

初三数学期末练习卷

1. 本练习卷共 25 题，答题时，务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题（共 24 分，每小题 4 分）

1. 下列两个图形不一定是相似形的是（ ）

- A. 两个圆 B. 两个等边三角形 C. 两个正方形 D. 两个菱形

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了相似图形的概念，两个图形相似需对应角相等且对应边成比例.

圆、等边三角形和正方形都一定满足，而菱形角不一定相等，故不一定相似.

【详解】解：A、两个圆形状相同，一定相似，故选项不符合题意；

B、两个等边三角形，角均为 60° ，对应边成比例，一定相似，故选项不符合题意；

C、两个正方形，角均为 90° ，对应边成比例，一定相似，故选项不符合题意；

D、两个菱形对应角不一定相等（如一个为正方形，一个为一般菱形），不一定相似，故选项符合题意.

故选：D.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\sin A$ 等于（ ）

- A. $\frac{BC}{AC}$ B. $\frac{AC}{BC}$ C. $\frac{BC}{AB}$ D. $\frac{AC}{AB}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了求正弦，根据正弦函数的定义，在直角三角形中， $\sin A$ 等于 $\angle A$ 的对边与斜边的比值，即可获得答案.

【详解】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 斜边为 AB ， $\angle A$ 的对边为 BC ，

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB}.$$

故选：C.

3. 下列函数中，一定是二次函数的是（ ）

- A. $y = ax + 1$ B. $y = ax^2 + 1$

C. $y = (a^2 + 1)x^2$

D. $y = (ax + 1)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的识别，根据二次函数的定义，形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函数是二次函数，逐项分析判断即可.

【详解】解：∵ 二次函数需满足最高次项为 x^2 且系数不为 0，

A. $y = ax + 1$ ，最高次项为 x^1 ，不是二次函数，不符合题意；

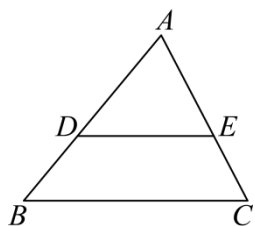
B. $y = ax^2 + 1$ ，若 $a = 0$ ，则 $y = 1$ ，不是二次函数，不符合题意；

C. $y = (a^2 + 1)x^2$ ，∵ $a^2 \geq 0$ ，∴ $a^2 + 1 \geq 1 > 0$ ，恒满足二次函数定义，符合题意；

D. $y = (ax + 1)^2 = a^2x^2 + 2ax + 1$ ，若 $a = 0$ ，则 $y = 1$ ，不是二次函数，不符合题意.

故选：C.

4. 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，下列条件中一定能判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

B. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

C. $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

D. $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BD}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平行线分线段成比例定理的应用，根据平行线分线段成比例定理对各个选项进行判断即可，掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解：A、由 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ ，能得到 $DE \parallel BC$ ，故选项符合题意；

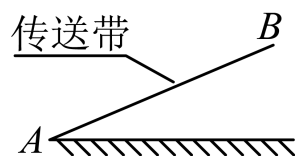
B、由 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故选项不符合题意；

C、由 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故选项不符合题意；

D、由 $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BD}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故选项不符合题意；

故选：A.

5. 如图，传送带和地面所成斜坡 AB 的坡度为 $1:2.4$ ，它把物体从点 A 处传送到斜坡高处，物体沿斜坡 AB 方向向上所经过的路程为 26 米，那么此时物体离地面的高度为（ ）



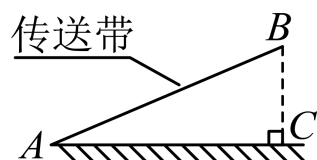
- A. 5 米 B. 10 米 C. 12 米 D. 13 米

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形，勾股定理，过点 B 作 BC 垂直地面于点 C ，设 $BC = x$ ，则 $AC = 2.4x$ ，再根据勾股定理即可求解，知道坡比的概念是解题的关键.

【详解】 解：过点 B 作 BC 垂直地面于点 C ，如图：



由题意可得： $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2.4}$ ，

设 $BC = x$ ，则 $AC = 2.4x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $BC^2 + AC^2 = AB^2$ ，即 $x^2 + (2.4x)^2 = 26^2$ ，

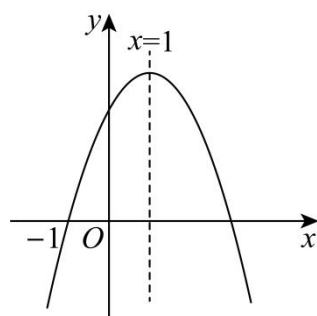
$\therefore 6.76x^2 = 676$ ，

解得： $x = 10$ ，

$\therefore$ 物体离地面的高度为 10 米，

故选： B.

6. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$ ，且过点 $(-1, 0)$ ，顶点在第一象限，其部分图像如图所示. 给出以下结论：① $ab < 0$ ；② $4a + 2b + c > 0$ ；③ $3a + c > 0$. 其中正确的选项是（ ）



- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【答案】A

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的图像与性质，
根据该抛物线开口向下，其对称轴是直线 $x=1$ ，可知 $a<0$ ， $b=-2a>0$ ，易得 $ab<0$ ，故结论①正确；
由该抛物线经过点 $(-1,0)$ ，且对称轴是直线 $x=1$ ，可知当 $x=2$ 时，可有 $y=4a+2b+c>0$ ，故结论②正确；当 $x=-1$ 时，可有 $y=a\times(-1)^2-b+c=3a+c=0$ ，故结论③错误.

【详解】 解：根据题意，可知该抛物线开口向下，

$\therefore a<0$ ，

$\therefore$ 其对称轴是直线 $x=1$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a > 0,$$

$\therefore ab < 0$ ，故结论①正确；

$\therefore$ 该抛物线经过点 $(-1,0)$ ，且对称轴是直线 $x=1$ ，

$\therefore$ 该抛物线经过点 $(3,0)$ ，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，可有 $y=4a+2b+c>0$ ，故结论②正确；

$\therefore$ 该抛物线经过点 $(-1,0)$ ，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，可有 $y=a\times(-1)^2-b+c=a-(-2a)+c=3a+c=0$ ，故结论③错误.

综上所述，结论正确的有①②.

故选：A.

二、填空题 (共 48 分，每小题 4 分)

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{x-y}{x+y}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的相关计算，由已知比例关系设参数表示变量，再代入所求分式计算即可.

【详解】 解：根据题意， $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ，可设 $x=3k$ ， $y=2k$ ($k \neq 0$)，

则 $\frac{x-y}{x+y} = \frac{3k-2k}{3k+2k} = \frac{k}{5k} = \frac{1}{5}$.

故答案为: $\frac{1}{5}$.

8. 计算: $2(\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{b} =$ _____.

【答案】 $2\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了线性向量、向量的加减等知识点，掌握数的运算律同样适用于向量是解题的关键.
先用分配律计算，再合并同类向量即可.

【详解】 解: $2(\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{b}$
 $= 2\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{b}$
 $= 2\vec{a} + (-2\vec{b} + 3\vec{b})$
 $= 2\vec{a} + \vec{b}$.

故答案为: $2\vec{a} + \vec{b}$.

9. 抛物线 $y = -2(x+3)^2$ 的顶点坐标是_____.

【答案】 $(-3, 0)$

【解析】

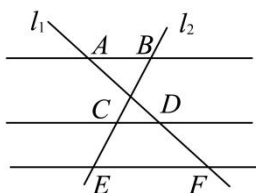
【分析】 本题主要考查了二次函数的性质，掌握二次函数顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点坐标 (h, k) 是解题的关键

直接根据二次函数顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ 的性质确定顶点坐标即可.

【详解】 解: $\because$ 二次函数顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点坐标 (h, k) ,
 $\therefore$ 抛物线 $y = -2(x+3)^2$ 的顶点坐标是 $(-3, 0)$.

故答案为: $(-3, 0)$.

10. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A 、 D 、 F 和点 B 、 C 、 E ．如果 $AD:DF = 3:2$ ， $BC = 21$ ，那么 $CE =$ _____.



【答案】 14

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例，根据平行线分线段成比例定理即可得到结论，找准对应线段是解题的关键.

【详解】 解: $\because AD:DF = 3:2$,

$$\therefore DF = \frac{2}{3} AD,$$

$$\because AB \parallel CD \parallel EF,$$

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{BC}{BE},$$

$$\because AF = AD + DF$$

$$\therefore \frac{AD}{AD + \frac{2}{3} AD} = \frac{AD}{\frac{5}{3} AD} = \frac{3}{5} = \frac{BC}{BE},$$

$$\because BC = 21,$$

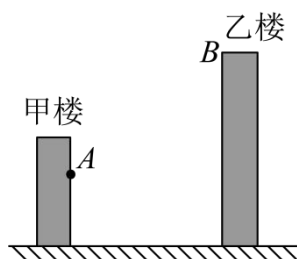
$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{21}{BE},$$

$$\therefore BE = 35,$$

$$\therefore CE = BE - BC = 35 - 21 = 14,$$

故答案为: 14.

11. 如图, 从甲楼的一窗口观测点 A 处测得乙楼的楼顶端 B 的仰角是 37° , 那么从乙楼顶端 B 处看 A 处的俯角是_____°.

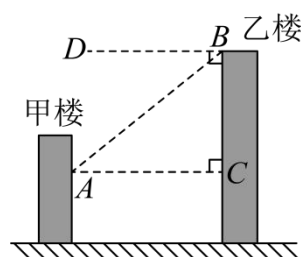


【答案】 37°

【解析】

【分析】 本题考查了仰角俯角的定义，平行线的性质，作 $AC \perp BC$ 于点 C ， $BD \perp BC$ ，由平行线的性质得到 $\angle DBA = \angle CAB = 37^\circ$ ，得出答案，掌握相关知识是解题的关键.

【详解】 解：如图，作 $AC \perp BC$ 于点 C ， $BD \perp BC$ ，



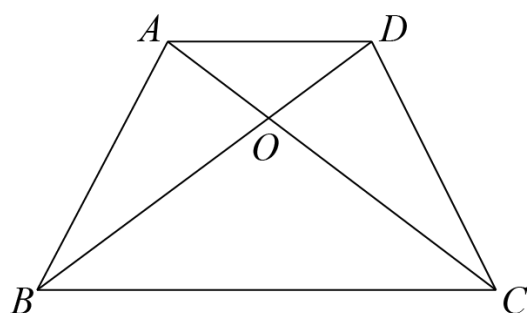
$\therefore BD \parallel AC$ ，

$\therefore \angle DBA = \angle CAB = 37^\circ$ ，

$\therefore$ 从乙楼顶端 B 处看 A 处的俯角是 37° ，

故答案为： 37° .

12. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，如果 $\triangle BCD$ 的面积是 $\triangle ABD$ 面积的 2 倍，那么 $\triangle BOC$ 与 $\triangle BDC$ 的面积之比是 ____.

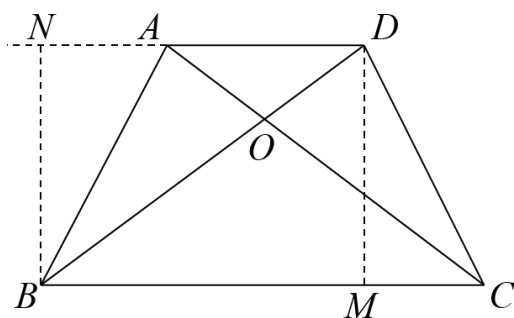


【答案】 2:3

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DM \perp BC$ ，垂足为 M ，过点 B 作 $BN \perp AD$ ，交 DA 的延长线于点 N ，根据已知易得 $DM=BN$ ，再根据 $S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle ABD}$ ，从而可得 $BC=2AD$ ，然后再证明 8 字模型相似三角形 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，利用相似三角形的性质可得 $\frac{AD}{BC} = \frac{DO}{BO} = \frac{1}{2}$ ，从而可得 $\frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$ ，最后根据 $\triangle BOC$ 与 $\triangle BDC$ 的高相等，即可解答.

【详解】 解：过点 D 作 $DM \perp BC$ ，垂足为 M ，过点 B 作 $BN \perp AD$ ，交 DA 的延长线于点 N ，



$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore BN = DM,$$

$$\because S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot DM = \frac{1}{2} AD \times BN,$$

$$\therefore BC = 2AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC, \angle DAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DO}{BO} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3},$$

$$\because \triangle BOC \text{ 与 } \triangle BDC \text{ 的高相等,}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3},$$

故答案为：2:3.

【点睛】本题考查了平行线间的距离，相似三角形的判定与性质，梯形，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

13. 如果将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 向上平移，使它经过点 $A(0, 3)$ ，那么所得新抛物线的表达式是

_____.

【答案】 $y = x^2 + 2x + 3$

【解析】

【详解】设平移后的抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 1 + b$,

把 $A(0, 3)$ 代入，得

$$3 = -1 + b,$$

解得 $b=4$,

则该函数解析式为 $y=x^2+2x+3$.

故答案为: $y=x^2+2x+3$

14. 二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的自变量 x 和函数值 y 的部分取值如下表所示:

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	5	2	n	p	5	...

那么 n _____ p (填 “>” “<” 或 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的对称性, 熟练掌握二次函数的对称性应用是解题的关键.

由二次函数对称性及给定点坐标, 确定对称轴为 $x=1$, 根据二次函数的性质比较 $x=1$ 和 $x=2$ 处的函数值大小即可.

【详解】 解: 由表格数据可得, 当 $x=-1$ 时, $y=5$, 当 $x=3$ 时, $y=5$,

$\therefore$ 二次函数对称轴为 $x = \frac{(-1)+3}{2} = 1$,

设二次函数解析式为 $y = a(x-1)^2 + k$,

把 $x=0$, $y=2$; $x=3$, $y=5$ 代入得,

$$\begin{cases} 2 = a + k \\ 5 = 4a + k \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ k = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y = (x-1)^2 + 1$,

$\therefore 1 > 0$,

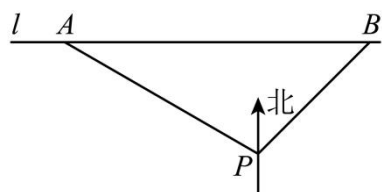
$\therefore$ 二次函数图象开口向上, 顶点处函数值最小,

$\therefore x=1$ 时, $y=n$, $x=2$ 时 $y=p$, 对称轴为 $x=1$,

$\therefore n < p$.

故答案为: <.

15. 如图，监测点 P 在距离道路 l 的 100 米处，道路上的货车 A 在监测点 P 的北偏西 60° 的方向，道路上的汽车 B 在监测点 P 的东北方向，此时货车 A 和汽车 B 相距_____米（结果保留根号）.

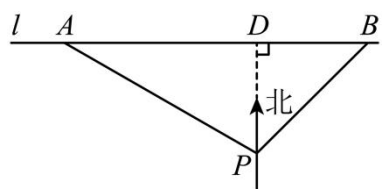


【答案】 $(100\sqrt{3} + 100)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用，过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D ，在 $\text{Rt}\triangle APD$ 和 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中，利用三角函数解得 AD, BD 的长度，然后由 $AB = AD + BD$ 求解即可.

【详解】 解： 如下图，过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D ，



由题意，可知 $\angle APD = 60^\circ, \angle BPD = 45^\circ, PD = 100$ （米），

在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中，可得 $\tan \angle APD = \frac{AD}{PD}$ ，

$\therefore AD = PD \times \tan \angle APD = 100 \times \tan 60^\circ = 100 \times \sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ （米），

在 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中，可得 $\tan \angle BPD = \frac{BD}{PD}$ ，

$\therefore BD = PD \times \tan \angle BPD = 100 \times \tan 45^\circ = 100 \times 1 = 100$ （米），

$\therefore AB = AD + BD = 100\sqrt{3} + 100$ （米），

$\therefore$ 此时货车 A 和汽车 B 相距 $(100\sqrt{3} + 100)$ 米.

故答案为： $(100\sqrt{3} + 100)$.

16. 广场上音乐喷泉中的喷头与地面齐平，喷出的水线呈一条抛物线，水线上水珠的高度 y （米）关于水珠与喷头的水平距离 x （米）的函数解析式是 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$. 那么水珠从喷出到落地时的水平距离为_____米.

【答案】 6

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的应用，由题意可知水珠落地时高度 $y=0$ ，代入二次函数解析式并求解，即可获得答案.

【详解】解：对于函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ ，令 $y=0$ ，得 $-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$ ，

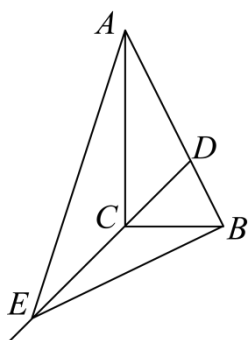
整理可得 $x^2 - 6x = 0$ ，

解得 $x_1 = 0, x_2 = 6$ ，

对应喷头位置，可知水珠落地时水平距离为 6 米.

故答案为：6.

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\tan\angle CAB = \frac{1}{2}$ ， CD 平分 $\angle ACB$ ， E 为 DC 延长线上一点，且 $\angle CEA = \angle CBE$ ，那么 $\frac{CD}{CE}$ 的值为_____.



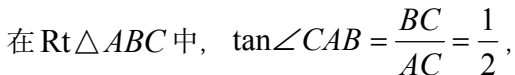
【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，解直角三角形，勾股定理等知识，过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 的延长线于点 F ，延长 AC 交 EF 于点 F ，根据题意设 $BC = k$ ，则 $AC = 2k$ ，证明 $\triangle ACE \sim \triangle ECB$ ，得到 $CE = \sqrt{2}k$ ，根据勾股定理 $EH = CH = k$ ，得到 $AH = AC + CH = 2k + k = 3k$ ，根据解直角三角形得到 $HF = \frac{1}{2}AH = \frac{3}{2}k$ ，证明 $\triangle DCB \sim \triangle DEF$ ，得到 $\frac{CD}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{k}{\frac{5k}{2}} = \frac{2}{5}$ ，即可得出答案，掌握相关知识

是解题的关键.

【详解】解：过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 的延长线于点 F ，延长 AC 交 EF 于点 F ，如图：



$\because \angle ACB = 90^\circ$, CD 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - \angle BCD, \text{ 即 } \angle ACE = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore CE^2 = AC \cdot BC = 2k \cdot k = 2k^2,$$

$$\therefore EF \parallel BC, AC \perp BC,$$

$$\therefore \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\therefore EH = CH,$$

$$\therefore EH^2 + CH^2 = CE^2 = (\sqrt{2}k)^2$$

$$\therefore AH = AC + CH = 2k + k = 3k ,$$

第 12页/共 30页

$$\therefore HF = \frac{1}{2}AH = \frac{3}{2}k,$$

$$\therefore EF = EG + HF = k + \frac{3}{2}k = \frac{5k}{2},$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

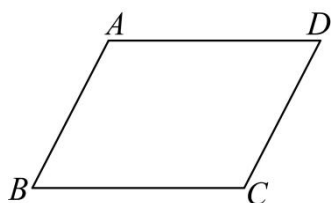
$$\therefore \triangle DCB \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{k}{\frac{5k}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{CD}{CE} = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

18. 如图, 在 $\square ABCD$, $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 60^\circ$, 将 $\square ABCD$ 绕着 BC 的中点 O 旋转到 $\square A'B'C'D'$ 的位置, 当点 B' 落在边 AB 上时, 边 $A'D'$ 与边 CD 相交于点 G , 则 $\cot \angle CGB' =$ _____.

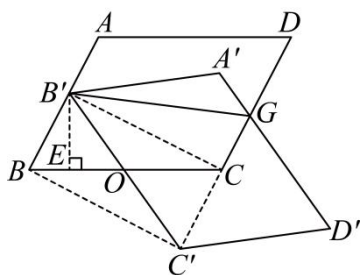


【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{6} \sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 $B'C, BC', CC'$, 过 B' 作 $B'E \perp BC$ 交 BC 于 E , 根据线段中点的定义得到 $BO = OC = 4$, 根据旋转的性质求出 $BO = B'O = 4$, $\angle D' = \angle D = \angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = \angle B'C'D' = 120^\circ$, $AB = CD = C'D' = 6$, 进而求出 $\triangle BB'O$ 是等边三角形, 得到 $BB' = BO = B'O = 4$, 进而求出 $AB' = 2$, 根据三线合一得到 $BE = EO = 2$, 根据勾股定理求出 $B'C = 4\sqrt{3}$, 进而根据勾股定理逆定理得到 $\angle CB'B = 90^\circ$, 即 $\angle B'CG = 90^\circ$, 根据余切的定义得到 $\cot \angle CGB' = \frac{CG}{B'C}$, 证明四边形 $BB'CC'$ 是矩形, 得到 $BB' = CC' = 4$, $\angle B'CC' = 90^\circ$, 可知 C, C', G 在一条直线上, 根据平行线的性质得到 $\angle BB'C = \angle B'C'C = 60^\circ$, 即 $\angle GC'D' = 60^\circ$, 可证 $\triangle C'D'G$ 是等边三角形, 得到 $CG = C'D' = 6$, 即 $GC = 2$, 将 $GC = 2$ 、 $B'C = 4\sqrt{3}$ 代入 $\cot \angle CGB' = \frac{CG}{B'C}$ 计算即可.

【详解】解: 如图, 连接 $B'C, BC', CC'$, 过 B' 作 $B'E \perp BC$ 交 BC 于 E ,



$\because BC = 8$, O 为 BC 的中点,

$\therefore BO = OC = 4$,

$\therefore$ 将 $\square ABCD$ 绕着 BC 的中点 O 旋转到 $\square A'B'C'D'$ 的位置,

$\therefore BO = B'O = 4$, $\angle D' = \angle D = \angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = \angle B'C'D' = 120^\circ$, $AB = CD = C'D' = 6$,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BB'O$ 是等边三角形,

即 $BB' = BO = B'O = 4$,

$\therefore AB = 6$,

$\therefore AB' = 2$,

$\therefore BB' = B'O$, $B'E \perp BC$

$\therefore BE = EO = 2$,

$\therefore EC = 6$, $B'E = \sqrt{BB'^2 - BE^2} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore B'C = \sqrt{B'E^2 + CE^2} = 4\sqrt{3}$,

$\therefore B'C^2 = 48$, $B'B^2 = 16$, $BC^2 = 64$,

$\therefore B'C^2 + B'B^2 = 48 + 16 = 64 = BC^2$,

即 $\angle CB'B = 90^\circ$,

$\therefore \square ABCD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CB'B = \angle B'CG = 90^\circ$,

$\therefore \cot \angle CGB' = \frac{CG}{B'C}$,

$\therefore O$ 为 BC 的中点,

$\therefore OB = OC, OB' = OC'$,

$\therefore$ 四边形 $BB'CC'$ 是矩形,

$$\therefore BB' = CC' = 4, \quad \angle B'CC' = 90^\circ$$

$$\therefore \angle B'CG = 90^\circ,$$

$\therefore C, C', G$ 在一条直线上,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BB'C = \angle B'C'C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B'C'D' = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle GC'D' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D' = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle C'D'G$ 是等边三角形,

$$\therefore CG = C'D' = 6,$$

$$\therefore CC' = 4,$$

$$\therefore GC = 2,$$

$$\therefore B'C = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \cot \angle CGB' = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【点睛】 本题考查了矩形的判定和性质, 平行四边形的性质, 旋转的性质, 等边三角形的判定和性质, 勾股定理及其逆定理, 求余切, 熟练掌握各知识点是解题的关键.

三、解答题

19. 计算: $\sqrt{6}\cot 60^\circ - |2\cos 45^\circ - 1| + 4\sin^2 30^\circ$.

【答案】 2

【解析】

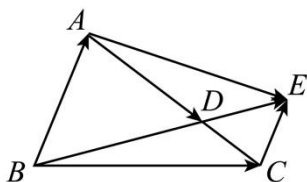
【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值的混合运算, 把特殊角的三角函数值代入计算即可求解, 熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: 原式} &= \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \left| 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| + 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{3} - |\sqrt{2} - 1| + 1 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 + 1$$

$$= 2.$$

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = 2DC$, 点 E 在 BD 的延长线上, $CE \parallel AB$. 已知 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AC} =$ _____, $\overrightarrow{AE} =$ _____.

(2) 作出向量 $\overrightarrow{AD}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.

(写出结论, 不要求写作法).

【答案】 (1) $\vec{b} - \vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查平面向量的知识和平行线分线段成比例定理. 解题的关键是数形结合思想的应用.

(1) 根据向量减法的三角形法则就可求出向量 $\overrightarrow{AC}$, 由 $CE \parallel AB$, $AD = 2DC$, 根据平行线分线段成比例定理, 即可求得 $\overrightarrow{CE}$, 继而求得 $\overrightarrow{BE}$, 又因为 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA}$, 即可求得 $\overrightarrow{AE}$;

(2) 做出的图形中, $\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 上的分向量分别为 $-\frac{2}{3}\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$.

【小问 1 详解】

解: $\because \overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$\because CE \parallel AB$, $AD = 2DC$,

$$\therefore \frac{CE}{BA} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB,$$

$\because \overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 方向相同,

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \vec{a},$$

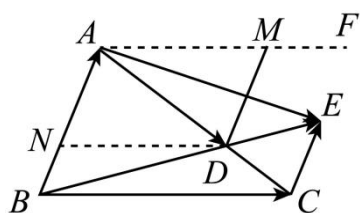
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} - \vec{a} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b}.$$

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}$, $-\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b}$;

【小问 2 详解】

$\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 上的分向量如图所示:



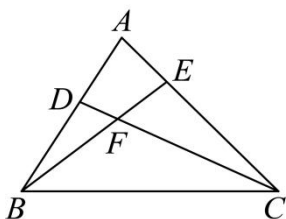
作法: (1) 将 $\overrightarrow{BC}$ 向上平移使得点 A 与点 B 重合, 平移后的向量记为 $\overrightarrow{AF}$

(2) 过点 D 作 $DM \parallel AB$, 交 AF 于点 M , $\overrightarrow{AM}$ 为 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{b}$ 上的分向量;

(3) 过点 D 作 $DN \parallel AF$, 交 AB 于点 N , $\overrightarrow{AN}$ 为 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{a}$ 上的分向量;

做出的图形中, $\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 上的分向量分别为 $-\frac{2}{3} \vec{a}$, $\frac{2}{3} \vec{b}$.

21. 已知, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 和 AC 上, $AD \cdot AB = AE \cdot AC$, 点 F 是 BE 与 CD 的交点.



(1) 求证: $\triangle FDB \sim \triangle FEC$.

(2) 如果 $AB = 15$, $AC = 18$, $AD = 6$, 求 $EF : DF$.

【答案】(1) 见解析;

(2) $\frac{13}{9}$.

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

(1) 证明 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ ，得到 $\angle ABE = \angle ACD$ ，即可得出结论；

(2) 由 $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ ， $AB = 15, AC = 18, AD = 6$ ，求出 $AE = 5$ ，得到 $BD = 9, CE = 13$ ，由

$\triangle FDB \sim \triangle FEC$ ，得到 $\frac{EF}{DF} = \frac{CE}{BD} = \frac{13}{9}$.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \cdot AB = AE \cdot AC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACD,$$

$$\text{又} \because \angle DFB = \angle EFC,$$

$$\therefore \triangle FDB \sim \triangle FEC;$$

【小问 2 详解】

解： $\because AD \cdot AB = AE \cdot AC$ ， $AB = 15, AC = 18, AD = 6$ ，

$$\therefore 6 \times 15 = AE \times 18,$$

$$\therefore AE = 5,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 9, CE = AC - AE = 13,$$

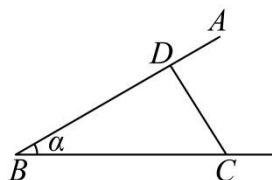
$$\therefore \triangle FDB \sim \triangle FEC,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{CE}{BD} = \frac{13}{9}.$$

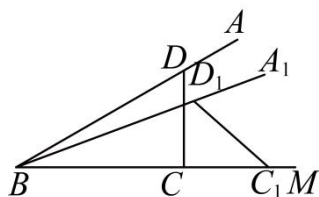
22. 阅读下列材料，回答问题.

拉伸运动的“密钥”

拉伸运动对身体机能的调节起着关键作用. 从运动生理学角度来看，科学的拉伸可以改善关节活动范围，提升身体的灵活性和协调性.



拉伸板是一种有效的拉伸工具，其侧面结构可以看作一个三角形（如图）。脚踏板 AB 可绕底座铰链 B 转动，支撑杆 CD 的上端位于脚踏板的点 D 处。通过移动支撑杆 CD 下端点 C 的位置，可以改变脚踏板的倾斜角度，从而调节拉伸强度。当人站在倾斜的脚踏板上时，身体重量会产生一个沿着踏板方向的拉伸力 F ，这个力的大小决定了拉伸的强度。拉伸力 F 的大小可用公式表示为 $F = mg \cdot \sin \alpha$ ，其中 m （单位：千克）为体重， $g \approx 10$ 牛/千克。 α 是脚踏板与水平地面之间的夹角，这个公式可以帮助我们科学地选择档位，避免过度拉伸或拉伸不足。



如图，小海有一款三档可调节拉伸板，三档的夹角 α 度数分别为 20° 、 25° 、 30° 。已知 $BD = 30\text{cm}$ 。

- (1) 小海的体型是 50 千克，如果拉伸力 F 在 180 牛至 220 牛可以达到锻炼的目的。结合计算说明，在这三档之中，小海选择哪个档位能达到锻炼的目的。
- (2) 当档位夹角为 30° 时，支撑杆 CD 恰好与底座 BM 垂直，求此时支撑杆下端点 C 与铰链 B 点的距离为多少厘米（结果保留根号）？
- (3) 当档位夹角从 30° 调到 20° ，即支撑杆的位置变化到 D_1C_1 时，支撑杆 CD 的端点 D 在竖直方向下降约为多少厘米？

参考数据（精确到 0.01）：

α	20°	25°
$\sin \alpha$	0.34	0.42
$\cos \alpha$	0.94	0.91

【答案】 (1) 小海选择 25° 档位能达到锻炼的目的；(2) 此时支撑杆下端点 C 与铰链 B 点的距离为 $15\sqrt{3}\text{cm}$ ；
(3) 支撑杆 CD 的端点 D 在竖直方向下降约为 4.8cm 。

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形，含 30° 角的直角三角形，掌握相关知识是解题的关键。

(1) 由题意可得 $180 \leq 50 \times 10 \cdot \sin \alpha \leq 220$ ，则 $0.36 \leq \sin \alpha \leq 0.44$ ，即可得出答案；

(2) 由题意可知 $\angle CBD = 30^\circ$ ， $CD \perp BC$ ，根据含 30° 角的直角三角形的性质可得答案；

(3) 过点 D_1 作 $D_1G \perp BC_1$ 于点 G ，根据解直角三角形求出 $D_1G = BD_1 \cdot \sin 20^\circ = 10.2\text{cm}$ ，即可得出答案.

【详解】解：(1) 由题意可得： $180 \leq 50 \times 10 \cdot \sin \alpha \leq 220$ ，

$$\therefore 0.36 \leq \sin \alpha \leq 0.44,$$

$\therefore$ 小海选择 25° 档位能达到锻炼的目的；

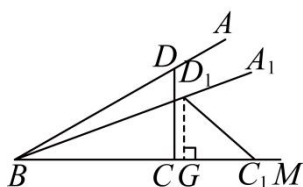
(2) 由题意可知， $\angle CBD = 30^\circ$ ， $CD \perp BC$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BD = 15\text{cm},$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}CD = \sqrt{3} \times 15 = 15\sqrt{3}\text{cm},$$

$\therefore$ 此时支撑杆下端点 C 与铰链 B 点的距离为 $15\sqrt{3}\text{cm}$ ；

(3) 过点 D_1 作 $D_1G \perp BC_1$ 于点 G ，如图：

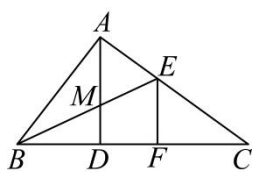


$$\therefore D_1G = BD_1 \cdot \sin 20^\circ = 30 \times 0.34 = 10.2\text{cm},$$

$$\therefore 15 - 10.2 = 4.8\text{cm},$$

$\therefore$ 支撑杆 CD 的端点 D 在竖直方向下降约为 4.8cm .

23. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ，点 E 是边 AC 上一点， $EF \perp BC$ ，垂足为点 F ， AD 、 BE 交于点 M 。



(1) 如果 BE 平分 $\angle ABC$ ，求证： $BM \cdot CE = AM \cdot BE$ ；

(2) 如果 $BD = CF$ ，求证： $\frac{EF}{AD} = \frac{AB^2}{AC^2}$ 。

【答案】(1) 见解析；

(2) 见解析.

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，角平分线的性质等知识，掌握相关知识是解题的关键.

(1) 根据角平分线的性质得到 $\angle ABE = \angle CBE$ ，再证明 $\triangle ABM \sim \triangle CEB$ ，得到 $\frac{AM}{CE} = \frac{BM}{BE}$ ，即可得出结论；

(2) 证明 $\triangle ADB \sim \triangle CBA$ ，得到 $AB^2 = BD \cdot BC$ ，证明 $\triangle BAC \sim \triangle ADC$ ，得到 $AC^2 = CD \cdot BC$ ，则

$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}$ ，证明 $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ ，得到 $\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD}$ ，即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$ ，

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 90^\circ, \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle ACB$ ，即 $\angle BAM = \angle ECB$ ，

$\therefore \triangle ABM \sim \triangle CBE$ ，

$\therefore \frac{AM}{CE} = \frac{BM}{BE}$ ，

$\therefore BM \cdot CE = AM \cdot BE$ ；

【小问 2 详解】

证明： $\because \angle BAD = \angle ACB$ ， $\angle ADB = \angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle CAB$ ，

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ ，

$\therefore AB^2 = BD \cdot BC$ ，

$\because \angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle BCA = \angle ACD$ ，

$\therefore \triangle BAC \sim \triangle ADC$ ，

$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$ ，

$\therefore AC^2 = CD \cdot BC$ ，

$\therefore \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot BC}{CD \cdot BC} = \frac{BD}{CD}$ ，

$\because AD \perp BC$ ， $EF \perp BC$ ，

$\therefore EF \parallel AD$ ，

$$\therefore \triangle CFE \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD},$$

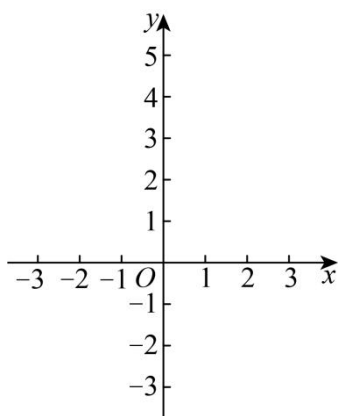
$$\therefore BD = CF,$$

$$\therefore \frac{EF}{AD} = \frac{BD}{CD}$$

$$\therefore \frac{EF}{AD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

24. 新定义：在平面直角坐标系中，抛物线上的点和它的顶点的连线，与这条抛物线的对称轴所夹的角的正切值称为抛物线上这个点的开口程度．规定抛物线顶点的开口程度为 0．根据上述定义，解决以下问题：

如图，在平面直角坐标系 xOy 中．



(1) 如果抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 与 y 轴交于点 P ，求此抛物线上点 P 的开口程度 k_P

(2) 已知抛物线 $y = x^2 - 4x + a$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左侧)，如果此抛物线上点 A 的开口程度 $k_A = 1$ ，求 a 的值；

(3) 将抛物线 $C_1: y = mx^2 - 2mx + n (m > 0)$ 平移，使平移后的抛物线 C_2 经过抛物线 C_1 的顶点 M ，记抛物线 C_2 的顶点为 N ， C_2 的对称轴交 C_1 于点 Q ，如果 C_1 上点 Q 的开口程度与 C_2 上点 M 的开口程度相等，均为 2，且 $\triangle QMN$ 的面积为 8，试求 m 的值．

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$

(2) $a = 3$ 或 4

(3) $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查新定义、二次函数的综合、锐角三角函数，(1) 由题意求得抛物线的顶点 $A(2, 1)$ 、 $P(0, 5)$ ，

过点 P 作 $PB \perp y$ 轴于点 B , 得 $PB = 2$, $AB = 4$, 进而求解即可;

(2) 由题意求得抛物线的顶点 $C(2, a-4)$, 即 $DC = 4-a$, 根据新定义得 $AD = DC = 4-a$, 进而得 $A(a-2, 0)$, 把点 $A(a-2, 0)$ 代入 $y = x^2 - 4x + a$ 求解即可;

(3) 根据题意得 $M(1, n-m)$, $\tan \angle MQF = \tan \angle MNF = 2$, 进而可得 $QF = FN = \frac{1}{2}MF$, 由 $\triangle QMN$ 的面积为 8, 求得 $MF = 4$, 从而求得 $Q(5, n-m+2)$ 、 $N(5, n-m-2)$, 即抛物线 C_2 的表达式为 $y = m(x-5)^2 + n-m-2$, 再把点 M 代入求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$,

$\therefore$ 抛物线的顶点 $A(2, 1)$,

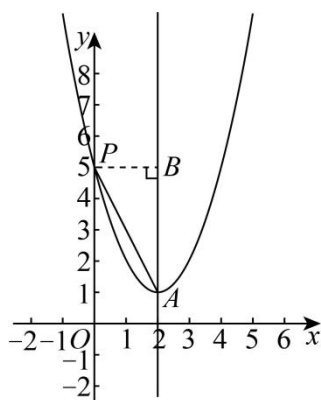
把 $x = 0$ 代入 $y = x^2 - 4x + 5$, 得 $y = 5$,

$\therefore P(0, 5)$,

过点 P 作 $PB \perp y$ 轴于点 B ,

$\therefore PB = 2$, $AB = 4$,

$\therefore k_P = \tan \angle PAB = \frac{PB}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;



【小问 2 详解】

解: $\because y = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a-4$,

$\therefore$ 抛物线的顶点 $C(2, a-4)$,

$\therefore DC = 4-a$,

$\therefore$ 此抛物线上点 A 的开口程度 $k_A = 1$,

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{AD}{DC} = 1,$$

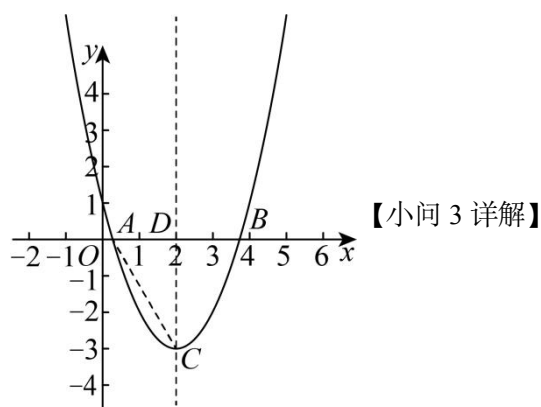
$$\therefore AD = DC = 4 - a,$$

$$\therefore A(a-2, 0),$$

$$\text{把点 } A(a-2, 0) \text{ 代入 } y = x^2 - 4x + a \text{ 得, } (a-2)^2 - 4(a-2) + a = 0,$$

$$\text{解得 } a_1 = 3, \quad a_2 = 4,$$

$$\therefore a = 3 \text{ 或 } 4;$$



解：如图，连接 QM ， MN ，过点 Q 作 QE 垂直抛物线 C_1 的对称轴，过点 M 作 MF 垂直抛物线 C_2 的对称轴，

$$\because y = mx^2 - 2mx + n = m(x-1)^2 + n - m,$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的顶点 } M(1, n-m),$$

$$\text{由题意得, } \tan \angle QME = \tan \angle MNF = 2, \quad ME \parallel NQ,$$

$$\therefore \angle QME = \angle MQF,$$

$$\therefore \tan \angle MQF = \tan \angle MNF = 2,$$

$$\therefore \tan \angle MQF = \frac{MF}{QF} = 2, \quad \tan \angle MNF = \frac{MF}{FN} = 2,$$

$$\therefore QF = FN = \frac{1}{2}MF,$$

$$\therefore \triangle QMN \text{ 的面积为 } 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times MF \times MF = 8,$$

$$\therefore MF = 4,$$

$$\therefore QF = FN = 2,$$

$$\therefore Q(5, n-m+2),$$

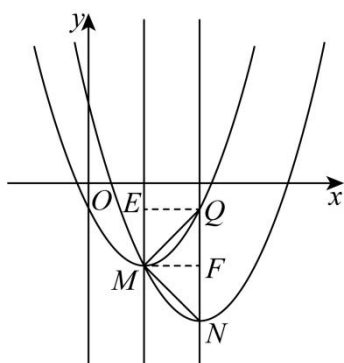
$$\therefore QN = 4,$$

$$\therefore N(5, n-m-2),$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2 \text{ 的表达式为 } y = m(x-5)^2 + n-m-2,$$

$$\text{把点 } M(1, n-m) \text{ 代入 } y = m(x-5)^2 + n-m-2 \text{ 得, } m(1-5)^2 + n-m-2 = n-m,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{8}.$$



25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC \geq 90^\circ$, 点 D 为边 AC 上一点, $\angle ABD = \angle ACB$, $CD = 2$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折得到 $\triangle A_1BD$, 点 A_1 恰好落在边 BC 的垂直平分线上.

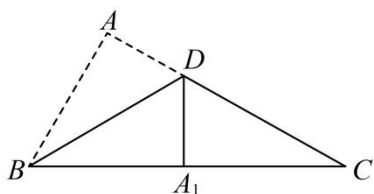


图1

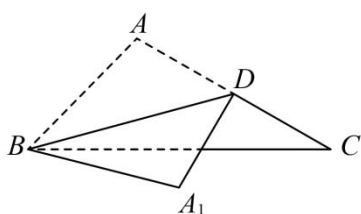


图2

(1) 如图1, 如果点 A_1 在边 BC 上, 求 $\frac{AD}{AB}$ 的值;

(2) 如图2, 如果 $AD = CD$, 求 BD 的长;

(3) 如果 $AB = CD$, 求 $\angle BAC$ 的度数.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

(3) 96°

【解析】

【分析】(1) 由折叠的性质并结合题意可得 $\angle ABD = \angle CBD = \angle ACB$ ，可得 $DB = DC$ ，进一步可得 $DA_1 \perp BC$ ，从而可得 $\angle A = \angle DA_1B = 90^\circ$ ，再结合三角形内角和定理计算得出

$\angle ABD = \angle CBD = \angle DCB = 30^\circ$ ，最后再由正切的定义计算即可得出结果；

(2) 连接 AA_1 ，交 BD 于点 O ，连接 A_1C ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ ，求出 $AB = 2\sqrt{2}$ ，由折叠的性质可得 $AB = A_1B = 2\sqrt{2}$ ， $A_1D = AD = 2$ ， $AA_1 \perp BD$ ， $\angle ADB = \angle A_1DB$ ，

由线段垂直平分线的性质可得 $A_1C = A_1B = 2\sqrt{2}$ ，由勾股定理逆定理得出 $\triangle A_1CD$ 为直角三角形，则

$\angle A_1DC = 90^\circ$ ，求出 $\angle A_1DA = 90^\circ$ ，从而可得 $\angle ADB = \angle A_1DB = \frac{1}{2}\angle ADA_1 = 45^\circ$ ，证明 $\triangle AOD$ 为等腰

直角三角形，结合勾股定理可得 $AO = OD = \sqrt{2}$ ， $BO = \sqrt{6}$ ，即可得出结果；

(3) 分三种情况：当点 A_1 在边 BC 上时；当点 A_1 在 BC 下方时，连接 AA_1 交 BD 于点 F ，连接 A_1C ；当点 A_1 在 BC 上方时；分别求解即可得出结果

【小问 1 详解】

解：∵ 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折得到 $\triangle A_1BD$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD$$

$$\because \angle ABD = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle DCB,$$

$$\therefore DB = DC,$$

∵ 点 A_1 恰好落在边 BC 的垂直平分线上，且点 A_1 在边 BC 上，

$$\therefore DA_1 \perp BC,$$

$$\therefore \angle A = \angle DA_1B = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABD + \angle CBD + \angle DCB = 180^\circ - \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle DCB = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \tan \angle ABD = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【小问 2 详解】

解：如图：连接 AA_1 ，交 BD 于点 O ，连接 A_1C ，

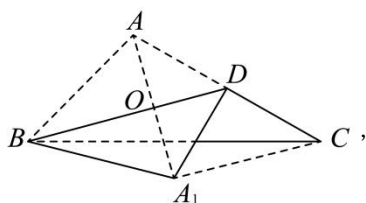


图2

$$\because \angle ABD = \angle ACB, \quad \angle BAD = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

$$\because CD = 2, \quad AD = CD,$$

$$\therefore AC = AD + CD = 4,$$

$$\therefore \frac{2}{AB} = \frac{AB}{4},$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{2} \quad (\text{负值舍去, 不符合题意}),$$

$$\text{由折叠的性质可得: } AB = A_1B = 2\sqrt{2}, \quad A_1D = AD = 2, \quad AA_1 \perp BD, \quad \angle ADB = \angle A_1DB,$$

$$\because \text{点 } A_1 \text{ 恰好落在边 } BC \text{ 的垂直平分线上},$$

$$\therefore A_1C = A_1B = 2\sqrt{2},$$

$$\because CD^2 + A_1D^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = A_1C^2,$$

$$\therefore \triangle A_1CD \text{ 为直角三角形},$$

$$\therefore \angle A_1DC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1DA = 180^\circ - \angle A_1DC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle A_1DB = \frac{1}{2} \angle ADA_1 = 45^\circ,$$

$$\therefore AA_1 \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOD \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore AO^2 + OD^2 = AD^2,$$

$$\therefore AO = OD = \sqrt{2},$$

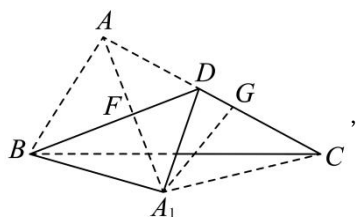
$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore BD = BO + OD = \sqrt{6} + \sqrt{2};$$

【小问 3 详解】

解：由 (1) 可得：点 A_1 在边 BC 上时， $\angle BAC = 90^\circ$ ，此时 $AB = A_1B = A_1C < CD$ ，与 $AB = CD$ 相矛盾，故不符合题意，

如图，当点 A_1 在 BC 下方时，连接 AA_1 交 BD 于点 F ，连接 A_1C ，



$$\therefore \angle ABD = \angle ACB, \quad \angle BAD = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AB = CD, \quad CD = 2,$$

$$\therefore \frac{AD}{2} = \frac{2}{AD+2},$$

解得： $AD = \sqrt{5} - 1$ (负值舍去，不符合题意)，

由折叠的性质可得： $A_1B = AB = 2$ ， $A_1D = AD = \sqrt{5} - 1$ ， $AA_1 \perp BC$ ， $\angle ABD = \angle A_1BD$ ，

$\therefore$ 点 A_1 恰好落在边 BC 的垂直平分线上，

$$\therefore A_1C = A_1B = 2,$$

$$\therefore CD = AB = A_1B = A_1C = 2,$$

$$\therefore \angle CDA_1 = \angle CA_1D,$$

在 CD 上取点 G ，使得 $A_1G = A_1D = \sqrt{5} - 1$ ，

$$\therefore \angle GDA_1 = \angle A_1GD,$$

$$\therefore \angle GDA_1 = \angle A_1GD = \angle CA_1D,$$

$$\therefore \triangle A_1DG \sim \triangle CDA_1,$$

$$\therefore \frac{DG}{A_1D} = \frac{A_1D}{CD}, \text{ 即 } \frac{DG}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore DG = 3 - \sqrt{5},$$

$$\therefore CG = CD - DG = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore CG = A_1G,$$

$$\therefore \angle GCA_1 = \angle GA_1C,$$

$$\therefore \angle A_1GD = \angle C + \angle GA_1C,$$

$$\therefore \angle A_1DC = \angle DA_1C = 2\angle GCA_1,$$

$$\therefore \angle A_1DC + \angle DA_1C + \angle GCA_1 = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle GCA_1 + 2\angle GCA_1 + \angle GCA_1 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle GCA_1 = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle GCA_1 = \angle GA_1C = 36^\circ, \quad \angle A_1DC = 72^\circ,$$

$$\therefore AD = A_1D,$$

$$\therefore \angle DAA_1 = \angle DA_1A,$$

$$\therefore \angle DAA_1 + \angle DA_1A = \angle A_1DC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle DAA_1 = \angle DA_1A = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DAA_1 = \angle DA_1A = \angle GCA_1 = \angle GA_1C = 36^\circ,$$

$$\therefore A_1D = A_1G,$$

$$\therefore \triangle A_1DA \cong \triangle A_1GC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AA_1 = A_1C = 2,$$

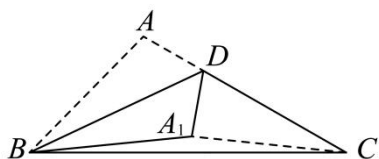
$$\therefore AA_1 = A_1B = AB = 2,$$

$$\therefore \triangle AA_1B \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle BAA_1 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAA_1 + \angle CAA_1 = 96^\circ ;$$

如图，当点 A_1 在 BC 上方时，



同理可得： $\angle A_1CD = 36^\circ$, $AB = A_1B = A_1C = CD = 2$, $\angle CDA_1 = \angle CA_1D = 72^\circ$,

$$\therefore \angle ADB = \angle A_1DB = \frac{180^\circ - \angle CDA_1}{2} = 54^\circ ,$$

设 $\angle ABD = \angle ACB = \alpha$,

由图形可得： $\angle ACB > \angle A_1CD = 36^\circ$,

$$\therefore \alpha > 36^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB > 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ ,$$

$\therefore \angle BAD = 180^\circ - (\angle ABD + \angle ADB) < 90^\circ$, 即 $\angle BAC < 90^\circ$, 与 $\angle BAC \geq 90^\circ$ 矛盾, 故不符合题意;

综上所述, $\angle BAC$ 的度数为 96° .

【点睛】 本题考查了折叠的性质、线段垂直平分线的性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、解直角三角形、三角形外角的定义及性质、勾股定理等知识点, 熟练掌握以上知识点并灵活运用, 添加适当的辅助线, 采用分类讨论的思想是解此题的关键.