AH = \frac{20}{3},$$

$$\text{则 } BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - \frac{400}{9}} = \frac{10\sqrt{5}}{3},$$



$\because$ 折叠,

$$\therefore \angle BAD = \angle EAD, \quad AB = AE = AC = 10,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE,$$

$$\therefore \text{设 } \angle BAD = \angle EAD = \alpha,$$

$$\therefore \angle BAE = 2\alpha,$$

$$\because CE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle BAE = 2\alpha, \quad \angle ABC = \angle ECB,$$

$$\text{即 } \angle AEC = \angle ACE = 2\alpha,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACB + \angle ECB = \angle ACB + \angle ABC = 2\alpha,$$

$$\text{即 } \angle ACB = \angle ABC = \alpha,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC = \alpha,$$

$$\therefore BD = AD,$$

$$\therefore DH = BH - BD = \frac{10\sqrt{5}}{3} - BD,$$

$$\therefore AH \perp BC,$$

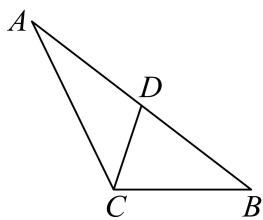
$$\therefore AD^2 = AH^2 + DH^2,$$

$$\therefore BD^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - BD\right)^2,$$

$$\text{解得 } BD = 3\sqrt{5}.$$

故答案为: $3\sqrt{5}$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5$, $\cot A = 2$, $\sin B = \frac{3}{5}$, D 是 AB 的中点. E 是线段 AC 延长线上一点, 连接 BE , 如果四边形 $BDCE$ 的一组对角相等且另一组对角不相等, 那么 AE 的长是_____.



【答案】 $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ 或 $10\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F , 解直角三角形求出 $CF = 3$, 利用勾股定理求出

$BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = 4$, 解直角三角形求出 $AF = 6$, 进而求出 AB , AC , AD , DF , CD 的长度,

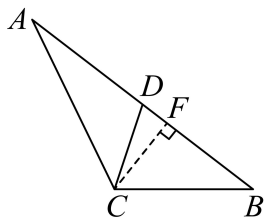
然后根据题意分两种情况讨论: 当 $\angle CDB = \angle E$ 时, 连接 BE , CE , 在 BF 上取点 G , 使 $DF = GF = 1$,

证明出 $\triangle ACG \sim \triangle ABE$, 得到 $\frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AE}$, 然后代入求解即可; 当 $\angle DCE = \angle DBE$ 时, 过点 D 作 $DH \perp AC$

于点 H , 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M , 利用勾股定理求出 $DH = \sqrt{5}$, $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{5} = DH$,

证明出 $\triangle DHC$ 是等腰直角三角形, 然后解直角三角形求解即可.

【详解】 解: 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ,



$$\because \sin B = \frac{3}{5}, \quad BC = 5,$$

$$\therefore \frac{CF}{BC} = \frac{3}{5}, \quad \text{即} \frac{CF}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CF = 3,$$

$$\therefore BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = 4,$$

$$\because \cot A = \frac{AF}{CF} = 2,$$

$$\therefore \frac{AF}{3} = 2,$$

$$\therefore AF = 6,$$

$$\therefore AB = AF + FB = 6 + 4 = 10, \quad AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = 3\sqrt{5},$$

$\because D$ 是 AB 的中点,

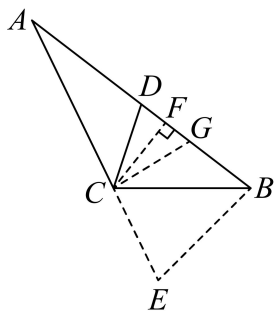
$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\therefore DF = AF - AD = 6 - 5 = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$\because$ 四边形 $BDCE$ 的一组对角相等且另一组对角不相等,

如图所示, 当 $\angle CDB = \angle E$ 时, 连接 BE , CE , 在 BF 上取点 G , 使 $DF = GF = 1$,



$$\therefore AG = AF + FG = 6 + 1 = 7,$$

$$\because CF \perp AB, \quad DF = GF = 1,$$

$$\therefore CD = CG = \sqrt{10},$$

$$\therefore \angle CDG = \angle CGD,$$

$$\because \angle CDB = \angle E,$$

$$\therefore \angle E = \angle CGD,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle A,$$

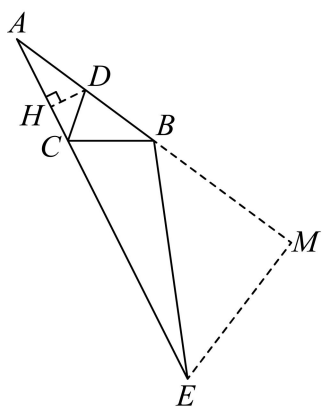
$$\therefore \triangle ACG \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AE},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{7}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{14\sqrt{5}}{3};$$

如图所示, 当 $\angle DCE = \angle DBE$ 时, 过点 D 作 $DH \perp AC$ 于点 H , 过点 E 作 $EM \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 M ,



$$\therefore \cot A = \frac{DH}{AH} = 2,$$

$$\therefore AH = 2DH,$$

$$\because AD = 5, \quad AH^2 + DH^2 = AD^2,$$

$$\therefore (2DH)^2 + DH^2 = 5^2,$$

$$\therefore DH = \sqrt{5},$$

$$\because CD = \sqrt{10},$$

$$\therefore CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{5} = DH,$$

$\therefore \triangle DHC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle HCD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DBE = 180^\circ - \angle HCD = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle EBM = 180^\circ - \angle DBE = 45^\circ,$$

$\because EM \perp AB$,

$\therefore \triangle BEM$ 是等腰直角三角形,

$\therefore BM = EM$,

$$\therefore \cot A = \frac{AM}{EM} = \frac{AB + EM}{EM} = \frac{10 + EM}{EM} = 2,$$

$\therefore BM = EM = 10$,

$$\therefore AE = \sqrt{AM^2 + EM^2} = 10\sqrt{5},$$

综上所述, AE 的长是 $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ 或 $10\sqrt{5}$.

故答案为: $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ 或 $10\sqrt{5}$.

【点睛】此题考查了解直角三角形, 勾股定理, 垂直平分线的性质, 等腰三角形的判定, 相似三角形的性质和判定等知识, 解题的关键是正确作出辅助线.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos^2 30^\circ - \frac{\tan 45^\circ}{1 - \cos 60^\circ} + \sin^2 45^\circ$.

【答案】 $-\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】本题主要考查特殊锐角三角函数值的混合运算, 原式分别代入特殊锐角三角函数值, 再根据实数的混合运算法则进行计算即可.

【详解】解: $\cos^2 30^\circ - \frac{\tan 45^\circ}{1 - \cos 60^\circ} + \sin^2 45^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{3}{4} - 2 + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{3}{4}.$$

20. “已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(0, -5), B(-1, 0)$, 求抛物线 C_1 的表达式.” 上述题目中的黑色阴影部分由于墨水污染而无法辨认, 因此导致题目缺失了一个条件无法解答, 经查询发现抛物线 C_1 的表达式为 $y = x^2 - 4x - 5$.

(1) 请根据已有的信息添加一个缺失的条件: _____;

(2) 将抛物线 C_1 向上平移 m 个单位后得到抛物线 C_2 ，如果抛物线 C_2 的顶点关于原点的对称点在抛物线 C_1 上，求 m 的值.

【答案】(1) $C(5,0)$ (答案不唯一)

(2) $m = 2$

【解析】

【分析】本题考查根与系数关系，抛物线的平移，关于原点对称的点的坐标；

(1) 由 $y = x^2 - 4x - 5$ ，经过 $B(-1,0)$ ，得 $x_1 = -1$ 是 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的一个根，求另一个根即可解答；

(2) 求出平移后的函数解析式的顶点坐标和关于原点对称的点的坐标，再代入 $y = x^2 - 4x - 5$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because y = x^2 - 4x - 5$ ，经过 $B(-1,0)$ ，

$\therefore x_1 = -1$ 是 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的一个根，

由根与系数关系 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ，得 $-1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$ ，即 $-1 + x_2 = 4$ ，

解得 $x_2 = 5$ ，

$\therefore$ 添加的条件为 $C(5,0)$ ；

【小问 2 详解】

解：将抛物线 C_1 向上平移 m 个单位后解析式为 $y = x^2 - 4x - 5 + m = (x - 2)^2 - 9 + m$ ，

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点坐标为 $(2, -9 + m)$ ，

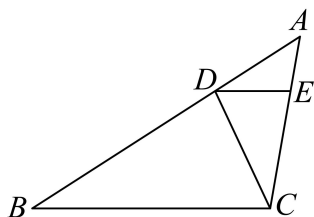
$(2, -9 + m)$ 关于原点的对称点为 $(-2, 9 - m)$ ，

将 $(-2, 9 - m)$ 代入 $y = x^2 - 4x - 5$ ，

得 $9 - m = (-2)^2 - 4 \times (-2) - 5$ 即 $9 - m = 7$ ，

解得 $m = 2$.

21. 如图， D 、 E 分别是 ABC 边 AB 、 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ， $DE = 4$ ， $BC = 12$ ， $AE = 3$.



(1) 求 CE 的长;

(2) 如果 $\angle ACD = \angle ABC$, 求 CD 的长.

【答案】 (1) $CE = 6$

(2) $DC = 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 根据 $DE \parallel BC$, 得 $\triangle AED \sim \triangle ACB$, 把数值代入 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ 进行计算, 即可作答.

(2) 结合 $\angle ACD = \angle ABC$, 证明 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, 又因为 $\triangle AED \sim \triangle ACB$, 故 $\triangle ADC \sim \triangle AED$, 把数值代入 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{DC}{ED}$, 得 $AD = 3\sqrt{3}$ (负值已舍去), 即 $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{DC}{4}$, 解得 $DC = 4\sqrt{3}$, 即可作答.

【小问 1 详解】

解: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle ACB$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB$,

则 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$,

$\because DE = 4, BC = 12, AE = 3$,

$\therefore \frac{4}{12} = \frac{3}{AC}$,

$\therefore AC = 9$,

$\therefore CE = AC - AE = 9 - 3 = 6$.

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ACD = \angle ABC, \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB$,

由 (1) 得 $\triangle AED \sim \triangle ACB$, $AC = 9$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle AED$,

则 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{DC}{ED}$,

$\therefore \frac{9}{AD} = \frac{AD}{3} = \frac{DC}{4}$,

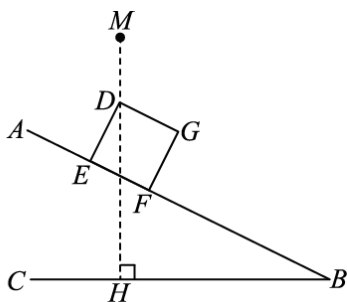
$\therefore AD^2 = 27$

$$\therefore AD = 3\sqrt{3} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{DC}{4}$$

$$\text{解得 } DC = 4\sqrt{3}.$$

22. 如图，某仓库有一传送带运输货柜，其侧面示意图如图所示， BC 为地面， AB 为斜坡上的传送带， $\angle B = 26.5^\circ$ ，四边形 $DEFG$ 是边长为 1.8 米的正方形. 点 M 为仓库卷帘门打开的最高位置，点 M 、 D 、 H 在同一直线上，点 D 到地面的距离 DH 为 5 米.



(1) 求 BE 的长 (精确到 0.1 米);

(2) 已知 M 到地面的距离 MH 为 6.8 米，如果正方形 $DEFG$ 的边长扩大为原来的 2 倍，能否继续利用该传送带运输？请通过计算说明 (AB 足够长). (参考数据:

$$\sin 26.5^\circ \approx 0.45, \cos 26.5^\circ \approx 0.90, \tan 26.5^\circ \approx 0.50)$$

【答案】 (1) 7.6 米

(2) 正方形的边长扩大为原来的 2 倍，不能继续利用该传送带运输，说明见解析

【解析】

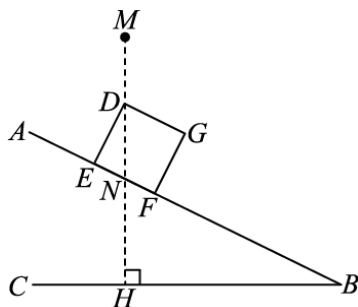
【分析】 本题考查用锐角三角函数解直角三角形，解题的关键是找到恰当的直角三角形，灵活运用锐角三角函数解直角三角形，注意单位和精确度.

(1) 记 AB 与 DH 交于点 N ，根据等角的余角相等得 $\angle EDN = \angle B = 26.5^\circ$ ，在 $Rt\triangle DEN$ 中，根据锐角三角函数求出 EN 和 DN 的长，进而计算 NH 长，在 $Rt\triangle BHN$ 中，根据锐角三角函数求出 BN ，由 $BE = EN + BN$ 计算 BE 的长；

(2) 正方形 $DEFG$ 扩大 2 倍后为正方形 $D'E'F'G'$ ，则新正方形边长 $D'E' = 1.8 \times 2 = 3.6$ 米，在 $Rt\triangle D'E'N'$ 中，根据锐角三角函数计算 $D'N'$ 的长，从而计算 $D'H$ 的长，进而比较 $D'H$ 和 MH 的大小，从而判断扩大后的正方形会不会被卷帘门 M 所影响到.

【小问 1 详解】

解：如图，记 AB 与 DH 交于点 N ，



∵ 四边形 $DEFG$ 是边长为 1.8 米的正方形,

$$\therefore \angle DEN = 90^\circ, \quad DE = 1.8 \text{ 米},$$

$$\therefore \angle EDN = 90^\circ - \angle DNE,$$

∵ $MH \perp BC$,

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BNH,$$

∵ $\angle DNE = \angle BNH$,

$$\therefore \angle EDN = \angle B = 26.5^\circ,$$

在 $Rt\triangle DEN$ 中, $\angle EDN = 26.5^\circ$,

$$\text{由 } \tan \angle EDN = \frac{EN}{DE} \text{ 得, } EN = DE \cdot \tan 26.5^\circ \approx 1.8 \times 0.50 = 0.9 \text{ (米)},$$

$$\text{由 } \cos \angle EDN = \frac{DE}{DN} \text{ 得, } DN = \frac{DE}{\cos 26.5^\circ} \approx \frac{1.8}{0.90} = 2.0 \text{ (米)},$$

在 $Rt\triangle BHN$ 中,

$$\angle B = 26.5^\circ, \quad NH = DH - DN = 5 - 2.0 = 3.0 \text{ (米)},$$

$$\text{由 } \sin B = \frac{NH}{BN} \text{ 得, } BN = \frac{NH}{\sin 26.5^\circ} \approx \frac{3.0}{0.45} \approx 6.67 \text{ (米)},$$

$$\therefore BE = EN + BN = 0.9 + 6.67 \approx 7.6 \text{ (米)},$$

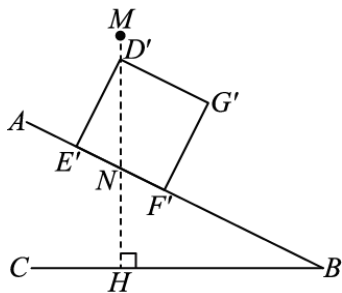
答: BE 的长约为 7.6 米;

【小问 2 详解】

解: 正方形的边长扩大为原来的 2 倍, 不能继续利用该传送带运输,

如图, 正方形 $DEFG$ 扩大 2 倍后为正方形 $D'E'F'G'$,

则新正方形边长 $D'E' = 1.8 \times 2 = 3.6$ 米,



在 $Rt\triangle D'E'N$ 中, $\angle E'D'N = 26.5^\circ$,

$$\text{由 } \cos \angle E'D'N = \frac{D'E'}{D'N} \text{ 得, } D'N = \frac{D'E'}{\cos 26.5^\circ} \approx \frac{3.6}{0.90} = 4.0 \text{ (米),}$$

$$\therefore D'H = D'N + NH = 4.0 + 3.0 = 7.0 \text{ (米),}$$

由 (1) 得 $NH = 3.0$ 米, $\therefore MH = 6.8$ 米,

$$\therefore MH < D'H,$$

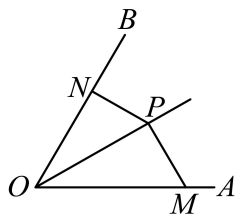
$\therefore$ 不能继续利用该传送带运输,

答: 正方形 $DEFG$ 的边长扩大为原来的 2 倍, 不能继续利用该传送带运输.

23. 【模型探究】

如图, 已知 M 、 N 分别是 $\angle AOB$ 边 OA 、 OB 上的点, P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, 满足

$$\angle MPN + \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ. \text{ 求证: } OP^2 = OM \cdot ON.$$

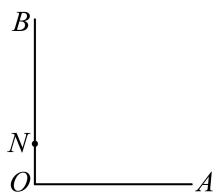


【模型应用】

(1) 已知 M 、 N 分别是 $\angle AOB$ 边 OA 、 OB 上的点, P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, 如果 $\angle AOB = 60^\circ$, $OM = 6$, $ON = 4$, $OP = 2\sqrt{6}$, 那么 $\angle MPN$ 的度数为 _____;

(2) 如图, 已知 $\angle AOB = 90^\circ$, N 是边 OB 上一点, 请在边 OA 上选择一个合适的点 M , 并在 $\angle AOB$ 内部求作一个点 P , 满足 $\angle MPN = 135^\circ$ 且 $PM = 2PN$.

(要求: 尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法)



【答案】证明见解析; (1) 150° ; (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了角平分线的性质, 相似三角形的判定和性质, 尺规作图—作角平分线, 作线段, 灵活运用所学知识是解题的关键.

【模型探究】由 OP 平分 $\angle AOB$, 可得 $\angle NOP = \angle MOP = \frac{1}{2}\angle AOB$, 又由 $\angle MPN + \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ$, 可得 $\angle MPO = \angle PNO$, 从而 $\triangle ONP \sim \triangle OPM$, 即可得结论;

(1) 由 $OM = 6, ON = 4, OP = 2\sqrt{6}$, 可得 $\frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM}$, 从而可证 $\triangle ONP \sim \triangle OPM$, 则 $\angle MPO = \angle PNO$, 再由 $\angle MPN = \angle MPO + \angle NPO$, $\angle NPO = 180^\circ - \angle PNO - \angle NOP$, 可得 $\angle MPN = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$, 即可求解;

(2) 先作 $\angle AOB$ 的平分线 OC , 则有 $\angle BOC = \angle COA = \frac{1}{2}\angle AOB$, 在 OC 截取 $OP = 2ON$, 再在 OA 截取 $OM = 2OP$, 则 $\frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{2}$, 从而 $\triangle ONP \sim \triangle OPM$, 则 $\frac{NP}{PM} = \frac{ON}{OP} = \frac{1}{2}$, 即 $PM = 2PN$, 同时 $\angle MPO = \angle PNO$, 则

$\angle MPN = \angle MPO + \angle OPN = \angle MPO + (180^\circ - \angle PNO - \angle NOP) = \angle MPO + 180^\circ - \angle PNO - \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 90^\circ = 135^\circ$, 则点 P 、 M 即为所求.

【详解】【模型探究】证明: $\because OP$ 平分 $\angle AOB$,

$$\therefore \angle NOP = \angle MOP = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

$$\therefore \angle MPN + \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MPO + \angle NPO + \angle NOP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MPO = 180^\circ - (\angle NPO + \angle NOP) = \angle PNO,$$

$$\therefore \triangle ONP \sim \triangle OPM,$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM},$$

$$\therefore OP^2 = OM \cdot ON.$$

解: (1) $\because OP$ 平分 $\angle AOB$, $\angle AOB = 60^\circ$

$$\therefore \angle NOP = \angle MOP = \frac{1}{2}\angle AOB = 30^\circ,$$

$$\because OM = 6, ON = 4, OP = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \frac{OP}{OM} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM},$$

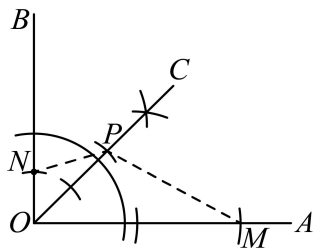
$$\therefore \triangle ONP \sim \triangle OPM,$$

$$\therefore \angle MPO = \angle PNO,$$

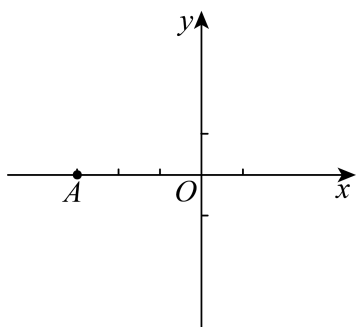
$$\therefore \angle MPN = \angle MPO + \angle OPN = \angle MPO + (180^\circ - \angle PNO - \angle NOP) = \angle MPO + 180^\circ - \angle PNO - \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 60^\circ = 150^\circ \text{ 故答案为:}$$

150° .

(2) 如图，点 P 、 M 即为所求.



24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ ($a \neq 0$) 交 x 轴于点 $A(-3, 0)$ 和点 B ，交 y 轴于点 C ，抛物线的顶点为 D .



(1) 直接写出点 B 的坐标，并用含 a 的代数式表示顶点 D 的坐标；

(2) 将该抛物线平移得到新抛物线，所得新抛物线的最高点是 B ，且与 y 轴的交点为 E ，连接 AC 、 AE ，如果 $\triangle ACE$ 的面积为 6，求 a 的值；

(3) 当点 D 的坐标为 $(-1, -4)$ 时，如果点 P 在抛物线上，且 $\angle ADP = 45^\circ$ ，求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $B(1, 0)$ ， $D(-1, -4a)$

(2) $a = -1$

(3) 当 $\angle ADP = 45^\circ$ 时，点 P 的坐标为 $(2, 5)$ 或 $(-\frac{4}{3}, -\frac{35}{9})$

【解析】

【分析】 (1) 首先根据抛物线的对称轴即可得到点 B 的坐标，并将点 A 的坐标代入抛物线得到 a 与 c 的关系，再将对称轴代入写出顶点 D 的坐标即可；

(2) 首先写出平移后的抛物线的解析式，并表示出点 E 的坐标，进而得到 CE 的长度，即可表示出 $\triangle ACE$ 的面积，结合面积为 6 即可求解 a 的值；

(3) 首先根据点 D 的坐标为 $(-1, -4)$ 得到 a 的值即可得到抛物线的解析式，分当点 P 在点 A 上方和当点 P 在点 A 下方进行讨论，根据 $\angle ADP = 45^\circ$ 构造直角三角形，即可求解直线 DP 上点 E 和 O 的坐标，即可求解直线 DP 的解析式，联立直线 DP 和抛物线即可得到点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because y = ax^2 + 2ax + c (a \neq 0)$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -\frac{2a}{2a} = -1$,

$\therefore A(-3, 0)$,

$\therefore B(1, 0)$;

$\therefore$ 抛物线交 x 轴于点 $A(-3, 0)$,

$\therefore 9a - 6a + c = 0$, 即 $c = -3a$,

将 $x = -1$ 和 $c = -3a$ 代入 $y = ax^2 + 2ax + c$, 得 $D(-1, -4a)$;

$\therefore B(1, 0)$, $D(-1, -4a)$;

【小问 2 详解】

解: 设平移后的抛物线为 $y' = a(x-1)^2$,

$\therefore$ 新抛物线与 y 轴的交点为 E ,

$\therefore E(0, a)$,

$\therefore$ 抛物线交 y 轴于点 C ,

$\therefore C(0, c)$, 即 $C(0, -3a)$,

$\therefore CE = |a - (-3a)| = 4|a|$,

$\therefore A(-3, 0)$,

$\therefore$ 点 A 到 y 轴的距离为 3,

$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 4|a| \times 3 = 6|a|$,

$\therefore \triangle ACE$ 的面积为 6,

$\therefore 6|a| = 6$, 解得: $a = \pm 1$,

$\therefore$ 新的抛物线的最高点为点 B ,

$\therefore$ 新抛物线的开口向下,

$\therefore a < 0$,

$\therefore a = -1$;

【小问 3 详解】

解: $\because D(-1, -4)$,

$\therefore a = 1$, 即抛物线开口向上,

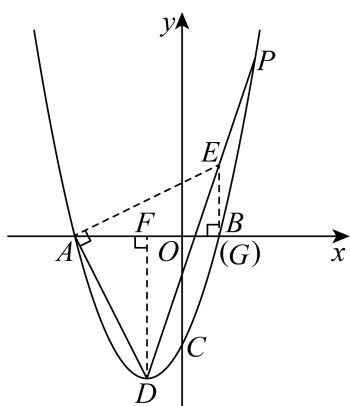
$$\therefore y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore A(-3, 0), D(-1, -4),$$

$$\therefore AD = \sqrt{(-3+1)^2 + (0+4)^2} = 2\sqrt{5},$$

设 $P(p, p^2 + 2p - 3)$,

如图, 当点 P 在点 A 上方时, 过点 A 作 $AE \perp AD$ 交直线 DP 于点 E , 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 作 $EG \perp x$ 轴于点 G ,



$$\therefore AF = 2, DF = 4,$$

$$\therefore \angle ADP = 45^\circ, AE \perp AD,$$

$\therefore \triangle AED$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AD = AE = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle DAF + \angle EAF = 90^\circ, \angle DAF + \angle FDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FDA,$$

$$\text{在 } \triangle AFD \text{ 与 } \triangle EGA \text{ 中, } \begin{cases} \angle AFD = \angle EGB \\ \angle EAF = \angle FDA, \\ AE = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle EGA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = EG = 2, DF = AG = 4,$$

$\therefore$ 此时点 G 与点 B 重合,

$$\therefore E(1, 2),$$

设直线 DP 的解析式为 $y = kx + b$ ，代入 $E(1, 2)$ ， $D(-1, -4)$ ，得 $\begin{cases} k + b = 2 \\ -k + b = -4 \end{cases}$ ，

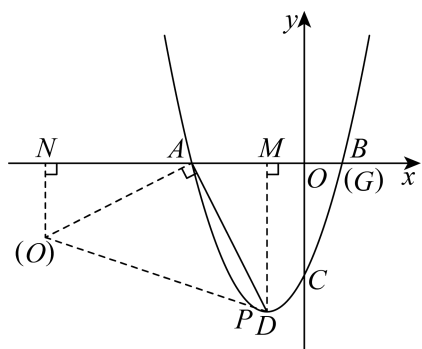
解得： $\begin{cases} k = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ ，

$\therefore y = 3x - 1$ ，

联立 $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$ (与点 D 重合，舍去)， $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ ，

$\therefore P(2, 5)$ ；

如图，当点 P 在点 A 下方时，过点 A 作 $AO \perp AD$ 交直线 DP 于点 O ，作 $DM \perp x$ 轴于点 M ，作 $ON \perp x$ 轴于点 N ，



同理可求： $\triangle AMD \cong \triangle ONA$ (AAS)，

$\therefore AM = ON = 2$ ， $DM = AN = 4$ ，

$\therefore O(-7, -2)$ ，

设直线 DP 的解析式为 $y = kx + b$ ，代入 $O(-7, -2)$ ， $D(-1, -4)$ ，得 $\begin{cases} -7k + b = -2 \\ -k + b = -4 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{13}{3} \end{cases}$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$ ，

联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{13}{3} \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$ (与点 D 重合，舍去)， $\begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{35}{9} \end{cases}$ ，

$$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{35}{9}\right);$$

$$\therefore \text{当 } \angle ADP = 45^\circ \text{ 时, 点 } P \text{ 的坐标为 } (2, 5) \text{ 或 } \left(-\frac{4}{3}, -\frac{35}{9}\right).$$

【点睛】 本题主要考查抛物线的性质、平移变换、分类讨论，根据特殊角度构造辅助线求解坐标是解题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \parallel AB$ 且 $AC = AD$.

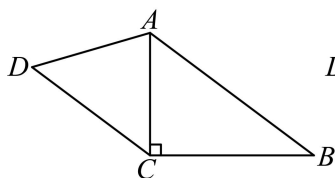


图1

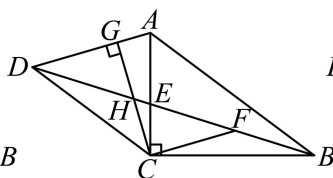


图2

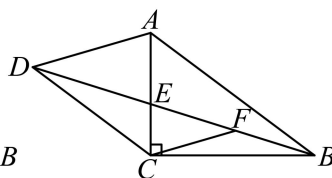


图3

(1) 求证: $2AC^2 = CD \cdot AB$;

(2) 连接 BD 交 AC 于点 E , 过点 C 作 $CF \parallel AD$ 交 BD 于点 F .

①过点 C 作 $CG \perp AD$ 分别交 AD 、 BD 于点 G 、 H , 如图 2 所示. 已知 $AB = 5$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$, 求 CF 和 CH 的长;

②如图 3, 如果 F 为 BE 的中点, 求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$ 的值.

【答案】 (1) 证明见详解

(2) ① CF 的长为 $\frac{54}{25}$ 和 CH 的长为 $\frac{36}{25}$

$$\textcircled{2} \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

【解析】

【分析】 (1) 首先根据 $AC = AD$ 构造垂线结合“三线合一”得到中线, 即可证明 $\triangle COA \sim \triangle ACB$, 进而可以得到 $2AC^2 = CD \cdot AB$;

(2) ①: 首先利用 $AB = 5$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$, 进行设参数求解直角三角形三边的长, 再通过 $2AC^2 = CD \cdot AB$, 得到 $CD = \frac{18}{5}$, 再证明 $\triangle DCF \sim \triangle BAC$ 即可求得 $CF = \frac{54}{25}$; 再根据等面积法求得 $CG = \frac{72}{25}$, 利用勾股定理求得 $DG = \frac{54}{25}$, 最后利用 $CF \parallel AD$ 得到 $\triangle DGH \sim \triangle FCH$ 且相似比为 1, 即可得到 $GH = CH = \frac{1}{2}CG$

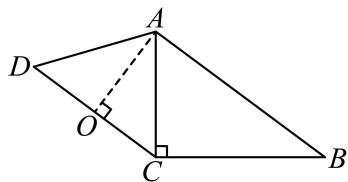
进而求解 CH 的长为 $\frac{36}{25}$;

②: 首先构造辅助线再将 $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}$ 转化为 $\frac{DM}{BC}$, 再利用 $\triangle DME \sim \triangle BCE$ 将 $\frac{DM}{BC}$ 转化为 $\frac{DE}{BE}$, 再利用比例的

传递性和证明 $\triangle DCF \sim \triangle BAD$ 得到 $\frac{DE}{BE} = \frac{DE + \frac{1}{2}BE}{DE + BE}$, 即可解得 $\frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即可得到 $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}$.

【小问 1 详解】

解: 如图, 作 $AO \perp CD$ 于点 O ,



$$\because AC = AD, AO \perp CD,$$

$$\therefore CO = \frac{1}{2}CD,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle BAC,$$

$$\because \angle AOC = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle COA \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BA} = \frac{CO}{AC}, \text{ 即 } \frac{AC}{BA} = \frac{\frac{1}{2}CD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = \frac{1}{2}CD \cdot AB,$$

$$\therefore 2AC^2 = CD \cdot AB;$$

【小问 2 详解】

解: ① $\because AB = 5, \tan \angle ABC = \frac{3}{4},$

设 $AC = 3k, BC = 4k,$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 解得: $k = 1$ (负值舍去),

$$\therefore AC = 3, BC = 4,$$

由 (1) 得: $2AC^2 = CD \cdot AB$, 解得: $CD = \frac{18}{5},$

$$\therefore CF \parallel AD,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle BDA,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} = \frac{AB}{CD}, \text{ 即 } \frac{3}{CF} = \frac{5}{\frac{18}{5}}, \text{ 解得: } CF = \frac{54}{25};$$

$$\therefore CD = \frac{18}{5},$$

$$\text{由 (1) 得: } CO = \frac{1}{2}CD = \frac{9}{5}, \text{ 易得: } AO = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{2}CD \cdot AO = \frac{1}{2}AD \cdot CG,$$

$$\therefore CG = \frac{72}{25},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CGD \text{ 中, } DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = \frac{54}{25},$$

$$\therefore CF \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle DGH \sim \triangle FCH,$$

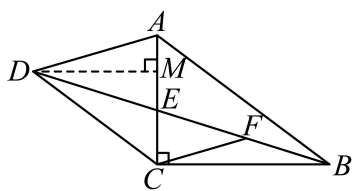
$$\therefore \frac{DG}{FC} = \frac{GH}{CH}, \text{ 即 } \frac{GH}{CH} = 1,$$

$$\therefore GH = CH = \frac{1}{2}CG,$$

$$\therefore CH = \frac{36}{25};$$

$$\therefore CF \text{ 的长为 } \frac{54}{25}, CH \text{ 的长为 } \frac{36}{25};$$

②: 如图, 作 $DM \perp AC$ 于点 M ,



$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DM}{\frac{1}{2}AC \cdot BC} = \frac{DM}{BC},$$

$$\therefore DM \perp AC, BC \perp AC,$$

$$\therefore \triangle DME \sim \triangle BCE,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{DM}{BC} = \frac{DE}{BE}, \\
&\therefore CD \parallel AB, \\
&\therefore \angle CDF = \angle ABD, \quad \triangle DCE \sim \triangle BAE, \\
&\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{CD}{AB}, \\
&\therefore CF \parallel AD, \\
&\therefore \angle DFC = \angle BDA, \\
&\therefore \triangle DCF \sim \triangle BAD, \\
&\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{CD}{AB}, \\
&\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{DF}{BD}, \quad \text{即} \quad \frac{DE}{BE} = \frac{DE+EF}{DE+BE} = \frac{DE+\frac{1}{2}BE}{DE+BE}, \\
&\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{DE+\frac{1}{2}BE}{DE+BE}, \quad \text{即} \quad DE^2 + DE \cdot BE = DE \cdot BE + \frac{1}{2}BE^2, \\
&\therefore \frac{DE^2}{BE^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad \frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore \frac{DM}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形、平行线定理、比例的性质，根据题意构造辅助线得到相似三角形是解题的关键.

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫