

虹口区 2025 学年度初三年级第一次学生学习能力诊断练习

数学练习卷

2026.1

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、练习卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列四组线段中, 成比例的是 ()

- A. 1, 2, 3, 4; B. 2, 3, 4, 5; C. 1, 2, 3, 5; D. 2, 3, 4, 6.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查成比例线段的概念, 判断四条线段是否成比例, 可将四条线段的长度按从小到大排序, 看最小线段与最长线段的乘积是否等于另外两条线段的乘积. 若相等, 则四条线段成比例; 反之, 则不成比例.

【详解】解: A、 $1 \times 4 = 4, 2 \times 3 = 6, 4 \neq 6$, $\therefore$ 选项 A 中的四条线段不成比例;

B、 $2 \times 5 = 10, 3 \times 4 = 12, 10 \neq 12$, $\therefore$ 选项 B 中的四条线段不成比例;

C、 $1 \times 5 = 5, 2 \times 3 = 6, 5 \neq 6$, $\therefore$ 选项 C 中的四条线段不成比例;

D、 $2 \times 6 = 12, 3 \times 4 = 12, 12 = 12$, $\therefore$ 选项 D 中的四条线段成比例;

故选: D.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 已知 $AC = 3, BC = 4$, 下列锐角三角比中, 值为 $\frac{3}{4}$ 的是 ()

- A. $\sin B$ B. $\cos B$ C. $\tan B$ D. $\cot B$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的相关计算, 勾股定理. 结合在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3, BC = 4$, 运用勾股定理求斜边 AB , 再根据锐角三角函数的定义计算 $\angle B$ 的各个三角函数值, 即可作答.

【详解】解：∵在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

∵ $\angle B$ 的对边为 $AC = 3$ ，邻边为 $BC = 4$ ，斜边为 $AB = 5$ ，

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5}, \tan B = \frac{3}{4}, \cot B = \frac{4}{3},$$

故选：C.

3. 已知 $y = (m-3)x^{|m-1|}$ (m 为常数) 是二次函数，那么 m 的值是 ()

A. 3

B. -1

C. -3

D. 3 或 -1

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的定义. 根据二次函数的定义， x 的指数必须为 2，且系数不为零，进行分析，即可作答.

【详解】解：∵ $y = (m-3)x^{|m-1|}$ (m 为常数) 是二次函数，

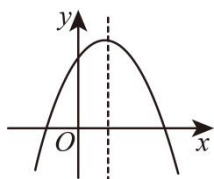
$$\therefore m-3 \neq 0, |m-1| = 2,$$

$$\therefore m \neq 3, m-1 = \pm 2,$$

解得 $m = -1$ ，

故选：B.

4. 如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像，那么下列说法中，正确的是 ()



A. $a > 0$;

B. $b > 0$;

C. $b < 0$;

D. $c < 0$.

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与系数的关系，利用抛物线开口方向确定 a 的符号，利用对称轴方程可确定 b 的符号，利用抛物线与 y 轴的交点位置可确定 c 的符号.

【详解】解：∵抛物线开口向下，

∴ $a < 0$ ，故选项 A 不正确；

∴ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧,

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

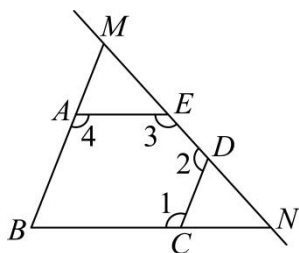
∴ $b > 0$, 故选项 B 正确, 选项 C 不正确;

∴ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

∴ $c > 0$, 故选项 D 不正确.

故选: B.

5. 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $AE \parallel BC$, 延长 BA 、 BC , 分别交直线 DE 于点 M 、 N . 如果添加下列一个条件后, 仍无法判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$, 那么这个条件是 ()



- A. $\angle 2 = \angle 3$ B. $CD \parallel AB$ C. $\angle 1 = \angle 4$ D. $\angle B + \angle 1 = 180^\circ$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查三角形相似的判定, 根据题意得 $\triangle MAE \sim \triangle MBN$, 逐个判断各选项是否可证 $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ 即可.

【详解】解: $\because AE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle MAE \sim \triangle MBN,$$

选项 A: 添加 $\angle 2 = \angle 3$, 可得 $\angle AEM = \angle CDN$ 无法判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$;

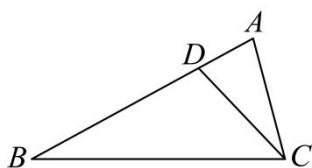
选项 B: 添加 $CD \parallel AB$, 可得 $\triangle DCN \sim \triangle MBN$, 可以判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$;

选项 C: 添加 $\angle 1 = \angle 4$, 可得 $\angle B + \angle 1 = 180^\circ$, $CD \parallel AB$, $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ 可以判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$;

选项 D: 添加 $\angle B + \angle 1 = 180^\circ$, 可得 $CD \parallel AB$, $\triangle DCN \sim \triangle MBN$ 可以判定 $\triangle MAE \sim \triangle DCN$;

故选 A.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, 点 D 在边 AB 上, 且 $\angle ACD = \angle B$, 如果 $AD = 2$, 那么 BD 的长是 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】 D**【解析】**

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，先根据 $\angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，整理得 $AC^2 = AB \times AD$ ，又因为 $AB = 2AC$ ， $AD = 2$ ，求出 $AC = 4$ ，再把数值代入 $BD = AB - AD$ 进行计算，即可作答.

【详解】 解： $\because \angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AB \times AD,$$

$$\because AB = 2AC, \quad AD = 2,$$

$$\therefore AC^2 = 2AC \times 2,$$

解得 $AC = 4$ 或 $AC = 0$ (不合题意，舍去)，

$$\therefore AB = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 8 - 2 = 6,$$

故选：D.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算： $3\vec{a} - 2(\vec{b} - \vec{a}) =$ _____.

【答案】 $5\vec{a} - 2\vec{b}$ **【解析】**

【分析】 本题考查了向量的运算，根据向量的数乘和加法运算法则，先运用分配律将括号展开，再合并同类向量即可得到答案.

【详解】 解： $3\vec{a} - 2(\vec{b} - \vec{a}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{a} = (3\vec{a} + 2\vec{a}) - 2\vec{b} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$.

故答案为： $5\vec{a} - 2\vec{b}$.

8. 如果抛物线 $y = (a-1)x^2$ (a 为常数) 开口向下，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 1$ **【解析】**

【分析】 本题考查了二次函数的性质. 根据二次函数的性质, 当二次项系数小于 0 时, 抛物线开口向下, 进行分析, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = (a-1)x^2$ 的开口向下,

$$\therefore a-1 < 0,$$

解得 $a < 1$.

故答案为: $a < 1$

9. 已知点 $A(-5, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 都在二次函数 $y = a(x-1)^2$ ($a < 0$) 的图像上, 那么 y_1 _____ y_2 (填 “>”、“<” 或 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的性质, 由 $y = a(x-1)^2$ ($a < 0$), 可知函数图像开口向下, 对称轴为 $x = 1$, 再根据增减性判断即可.

【详解】 解: 由 $y = a(x-1)^2$ ($a < 0$), 可知函数图像开口向下, 对称轴为 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$$\because -5 < -3,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故答案为 <.

10. 小丽为了画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像, 列出了表 (信息不全), 那么 m 的值是_____.

x	...	-5	-4	-2	0	m	...
y	...	10	5	1	5	10	...

【答案】

1

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数的图象与性质, 根据二次函数的对称性, 由点 $(-4, 5)$ 和 $(0, 5)$ 确定对称轴, 再利用点 $(-5, 10)$ 和 $(m, 10)$ 关于对称轴对称求解 m 即可.

【详解】解：由点 $(-4,5)$ 和 $(0,5)$ 纵坐标相同，可得它们关于对称轴对称，对称轴为 $x = \frac{-4+0}{2} = -2$.

所以，点 $(-5,10)$ 和 $(m,10)$ 也关于对称轴对称，

$$\text{因此 } \frac{-5+m}{2} = -2,$$

解得 $m = 1$.

故答案为：1.

11. 已知两个相似三角形的相似比为 $2:3$ ，且这两个三角形的周长之和为 25 ，那么其中较小三角形的周长是_____.

【答案】10

【解析】

【分析】本题主要考查相似三角形的性质，根据相似三角形的周长比等于相似比设较小三角形周长为 $2k$ ，较大三角形周长为 $3k$ ，根据周长之和为 25 列方程求解.

【详解】解： $\because$ 两个相似三角形的相似比为 $2:3$ ，

$\therefore$ 它们的周长比为 $2:3$.

设较小三角形的周长为 $2k$ ，较大三角形周长为 $3k$ ，则 $2k + 3k = 25$ ，即 $5k = 25$ ，

解得 $k = 5$ ，

$\therefore$ 较小三角形的周长为 $2 \times 5 = 10$.

故答案为：10.

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，如果 $AB = 6$ ， $\sin A = \frac{1}{3}$ ，那么 AC 的长是_____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查正弦，根据正弦的定义， $\sin A$ 等于对边 BC 与斜边 AB 的比，结合勾股定理求解.

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$ ， $AB = 6$ ，

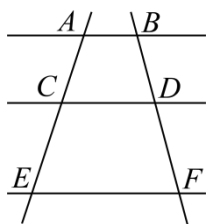
$$\text{所以 } BC = AB \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = 2.$$

由勾股定理， $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，即 $6^2 = AC^2 + 2^2$ ，

$$\text{解得： } AC = 4\sqrt{2}.$$

故答案为： $4\sqrt{2}$.

13. 如图, 直线 $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $\frac{AC}{CE} = \frac{3}{4}$, $BD = 6$ 那么 BF 的长是_____.



【答案】 14

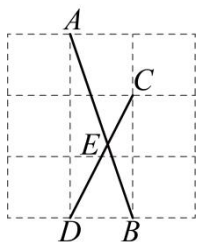
【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例, 由 $\frac{AC}{CE} = \frac{3}{4}$, 得 $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{7}$, 由 $AB \parallel CD \parallel EF$, 得 $\frac{BD}{BF} = \frac{3}{7}$ 即可解答.

【详解】 解: $\because \frac{AC}{CE} = \frac{3}{4}$,
 $\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$,
 $\because AB \parallel CD \parallel EF$,
 $\therefore \frac{BD}{BF} = \frac{3}{7}$,
 $\because BD = 6$,
 $\therefore BF = \frac{7}{3}BD = \frac{7}{3} \times 6 = 14$,

故答案为 14.

14. 如图, 在正方形网格中, 每个小正方形的边长都相等, 点 A 、 B 、 C 、 D 都在格点上, 连接 AB 、 CD 交于点 E , 那么 $\frac{CE}{DE}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用平行判定相似, 相似三角形的判定与性质综合, 利用相似三角形的性质求解等知识点, 解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

先证明 $\triangle BCE \sim \triangle ADE$, 再列出比例式求解即可.

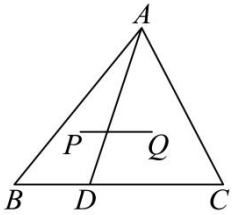
【详解】解：∵ $BC \parallel AD$,

∴ $\triangle BCE \sim \triangle ADE$,

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 连接 AD , 点 P 和 Q 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心. 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{PQ}$ 是_____.

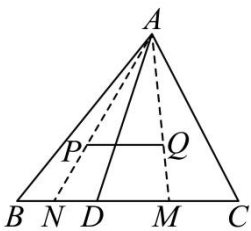


【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查了向量的运算, 重心, 相似三角形的判定与性质, 先根据点 P 和 Q 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心, 得 $\frac{AP}{AN} = \frac{2}{3} = \frac{AQ}{AM}$, $ND = \frac{1}{2}BD$, $DM = \frac{1}{2}DC$, 证明 $\triangle PAQ \sim \triangle NAM$, 因为 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, 整理得 $NM = \frac{1}{2}BC$, 所以 $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, 故 $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$, 即可作答.

【详解】解: 连接 AP, AQ , 并延长 AP, AQ 分别交 BC 于点 N, M ,



∵ 点 P 和 Q 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心.

$$\therefore \frac{AP}{AN} = \frac{2}{3} = \frac{AQ}{AM}, \quad ND = \frac{1}{2}BD, \quad DM = \frac{1}{2}DC$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle NAM,$$

$$\therefore \triangle PAQ \sim \triangle NAM,$$

$$\text{故 } \frac{PQ}{NM} = \frac{AQ}{AM} = \frac{2}{3},$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\text{则 } NM = ND + DM = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\because \frac{PQ}{NM} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore PQ = \frac{2}{3}NM,$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NM} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

16. 对于某个函数，如果当 $x = x_0$ 时，函数值 $y = -x_0$ ，那么我们称 $(x_0, -x_0)$ 为此函数的“反点”。例如函数 $y = 2x - 3$ ，因为当 $x = 1$ 时 $y = -1$ ，所以 $(1, -1)$ 为此函数的“反点”。二次函数 $y = x^2 - 5x + 4$ 的“反点”是_____。

【答案】 $(2, -2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数图象上的点的坐标特征，根据“反点”定义，令函数值等于自变量的相反数，建立方程求解即可。

【详解】 解：设反点对应的自变量为 x_0 ，则函数值 $y = -x_0$ ，代入函数解析式得：

$$x_0^2 - 5x_0 + 4 = -x_0$$

$$\text{整理得: } x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$$

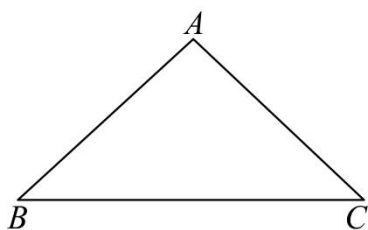
$$\text{解得: } x_0 = 2$$

$$\therefore y = -x_0 = -2,$$

$$\therefore \text{反点为 } (2, -2).$$

故答案为: $(2, -2)$ 。

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{2}{3}$ 。点 D 在边 BC 上，连接 AD ，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折得到 $\triangle AED$ ，点 B 对应点 E ，连接 CE ，如果 $CE \parallel AB$ ，那么 BD 的长是_____。



【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质，勾股定理，平行线的性质，解直角三角形的相关计算，正确掌握相关性内容是解题的关键.

先结合 $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{2}{3}$, $AH \perp BC$, 求出 $AH = \frac{20}{3}$, 运用勾股定理得

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$, $CH = \frac{10\sqrt{5}}{3}$, 结合角的整理得 $BD = AD$, 即 $DH = \frac{10\sqrt{5}}{3} - BD$, 运用

勾股定理得 $BD^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - BD\right)^2$, 解得 $BD = 3\sqrt{5}$.

【详解】 解: 过点 A 作 $AH \perp BC$, 如图所示:

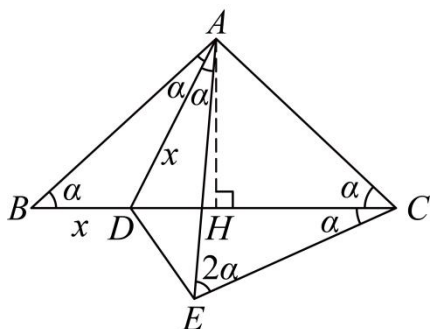
$\because AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{2}{3}$, $AH \perp BC$,

$\therefore \sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{2}{3}$, $BH = CH$,

即 $\frac{AH}{10} = \frac{2}{3}$,

$\therefore AH = \frac{20}{3}$,

则 $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - \frac{400}{9}} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$,



$\therefore$ 折叠,

$\therefore \angle BAD = \angle EAD, AB = AE = AC = 10,$
 $\therefore \angle AEC = \angle ACE,$
 $\therefore$ 设 $\angle BAD = \angle EAD = \alpha,$
 $\therefore \angle BAE = 2\alpha,$
 $\because CE \parallel AB,$
 $\therefore \angle AEC = \angle BAE = 2\alpha, \angle ABC = \angle ECB,$
 即 $\angle AEC = \angle ACE = 2\alpha,$
 $\because AB = AC,$
 $\therefore \angle ACE = \angle ACB + \angle ECB = \angle ACB + \angle ABC = 2\alpha,$
 即 $\angle ACB = \angle ABC = \alpha,$
 $\therefore \angle BAD = \angle ABC = \alpha,$
 $\therefore BD = AD,$

$$\therefore DH = BH - BD = \frac{10\sqrt{5}}{3} - BD,$$

$\because AH \perp BC,$

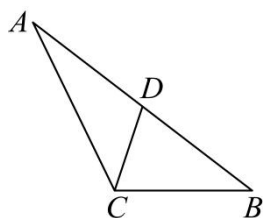
$$\therefore AD^2 = AH^2 + DH^2,$$

$$\therefore BD^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - BD\right)^2,$$

解得 $BD = 3\sqrt{5}.$

故答案为: $3\sqrt{5}.$

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5, \cot A = 2, \sin B = \frac{3}{5}, D$ 是 AB 的中点. E 是线段 AC 延长线上一点, 连接 BE , 如果四边形 $BDCE$ 的一组对角相等且另一组对角不相等, 那么 AE 的长是_____.



【答案】 $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ 或 $10\sqrt{5}$

【解析】

【分析】如图所示，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ，解直角三角形求出 $CF = 3$ ，利用勾股定理求出

$BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = 4$ ，解直角三角形求出 $AF = 6$ ，进而求出 AB ， AC ， AD ， DF ， CD 的长度，

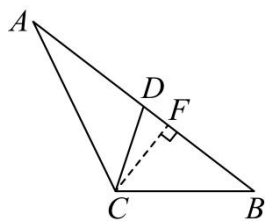
然后根据题意分两种情况讨论：当 $\angle CDB = \angle E$ 时，连接 BE ， CE ，在 BF 上取点 G ，使 $DF = GF = 1$ ，

证明出 $\triangle ACG \sim \triangle ABE$ ，得到 $\frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AE}$ ，然后代入求解即可；当 $\angle DCE = \angle DBE$ 时，过点 D 作 $DH \perp AC$

于点 H ，过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M ，利用勾股定理求出 $DH = \sqrt{5}$ ， $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{5} = DH$ ，

证明出 $\triangle DHC$ 是等腰直角三角形，然后解直角三角形求解即可。

【详解】解：如图所示，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ，



$$\because \sin B = \frac{3}{5}, \quad BC = 5,$$

$$\therefore \frac{CF}{BC} = \frac{3}{5}, \quad \text{即} \quad \frac{CF}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CF = 3,$$

$$\therefore BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = 4,$$

$$\because \cot A = \frac{AF}{CF} = 2,$$

$$\therefore \frac{AF}{3} = 2,$$

$$\therefore AF = 6,$$

$$\therefore AB = AF + FB = 6 + 4 = 10, \quad AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = 3\sqrt{5},$$

$\because D$ 是 AB 的中点，

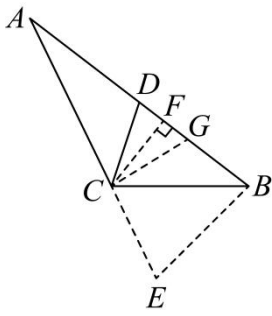
$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\therefore DF = AF - AD = 6 - 5 = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$\because$ 四边形 $BDCE$ 的一组对角相等且另一组对角不相等，

如图所示，当 $\angle CDB = \angle E$ 时，连接 BE ， CE ，在 BF 上取点 G ，使 $DF = GF = 1$ ，



$$\therefore AG = AF + FG = 6 + 1 = 7,$$

$$\because CF \perp AB, \quad DF = GF = 1,$$

$$\therefore CD = CG = \sqrt{10},$$

$$\therefore \angle CDG = \angle CGD,$$

$$\because \angle CDB = \angle E,$$

$$\therefore \angle E = \angle CGD,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle A,$$

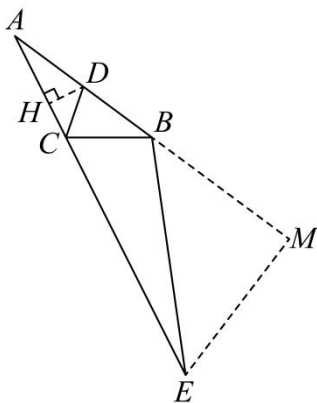
$$\therefore \triangle ACG \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AE},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{7}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{14\sqrt{5}}{3};$$

如图所示，当 $\angle DCE = \angle DBE$ 时，过点 D 作 $DH \perp AC$ 于点 H ，过点 E 作 $EM \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 M ，



$$\therefore \cot A = \frac{DH}{AH} = 2,$$

$$\therefore AH = 2DH,$$

$$\because AD=5, \quad AH^2 + DH^2 = AD^2,$$

$$\therefore (2DH)^2 + DH^2 = 5^2,$$

$$\therefore DH = \sqrt{5},$$

$$\because CD = \sqrt{10},$$

$$\therefore CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{5} = DH,$$

$\therefore \triangle DHC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle HCD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DBE = 180^\circ - \angle HCD = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle EBM = 180^\circ - \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\because EM \perp AB,$$

$\therefore \triangle BEM$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BM = EM,$$

$$\therefore \cot A = \frac{AM}{EM} = \frac{AB + EM}{EM} = \frac{10 + EM}{EM} = 2,$$

$$\therefore BM = EM = 10,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AM^2 + EM^2} = 10\sqrt{5},$$

综上所述, AE 的长是 $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ 或 $10\sqrt{5}$.

故答案为: $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ 或 $10\sqrt{5}$.

【点睛】此题考查了解直角三角形, 勾股定理, 垂直平分线的性质, 等腰三角形的判定, 相似三角形的性质和判定等知识, 解题的关键是正确作出辅助线.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos^2 30^\circ - \frac{\tan 45^\circ}{1 - \cos 60^\circ} + \sin^2 45^\circ$.

【答案】 $-\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查特殊锐角三角函数值的混合运算, 原式分别代入特殊锐角三角函数值, 再根据实数的混合运算法则进行计算即可.

【详解】解： $\cos^2 30^\circ - \frac{\tan 45^\circ}{1 - \cos 60^\circ} + \sin^2 45^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} - 2 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{4}.$$

20. “已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(0, -5), B(-1, 0)$, 求抛物线 C_1 的表达式.” 上述题目中的黑色阴影部分由于墨水污染而无法辨认，因此导致题目缺失了一个条件无法解答，经查询发现抛物线 C_1 的表达式为 $y = x^2 - 4x - 5$.

- (1) 请根据已有的信息添加一个缺失的条件: _____;
- (2) 将抛物线 C_1 向上平移 m 个单位后得到抛物线 C_2 , 如果抛物线 C_2 的顶点关于原点的对称点在抛物线 C_1 上, 求 m 的值.

【答案】(1) $C(5, 0)$ (答案不唯一)

(2) $m = 2$

【解析】

【分析】本题考查根与系数关系, 抛物线的平移, 关于原点对称的点的坐标;

(1) 由 $y = x^2 - 4x - 5$, 经过 $B(-1, 0)$, 得 $x_1 = -1$ 是 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的一个根, 求另一个根即可解答;

(2) 求出平移后的函数解析式的顶点坐标和关于原点对称的点的坐标, 再代入 $y = x^2 - 4x - 5$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because y = x^2 - 4x - 5$, 经过 $B(-1, 0)$,

$\therefore x_1 = -1$ 是 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的一个根,

由根与系数关系 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, 得 $-1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$, 即 $-1 + x_2 = 4$,

解得 $x_2 = 5$,

$\therefore$ 添加的条件为 $C(5, 0)$;

【小问 2 详解】

解：将抛物线 C_1 向上平移 m 个单位后解析式为 $y = x^2 - 4x - 5 + m = (x - 2)^2 - 9 + m$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点坐标为 $(2, -9 + m)$,

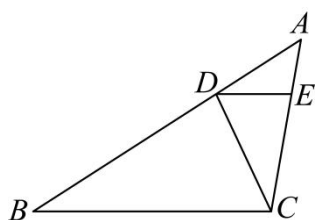
$(2, -9 + m)$ 关于原点的对称点为 $(-2, 9 - m)$,

将 $(-2, 9 - m)$ 代入 $y = x^2 - 4x - 5$,

得 $9 - m = (-2)^2 - 4 \times (-2) - 5$ 即 $9 - m = 7$,

解得 $m = 2$.

21. 如图, D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 上的点, 且 $DE \parallel BC$, $DE = 4$, $BC = 12$, $AE = 3$.



(1) 求 CE 的长;

(2) 如果 $\angle ACD = \angle ABC$, 求 CD 的长.

【答案】(1) $CE = 6$

(2) $DC = 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 根据 $DE \parallel BC$, 得 $\triangle AED \sim \triangle ACB$, 把数值代入 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ 进行计算, 即可作答.

(2) 结合 $\angle ACD = \angle ABC$, 证明 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, 又因为 $\triangle AED \sim \triangle ACB$, 故 $\triangle ADC \sim \triangle AED$, 把数值代入 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{DC}{ED}$, 得 $AD = 3\sqrt{3}$ (负值已舍去), 即 $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{DC}{4}$, 解得 $DC = 4\sqrt{3}$, 即可作答.

【小问 1 详解】

解: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle ACB$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB$,

则 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$,

$\because DE = 4, BC = 12, AE = 3$,

$$\therefore \frac{4}{12} = \frac{3}{AC},$$

$$\therefore AC = 9,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 9 - 3 = 6.$$

【小问 2 详解】

解： $\because \angle ACD = \angle ABC$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB,$$

由 (1) 得 $\triangle AED \sim \triangle ACB$ ， $AC = 9$ ，

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle AED,$$

$$\text{则 } \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{DC}{ED},$$

$$\therefore \frac{9}{AD} = \frac{AD}{3} = \frac{DC}{4},$$

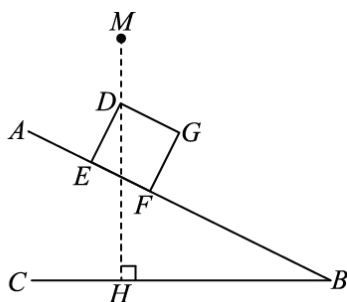
$$\therefore AD^2 = 27$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{3} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{DC}{4}$$

解得 $DC = 4\sqrt{3}$.

22. 如图，某仓库有一传送带运输货柜，其侧面示意图如图所示， BC 为地面， AB 为斜坡上的传送带， $\angle B = 26.5^\circ$ ，四边形 $DEFG$ 是边长为 1.8 米的正方形. 点 M 为仓库卷帘门打开的最高位置，点 M 、 D 、 H 在同一直线上，点 D 到地面的距离 DH 为 5 米.



(1) 求 BE 的长 (精确到 0.1 米);

(2) 已知 M 到地面的距离 MH 为 6.8 米，如果正方形 $DEFG$ 的边长扩大为原来的 2 倍，能否继续利用该传送带运输? 请通过计算说明 (AB 足够长). (参考数据:

$\sin 26.5^\circ \approx 0.45$, $\cos 26.5^\circ \approx 0.90$, $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$)

【答案】(1) 7.6 米

(2) 正方形的边长扩大为原来的 2 倍, 不能继续利用该传送带运输, 说明见解析

【解析】

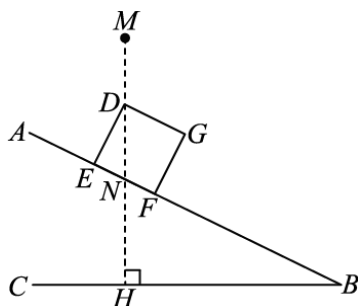
【分析】本题考查用锐角三角函数解直角三角形, 解题的关键是找到恰当的直角三角形, 灵活运用锐角三角函数解直角三角形, 注意单位和精确度.

(1) 记 AB 与 DH 交于点 N , 根据等角的余角相等得 $\angle EDN = \angle B = 26.5^\circ$, 在 $Rt\triangle DEN$ 中, 根据锐角三角函数求出 EN 和 DN 的长, 进而计算 NH 长, 在 $Rt\triangle BHN$ 中, 根据锐角三角函数求出 BN , 由 $BE = EN + BN$ 计算 BE 的长;

(2) 正方形 $DEFG$ 扩大 2 倍后为正方形 $D'E'F'G'$, 则新正方形边长 $D'E' = 1.8 \times 2 = 3.6$ 米, 在 $Rt\triangle D'E'N'$ 中, 根据锐角三角函数计算 $D'N$ 的长, 从而计算 $D'H$ 的长, 进而比较 $D'H$ 和 MH 的大小, 从而判断扩大后的正方形会不会被卷帘门 M 所影响到.

【小问 1 详解】

解: 如图, 记 AB 与 DH 交于点 N ,



$\because$ 四边形 $DEFG$ 是边长为 1.8 米的正方形,

$\therefore \angle DEN = 90^\circ$, $DE = 1.8$ 米,

$\therefore \angle EDN = 90^\circ - \angle DNE$,

$\because MH \perp BC$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BNH$,

$\because \angle DNE = \angle BNH$,

$\therefore \angle EDN = \angle B = 26.5^\circ$,

在 $Rt\triangle DEN$ 中, $\angle EDN = 26.5^\circ$,

由 $\tan \angle EDN = \frac{EN}{DE}$ 得, $EN = DE \cdot \tan 26.5^\circ \approx 1.8 \times 0.50 = 0.9$ (米),

由 $\cos \angle EDN = \frac{DE}{DN}$ 得, $DN = \frac{DE}{\cos 26.5^\circ} \approx \frac{1.8}{0.90} = 2.0$ (米),

在 $Rt\triangle BHN$ 中,

$$\angle B = 26.5^\circ, \quad NH = DH - DN = 5 - 2.0 = 3.0 \text{ (米)},$$

$$\text{由 } \sin B = \frac{NH}{BN} \text{ 得, } BN = \frac{NH}{\sin 26.5^\circ} \approx \frac{3.0}{0.45} \approx 6.67 \text{ (米)},$$

$$\therefore BE = EN + BN = 0.9 + 6.67 \approx 7.6 \text{ (米)},$$

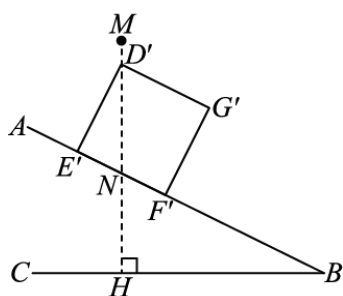
答: BE 的长约为 7.6 米;

【小问 2 详解】

解: 正方形的边长扩大为原来的 2 倍, 不能继续利用该传送带运输,

如图, 正方形 $DEFG$ 扩大 2 倍后为正方形 $D'E'F'G'$,

则新正方形边长 $D'E' = 1.8 \times 2 = 3.6$ 米,



在 $Rt\triangle D'E'N$ 中, $\angle E'D'N = 26.5^\circ$,

$$\text{由 } \cos \angle E'D'N = \frac{D'E'}{D'N} \text{ 得, } D'N = \frac{D'E'}{\cos 26.5^\circ} \approx \frac{3.6}{0.90} = 4.0 \text{ (米)},$$

$$\therefore D'H = D'N + NH = 4.0 + 3.0 = 7.0 \text{ (米)},$$

由 (1) 得 $NH = 3.0$ 米, $\therefore MH = 6.8$ 米,

$$\therefore MH < D'H,$$

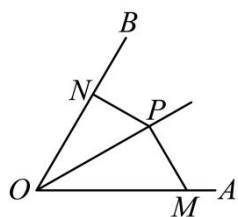
$\therefore$ 不能继续利用该传送带运输,

答: 正方形 $DEFG$ 的边长扩大为原来的 2 倍, 不能继续利用该传送带运输.

23. 【模型探究】

如图, 已知 M 、 N 分别是 $\angle AOB$ 边 OA 、 OB 上的点, P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, 满足

$$\angle MPN + \frac{1}{2} \angle AOB = 180^\circ. \text{ 求证: } OP^2 = OM \cdot ON.$$

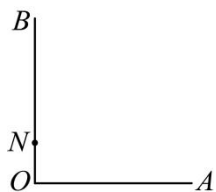


【模型应用】

(1) 已知 M 、 N 分别是 $\angle AOB$ 边 OA 、 OB 上的点, P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, 如果 $\angle AOB = 60^\circ$, $OM = 6$, $ON = 4$, $OP = 2\sqrt{6}$, 那么 $\angle MPN$ 的度数为_____;

(2) 如图, 已知 $\angle AOB = 90^\circ$, N 是边 OB 上一点, 请在边 OA 上选择一个合适的点 M , 并在 $\angle AOB$ 内部求作一个点 P , 满足 $\angle MPN = 135^\circ$ 且 $PM = 2PN$.

(要求: 尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法)



【答案】证明见解析; (1) 150° ; (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了角平分线的性质, 相似三角形的判定和性质, 尺规作图—作角平分线, 作线段, 灵活运用所学知识是解题的关键.

【模型探究】由 OP 平分 $\angle AOB$, 可得 $\angle NOP = \angle MOP = \frac{1}{2}\angle AOB$, 又由 $\angle MPN + \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ$, 可得 $\angle MPO = \angle PNO$, 从而 $\triangle ONP \sim \triangle OPM$, 即可得出结论;

(1) 由 $OM = 6$, $ON = 4$, $OP = 2\sqrt{6}$, 可得 $\frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM}$, 从而可证 $\triangle ONP \sim \triangle OPM$, 则 $\angle MPO = \angle PNO$, 再由 $\angle MPN = \angle MPO + \angle NPO$, $\angle NPO = 180^\circ - \angle PNO - \angle NOP$, 可得 $\angle MPN = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$, 即可求解;

(2) 先作 $\angle AOB$ 的平分线 OC , 则有 $\angle BOC = \angle COA = \frac{1}{2}\angle AOB$, 在 OC 截取 $OP = 2ON$, 再在 OA 截取 $OM = 2OP$, 则 $\frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{2}$, 从而 $\triangle ONP \sim \triangle OPM$, 则 $\frac{NP}{PM} = \frac{ON}{OP} = \frac{1}{2}$, 即 $PM = 2PN$, 同时 $\angle MPO = \angle PNO$, 则

$$\angle MPN = \angle MPO + \angle OPN = \angle MPO + (180^\circ - \angle PNO - \angle NOP) = \angle MPO + 180^\circ - \angle PNO - \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 90^\circ = 135^\circ, \text{ 则点 } P、$$

M 即为所求.

【详解】【模型探究】证明: $\because OP$ 平分 $\angle AOB$,

$$\therefore \angle NOP = \angle MOP = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

$$\therefore \angle MPN + \frac{1}{2}\angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MPO + \angle NPO + \angle NOP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MPO = 180^\circ - (\angle NPO + \angle NOP) = \angle PNO,$$

$$\therefore \triangle ONP \sim \triangle OPM,$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM},$$

$$\therefore OP^2 = OM \cdot ON.$$

解: (1) $\because OP$ 平分 $\angle AOB$, $\angle AOB = 60^\circ$

$$\therefore \angle NOP = \angle MOP = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore OM = 6, ON = 4, OP = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \frac{OP}{OM} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OM},$$

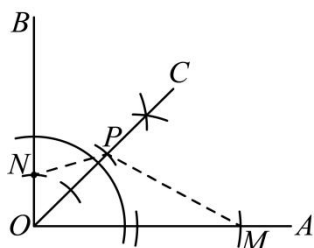
$$\therefore \triangle ONP \sim \triangle OPM,$$

$$\therefore \angle MPO = \angle PNO,$$

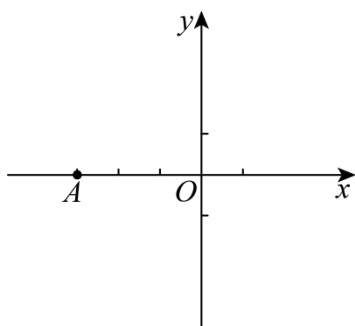
$$\therefore \angle MPN = \angle MPO + \angle OPN = \angle MPO + (180^\circ - \angle PNO - \angle NOP) = \angle MPO + 180^\circ - \angle PNO - \frac{1}{2} \angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 60^\circ = 150^\circ \text{ 故答案为:}$$

150°.

(2) 如图, 点 P 、 M 即为所求.



24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ ($a \neq 0$) 交 x 轴于点 $A(-3, 0)$ 和点 B , 交 y 轴于点 C , 抛物线的顶点为 D .



(1) 直接写出点 B 的坐标, 并用含 a 的代数式表示顶点 D 的坐标;

(2) 将该抛物线平移得到新抛物线, 所得新抛物线的最高点是 B , 且与 y 轴的交点为 E , 连接 AC 、 AE , 如果 $\triangle ACE$ 的面积为 6, 求 a 的值;

(3) 当点 D 的坐标为 $(-1, -4)$ 时, 如果点 P 在抛物线上, 且 $\angle ADP = 45^\circ$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $B(1, 0)$, $D(-1, -4a)$

(2) $a = -1$

(3) 当 $\angle ADP = 45^\circ$ 时, 点 P 的坐标为 $(2, 5)$ 或 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{35}{9}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 首先根据抛物线的对称轴即可得到点 B 的坐标, 并将点 A 的坐标代入抛物线得到 a 与 c 的关系, 再将对称轴代入写出顶点 D 的坐标即可;

(2) 首先写出平移后的抛物线的解析式, 并表示出点 E 的坐标, 进而得到 CE 的长度, 即可表示出 $\triangle ACE$ 的面积, 结合面积为 6 即可求解 a 的值;

(3) 首先根据点 D 的坐标为 $(-1, -4)$ 得到 a 的值即可得到抛物线的解析式, 分当点 P 在点 A 上方和当点 P 在点 A 下方进行讨论, 根据 $\angle ADP = 45^\circ$ 构造直角三角形, 即可求解直线 DP 上点 E 和 O 的坐标, 即可求解直线 DP 的解析式, 联立直线 DP 和抛物线即可得到点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because y = ax^2 + 2ax + c (a \neq 0)$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -\frac{2a}{2a} = -1$,

$\therefore A(-3, 0)$,

$\therefore B(1, 0)$;

$\therefore$ 抛物线交 x 轴于点 $A(-3, 0)$,

$\therefore 9a - 6a + c = 0$, 即 $c = -3a$,

将 $x = -1$ 和 $c = -3a$ 代入 $y = ax^2 + 2ax + c$, 得 $D(-1, -4a)$;

$\therefore B(1, 0)$, $D(-1, -4a)$;

【小问 2 详解】

解: 设平移后的抛物线为 $y' = a(x-1)^2$,

∴ 新抛物线与 y 轴的交点为 E ,

$$\therefore E(0, a),$$

∴ 抛物线交 y 轴于点 C ,

$$\therefore C(0, c), \text{ 即 } C(0, -3a),$$

$$\therefore CE = |a - (-3a)| = 4|a|,$$

$$\therefore A(-3, 0),$$

∴ 点 A 到 y 轴的距离为 3,

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 4|a| \times 3 = 6|a|,$$

∴ $\triangle ACE$ 的面积为 6,

$$\therefore 6|a| = 6, \text{ 解得: } a = \pm 1,$$

∴ 新的抛物线的最高点为点 B ,

∴ 新抛物线的开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore a = -1;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \therefore D(-1, -4),$$

∴ $a = 1$, 即抛物线开口向上,

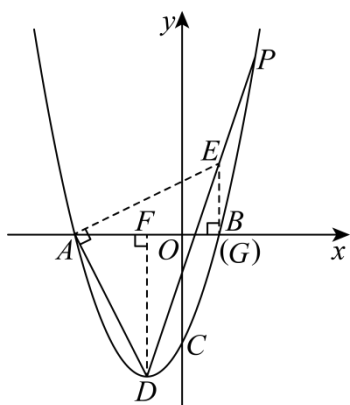
$$\therefore y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore A(-3, 0), D(-1, -4),$$

$$\therefore AD = \sqrt{(-3+1)^2 + (0+4)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{设 } P(p, p^2 + 2p - 3),$$

如图, 当点 P 在点 A 上方时, 过点 A 作 $AE \perp AD$ 交直线 DP 于点 E , 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 作 $EG \perp x$ 轴于点 G ,



$$\therefore AF = 2, \quad DF = 4,$$

$$\therefore \angle ADP = 45^\circ, \quad AE \perp AD,$$

$\therefore \triangle AED$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AD = AE = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle DAF + \angle EAF = 90^\circ, \quad \angle DAF + \angle FDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FDA,$$

$$\text{在 } \triangle AFD \text{ 与 } \triangle EGA \text{ 中, } \begin{cases} \angle AFD = \angle EGB \\ \angle EAF = \angle FDA, \\ AE = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle EGA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = EG = 2, \quad DF = AG = 4,$$

$\therefore$ 此时点 G 与点 B 重合,

$$\therefore E(1, 2),$$

$$\text{设直线 } DP \text{ 的解析式为 } y = kx + b, \text{ 代入 } E(1, 2), \quad D(-1, -4), \text{ 得 } \begin{cases} k + b = 2 \\ -k + b = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 3 \\ b = -1 \end{cases},$$

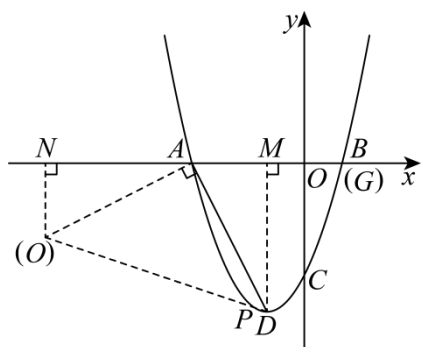
$$\therefore y = 3x - 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \text{ (与点 } D \text{ 重合, 舍去), } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases},$$

$$\therefore P(2, 5);$$

如图, 当点 P 在点 A 下方时, 过点 A 作 $AO \perp AD$ 交直线 DP 于点 O , 作 $DM \perp x$ 轴于点 M , 作 $ON \perp x$ 轴

于点 N ,



同理可求: $\triangle AMD \cong \triangle ONA$ (AAS),

$$\therefore AM = ON = 2, \quad DM = AN = 4,$$

$$\therefore O(-7, -2),$$

设直线 DP 的解析式为 $y = kx + b$, 代入 $O(-7, -2)$, $D(-1, -4)$, 得 $\begin{cases} -7k + b = -2 \\ -k + b = -4 \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{13}{3} \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x - \frac{13}{3},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{13}{3} \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \text{ (与点 } D \text{ 重合, 舍去), } \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{35}{9} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{35}{9}\right);$$

$$\therefore \text{当 } \angle ADP = 45^\circ \text{ 时, 点 } P \text{ 的坐标为 } (2, 5) \text{ 或 } \left(-\frac{4}{3}, -\frac{35}{9}\right).$$

【点睛】 本题主要考查抛物线的性质、平移变换、分类讨论, 根据特殊角度构造辅助线求解坐标是解题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \parallel AB$ 且 $AC = AD$.

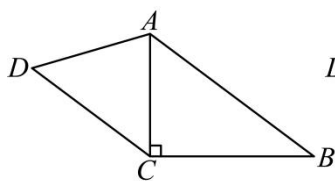


图1

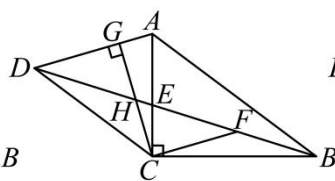


图2

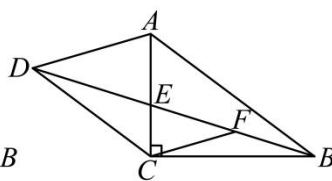


图3

(1) 求证: $2AC^2 = CD \cdot AB$;

(2) 连接 BD 交 AC 于点 E , 过点 C 作 $CF \parallel AD$ 交 BD 于点 F .

①过点 C 作 $CG \perp AD$ 分别交 AD 、 BD 于点 G 、 H , 如图 2 所示. 已知 $AB = 5$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$, 求 CF 和 CH 的长;

②如图 3, 如果 F 为 BE 的中点, 求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$ 的值.

【答案】(1) 证明见详解

(2) ① CF 的长为 $\frac{54}{25}$ 和 CH 的长为 $\frac{36}{25}$

$$\textcircled{2} \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

【解析】

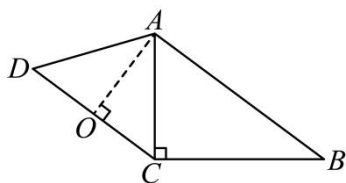
【分析】(1) 首先根据 $AC \perp AD$ 构造垂线结合“三线合一”得到中线, 即可证明 $\triangle COA \sim \triangle ACB$, 进而可以得到 $2AC^2 = CD \cdot AB$;

(2) ①: 首先利用 $AB = 5$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$, 进行设参数求解直角三角形三边的长, 再通过 $2AC^2 = CD \cdot AB$, 得到 $CD = \frac{18}{5}$, 再证明 $\triangle DCF \sim \triangle BAC$ 即可求得 $CF = \frac{54}{25}$; 再根据等面积法求得 $CG = \frac{72}{25}$, 利用勾股定理求得 $DG = \frac{54}{25}$, 最后利用 $CF \parallel AD$ 得到 $\triangle DGH \sim \triangle FCH$ 且相似比为 1, 即可得到 $GH = CH = \frac{1}{2}CG$ 进而求解 CH 的长为 $\frac{36}{25}$;

②: 首先构造辅助线再将 $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}$ 转化为 $\frac{DM}{BC}$, 再利用 $\triangle DME \sim \triangle BCE$ 将 $\frac{DM}{BC}$ 转化为 $\frac{DE}{BE}$, 再利用比例的传递性和证明 $\triangle DCF \sim \triangle BAD$ 得到 $\frac{DE}{BE} = \frac{DE + \frac{1}{2}BE}{DE + BE}$, 即可解得 $\frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即可得到 $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}$.

【小问 1 详解】

解: 如图, 作 $AO \perp CD$ 于点 O ,



$$\therefore AC = AD, \quad AO \perp CD,$$

$$\therefore CO = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle COA \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BA} = \frac{CO}{AC}, \quad \text{即} \quad \frac{AC}{BA} = \frac{\frac{1}{2}CD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = \frac{1}{2}CD \cdot AB,$$

$$\therefore 2AC^2 = CD \cdot AB;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: ①} \because AB = 5, \tan \angle ABC = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } AC = 3k, \quad BC = 4k,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中, } AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ 解得: } k = 1 \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore AC = 3, \quad BC = 4,$$

$$\text{由 (1) 得: } 2AC^2 = CD \cdot AB, \text{ 解得: } CD = \frac{18}{5},$$

$$\therefore CF \parallel AD,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle BDA,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} = \frac{AB}{CD}, \quad \text{即} \quad \frac{3}{CF} = \frac{5}{\frac{18}{5}}, \text{ 解得: } CF = \frac{54}{25};$$

$$\therefore CD = \frac{18}{5},$$

$$\text{由 (1) 得: } CO = \frac{1}{2}CD = \frac{9}{5}, \text{ 易得: } AO = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{2}CD \cdot AO = \frac{1}{2}AD \cdot CG,$$

$$\therefore CG = \frac{72}{25},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CGD \text{ 中, } DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = \frac{54}{25},$$

$$\therefore CF \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle DGH \sim \triangle FCH,$$

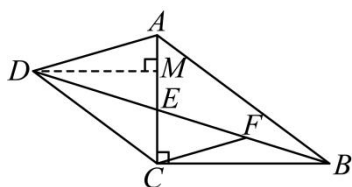
$$\therefore \frac{DG}{FC} = \frac{GH}{CH}, \text{ 即 } \frac{GH}{CH} = 1,$$

$$\therefore GH = CH = \frac{1}{2}CG,$$

$$\therefore CH = \frac{36}{25};$$

$$\therefore CF \text{ 的长为 } \frac{54}{25}, CH \text{ 的长为 } \frac{36}{25};$$

②: 如图, 作 $DM \perp AC$ 于点 M ,



$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DM}{\frac{1}{2}AC \cdot BC} = \frac{DM}{BC},$$

$$\therefore DM \perp AC, BC \perp AC,$$

$$\therefore \triangle DME \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{DM}{BC} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle ABD, \triangle DCE \sim \triangle BAE,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{CD}{AB},$$

$$\therefore CF \parallel AD,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle BDA,$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{CD}{AB},$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{DF}{BD}, \text{ 即 } \frac{DE}{BE} = \frac{DE+EF}{DE+BE} = \frac{DE+\frac{1}{2}BE}{DE+BE},$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{DE+\frac{1}{2}BE}{DE+BE}, \text{ 即 } DE^2 + DE \cdot BE = DE \cdot BE + \frac{1}{2}BE^2,$$

$$\therefore \frac{DE^2}{BE^2} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{DM}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形、平行线定理、比例的性质，根据题意构造辅助线得到相似三角形是解题的关键.