

# 松江区 2025-2026 学年度第一学期期末质量监控试卷

## 初三数学

### 一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别是  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边, 下列结论正确的是 ( )

- A.  $\sin A = \frac{c}{a}$                       B.  $\cos A = \frac{b}{c}$                       C.  $\tan A = \frac{b}{a}$                       D.  $\cot A = \frac{a}{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了锐角三角函数, 直角三角形中, 一个锐角的正弦值等于这个锐角所对的直角边的长与斜边长的比值, 余弦值等于另一直角边 (不是该锐角的对边) 的长与斜边长的比值, 正切值等于这个锐角所对的直角边的长与另一直角边的长的比值, 余切值等于另一直角边 (不是该锐角的对边) 的长与该锐角所对的直角边的长的比值, 据此可得答案.

【详解】解:  $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别是  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边,

$$\therefore \sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a},$$

故选: B.

2. 已知  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  相似,  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle D = 60^\circ$ , 那么  $\angle C$  的度数可能是 ( )

- A.  $40^\circ$                       B.  $50^\circ$                       C.  $80^\circ$                       D.  $100^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的性质.

利用相似三角形的性质, 对应角相等, 但对应顶点不确定, 需讨论  $\angle D$  对应  $\angle B$  或  $\angle C$  的情况, 从而求出  $\angle C$  的可能值.

【详解】解:  $\because \triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  相似,

$\therefore$  对应角相等.

$$\therefore \angle A = 40^\circ, \angle D = 60^\circ,$$

$\therefore \angle D \neq \angle A$ , 故  $\angle D$  不对应  $\angle A$ .

情况 1: 若  $\angle D$  对应  $\angle B$ , 则  $\angle B = \angle D = 60^\circ$ ,

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ;$$

情况 2：若  $\angle D$  对应  $\angle C$ ，则  $\angle C = \angle D = 60^\circ$ ；

$\therefore \angle C$  可能为  $60^\circ$  或  $80^\circ$ 。

只有 C 符合。

故选：C。

3. 已知二次函数  $y = x^2 - 2x$  的图象上有两点  $A(-\sqrt{2}, y_1)$ 、 $B(-1, y_2)$ ，那么  $y_1$ 、 $y_2$  的大小关系是 ( )

A.  $y_1 < y_2$

B.  $y_1 > y_2$

C.  $y_1 = y_2$

D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的大小比较。

通过直接计算两点对应的函数值，比较大小即可。

【详解】解：对于点  $A(-\sqrt{2}, y_1)$ ， $y_1 = (-\sqrt{2})^2 - 2 \times (-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$ ，

对于点  $B(-1, y_2)$ ， $y_2 = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$ ，

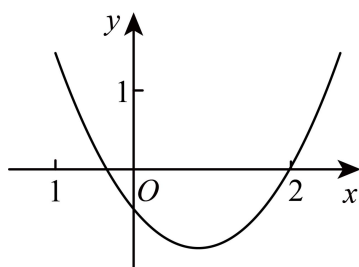
又  $\because 2\sqrt{2} > 1$ ，

$\therefore 2 + 2\sqrt{2} > 3$ ，

即  $y_1 > y_2$ 。

故选：B。

4. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示，那么下列结论正确的是 ( )



A.  $abc < 0$

B.  $2a + b = 0$

C.  $a - b + c > 0$

D.  $a + b + c > 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查图象与二次函数系数之间的关系，二次函数的图象性质，根据二次函数的图象判断式子符号，正确掌握相关性质内容是解题的关键；

根据图象特点可得到,  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c < 0$ , 即可判断选项 A; 根据对称轴不是直线  $x = 1$ , 可得  $2a + b \neq 0$ , 即可判断选项 B; 根据图象可知, 当  $x = -1$  时,  $y > 0$ , 即可判断选项 C; 根据图象可知, 当  $x = 1$  时,  $y < 0$ , 即可判断选项 D.

【详解】解: 由二次函数图象可知, 函数图象开口向上, 即  $a > 0$ ,

$\therefore$  对称轴在  $y$  轴的右侧,

$\therefore b < 0$ ,

$\therefore$  图象与  $y$  轴的交点在  $y$  轴的负半轴,

$\therefore c < 0$ ,

$\therefore abc > 0$ , 可判断选项 A 错误;

$\therefore$  当对称轴  $x = -\frac{b}{2a} = 1$  时, 可得  $2a + b = 0$ ,

而由图象分析可知, 二次函数的对称轴不是直线  $x = 1$ ,

$\therefore 2a + b \neq 0$ , 故选项 B 错误;

由图象可知当  $x = -1$  时,  $y = a - b + c > 0$ , 故选项 C 正确;

由图象可知当  $x = 1$  时,  $y = a + b + c < 0$ , 故选项 D 错误;

故选: C.

5. 已知四边形  $ABCD$  的对角线交于点  $O$ , 如果  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ , 那么下列结论正确的是 ( )

A.  $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$

B.  $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{DO}$

C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

D.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质与判定, 相似三角形的性质与判定, 向量的相关知识, 若两个非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} = k\vec{b}$  (其中  $k$  是实数, 且  $k \neq 0$ ), 那么  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 且  $|\vec{a}| = k|\vec{b}|$ , 则  $AB \parallel DC$ ,  $AB = 2DC$ , 证明  $\triangle COD \sim \triangle AOB$  得到  $OA = 2OC$ ,  $OB = 2OD$ , 据此可判断 A、B; 可证明  $AC$  与  $BD$  不平行,  $AD$  与  $BC$  不平行, 据此可判断 C、D.

【详解】解:  $\because \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ ,

$\therefore AB \parallel DC$ ,  $AB = 2DC$ ,

$\therefore \triangle COD \sim \triangle AOB$ ,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = 2,$$

$\therefore OA = 2OC$ ,  $OB = 2OD$ ,

$\therefore \overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{BO} = -2\overrightarrow{DO}$ , 故 A 正确, B 不正确,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  的对角线交于点  $O$ ,

$\therefore AC$  与  $BD$  不平行,

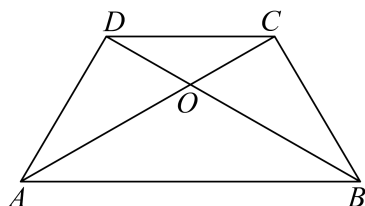
$\therefore \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ , 故 C 不正确;

$\therefore AB = 2DC$ ,  $AB \parallel DC$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  不是平行四边形,

$\therefore AD$  与  $BC$  不平行,

$\therefore \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ , 故 D 不正确;



故选: A.

6. 已知命题:

①腰和腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似

②底边和腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似

下列对这两个命题的判断, 正确的是 ( )

A. ①和②都是真命题

B. ①和②都是假命题

C. ①是真命题, ②是假命题

D. ①是假命题, ②是真命题

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了判断命题真假, 相似三角形的性质与判定, 等腰三角形的性质, 如图 1 所示, 等腰三角形  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ADC$  一腰上的高都为  $AE$ , 且两个三角形的腰长相等, 而此时两个三角形不相似, 据此可判断①; 如图 2 所示, 可证明  $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$ , 得到  $\angle D = \angle D'$ , 进而可证明  $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ ; 同理可证明当两个三角形为钝角三角形, 也相似, 据此可判断②.

【详解】 解: 如图 1 所示, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  和点  $E$  都是  $BC$  上的点, 且  $AD = BD = CD$ ,  $AE \perp CD$ ,

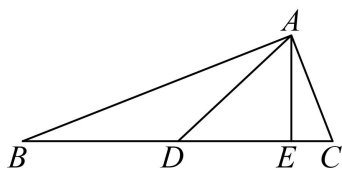


图 1

$\therefore \triangle ABD, \triangle ADC$  都是等腰三角形,

此时满足  $\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{AE} = 1$ , 但是  $\triangle ABD$  和  $\triangle ADC$  不相似,

$\therefore$  命题①是假命题;

当两个三角形都为锐角三角形时,

如图 2 所示,  $\triangle ABD$  中,  $AB = AD$ ,  $BC \perp AD$ ,  $\triangle A'B'D'$  中,

$A'B' = A'D'$ ,  $B'C' \perp A'D'$ ,

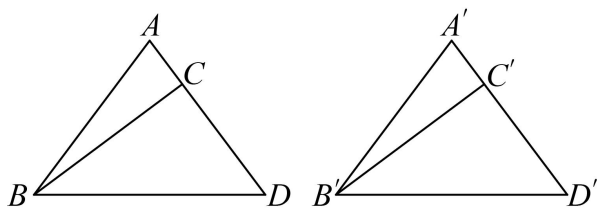


图 2

$\therefore \frac{BD}{B'D'} = \frac{BC}{B'C'}$ , 且  $\angle BCD = \angle B'C'D' = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$ ,

$\therefore \angle D = \angle D'$ ,

又  $\therefore \angle ABD = \angle D = \angle D' = \angle A'B'D'$ ,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ ;

同理可证明当两个三角形为钝角三角形, 也相似,

综上所述, 命题②是真命题;

故选: D.

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知线段  $a = 2$ ,  $b = 6$ , 如果线段  $c$  是  $a$ 、 $b$  的比例中项, 那么  $c =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $2\sqrt{3}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了成比例线段, 熟练掌握成比例线段是解题的关键.

根据比例中项的定义, 线段  $c$  是  $a$  和  $b$  的比例中项时, 满足  $c^2 = a \cdot b$ , 代入已知数值计算即可.

**【详解】** 解:  $\because$  线段  $c$  是  $a$ 、 $b$  的比例中项,

$$\therefore c^2 = a \cdot b.$$

$$\because a = 2, b = 6,$$

$$\therefore c^2 = 2 \times 6 = 12,$$

$$\therefore c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad (\text{负值舍去}).$$

故答案为  $2\sqrt{3}$ .

8. 如果向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  和  $\vec{x}$  满足  $3\vec{a} - \vec{x} = 2(\vec{a} + \vec{b})$ ，那么  $\vec{x} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\vec{a} - 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的运算.

利用等式性质解向量方程即可.

【详解】 解：由  $3\vec{a} - \vec{x} = 2(\vec{a} + \vec{b})$ ,

$$\text{得 } 3\vec{a} - \vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\text{移项, 得 } -\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} = -\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\text{所以 } \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}.$$

故答案为:  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .

9. 已知抛物线  $y = ax^2$  经过第二象限, 那么这条抛物线的开口方向是\_\_\_\_\_.

【答案】 向上

【解析】

【分析】 本题考查了抛物线的性质, 平面直角坐标系中点的坐标特征.

抛物线经过第二象限, 说明存在点满足  $x < 0$ ,  $y > 0$ , 代入抛物线得  $a > 0$ , 故开口向上.

【详解】 解:  $\because$  抛物线经过第二象限,

$\therefore$  存在点  $(x, y)$  在第二象限, 即  $x < 0$ ,  $y > 0$ ,

$$\text{代入抛物线 } y = ax^2, \text{ 得 } ax^2 > 0,$$

$$\therefore x^2 > 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

$\therefore$  抛物线的开口方向向上.

故答案为: 向上.

10. 将抛物线  $y = x^2 + 1$  先向右平移 3 个单位, 再向下平移 1 个单位, 所得抛物线的表达式是\_\_\_\_\_.

【答案】  $y = (x-3)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的平移规律.

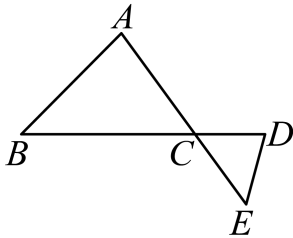
根据二次函数的平移规律, 左右平移改变  $x$ , 上下平移改变  $y$ .

【详解】 解: 将抛物线  $y = x^2 + 1$  向右平移 3 个单位, 得  $y = (x-3)^2 + 1$ ;

再向下平移 1 个单位, 得  $y = (x-3)^2 + 1 - 1 = (x-3)^2$ .

故答案为:  $y = (x-3)^2$ .

11. 如图, 已知  $\triangle ABC$ , 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $BC$ 、 $AC$  的延长线上,  $\angle B = \angle E$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 1.5$ , 那么  $CE =$ \_\_\_\_\_.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质, 证明  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ , 列出比例式进行求解即可.

【详解】 解:  $\because \angle B = \angle E$ ,  $\angle ACB = \angle DCE$ ,

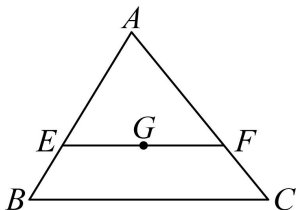
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC$ ,

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC}, \text{ 即 } \frac{CE}{4} = \frac{1.5}{3},$$

$\therefore CE = 2$ ;

故答案为: 2.

12. 如图, 点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心,  $EF$  经过点  $G$ , 且  $EF \parallel BC$ , 那么  $\triangle AEF$  与  $\triangle ABC$  面积的比值是\_\_\_\_\_.

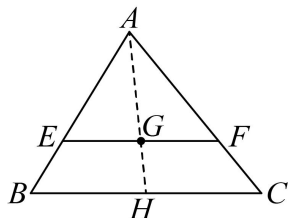


【答案】  $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质，重心的性质，连接  $AG$  并延长交  $BC$  于点  $H$ ，根据平行线分线段成比例，结合重心的性质，得到  $\frac{AE}{BE} = \frac{AG}{GH} = 2$ ，进而得到  $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ ，证明  $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方即可得出结果.

【详解】 解：连接  $AG$  并延长交  $BC$  于点  $H$ ，



$\because$  点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心，

$$\therefore \frac{AG}{GH} = 2,$$

$\because EF$  经过点  $G$ ，且  $EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AG}{GH} = 2,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3},$$

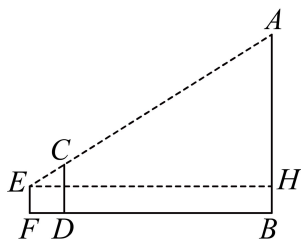
$\therefore EF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \triangle AEF \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 面积的比值为 } \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{4}{9};$$

故答案为：  $\frac{4}{9}$  .

13. 如图，某同学想利用一根标杆测量旗杆的高度，已知标杆高度  $CD = 2.7$  米，标杆与旗杆的水平距离  $BD = 16$  米，人的眼睛与地面的距离  $EF = 1.7$  米，当  $E$ 、 $C$ 、 $A$  三点共线时，人与标杆  $CD$  的水平距离  $DF = 2$  米，那么旗杆  $AB$  的高度是\_\_\_\_\_米.



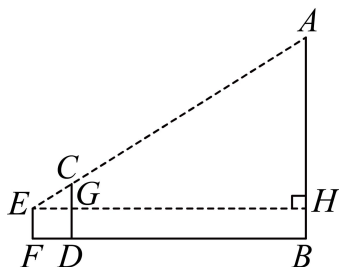
【答案】 10.7

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的实际应用，证明  $\triangle EGC \sim \triangle EHA$ ，列出比例式，求出  $AH$  的长，再根据

$AB = AH + BH$  进行求解即可.

【详解】解：作  $EH \perp AB$  交  $CD$  于点  $G$ ,



由题意可知：四边形  $EFDG, DBHG$  均为矩形，

$$\therefore EF = DG = BH = 1.7, \quad EG = DF = 2, \quad HG = BD = 16, \quad CD \parallel AB,$$

$$\therefore CG = CD - DG = 1, \quad EH = EG + HG = 18,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle EGC \sim \triangle EHA,$$

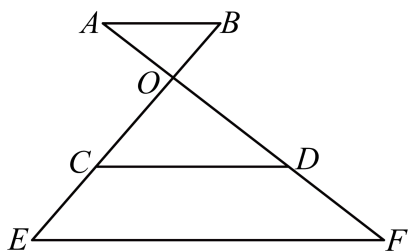
$$\therefore \frac{EG}{EH} = \frac{CG}{AH}, \quad \text{即} \quad \frac{2}{18} = \frac{1}{AH},$$

$$\therefore AH = 9,$$

$$\therefore AB = AH + BH = 9 + 1.7 = 10.7, \quad \text{即旗杆 } AB \text{ 的高度是 } 10.7 \text{ 米};$$

故答案为：10.7.

14. 如图，已知  $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AF$  与  $BE$  交于点  $O$ ， $AD = 2DF$ ， $AB = 6$ ， $CD = 10$ ，那么  $EF$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】18

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质，先证明  $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，求出  $\frac{AO}{OD} = \frac{3}{5}$ ，进而得到  $OD = \frac{5}{8} AD$ ，证明  $\triangle COD \sim \triangle EOF$ ，列出比例式进行求解即可.

【详解】解：  $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ,

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC, \quad \triangle COD \sim \triangle EOF,$$

$$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OD = \frac{5}{8}AD,$$

$$\therefore AD = 2DF,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore OF = OD + DF = \frac{9}{8}AD,$$

$$\therefore \triangle COD \sim \triangle EOF,$$

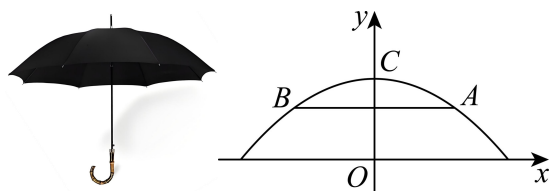
$$\therefore \frac{CD}{EF} = \frac{OD}{OF} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore CD = 10,$$

$$\therefore EF = 18;$$

故答案为：18.

15. 如图，左侧是一把撑开的雨伞，右侧是其直截面示意图，伞面的轮廓可以看作是一条抛物线，在图示的坐标系中，其表达式为  $y = -0.12x^2 + 3$ ，点  $A$ 、 $B$  在抛物线上，且关于  $y$  轴对称，若顶点  $C$  到  $AB$  的距离是 1.08 分米，那么  $A$ 、 $B$  两点之间的距离是\_\_\_\_\_分米.



【答案】6

【解析】

【分析】本题考查二次函数的应用，根据顶点  $C$  到  $AB$  的距离是 1.08 分米，进而求出点  $A, B$  的纵坐标为 1.92，代入函数解析式进行求解即可.

【详解】解：  $\because y = -0.12x^2 + 3$ ,

$\therefore$  当  $x = 0$  时，  $y = 3$ ,

$\therefore C(0, 3)$ ,

$\therefore$  顶点  $C$  到  $AB$  的距离是 1.08 分米，

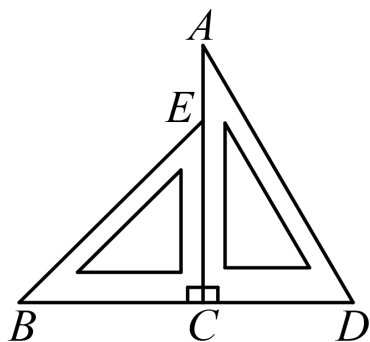
$\therefore$  点  $A, B$  的纵坐标为  $3 - 1.08 = 1.92$ ,

当  $y = -0.12x^2 + 3 = 1.92$  时，  $x = \pm 3$ ,

$\therefore A、B$  两点之间的距离是  $3 + 3 = 6$  (分米);

故答案为：6.

16. 已知一副三角板中，含  $45^\circ$  三角板的斜边（ $BE$ ）与含  $30^\circ$  三角板的长直角边（ $AC$ ）相等. 如图，将一副三角板拼在一起，点  $B$ 、 $C$ 、 $D$  在一条直线上，那么  $\frac{AE}{AD}$  的值是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形，设  $CD = x$ ，分别解  $\text{Rt}\triangle CDA$ ,  $\text{Rt}\triangle BCE$ ，求出  $AD$ ,  $AC$ ,  $CE$  的长，进而求出  $AE$  的长，即可得出结果.

【详解】 解：由题意，  $\angle CAD = 30^\circ$ ,  $\angle CBE = 45^\circ$ ,

设  $CD = x$ ,

在  $\text{Rt}\triangle CDA$  中，  $\angle CAD = 30^\circ$ ,

$$\therefore AD = 2CD = 2x, AC = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x;$$

在  $\text{Rt}\triangle BCE$  中，  $BE = AC = \sqrt{3}x$ ,  $\angle CBE = 45^\circ$ ,

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{2}}{2} BE = \frac{\sqrt{6}}{2} x,$$

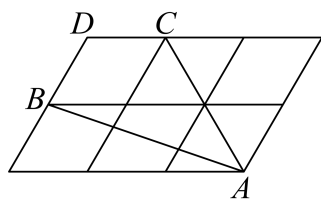
$$\therefore AE = \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) x,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4};$$

故答案为：  $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}$ .

17. 如图，由 6 个全等的菱形组成的网格中，每个小菱形的边长均为 1，  $\angle BDC = 120^\circ$ ，点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都

在格点上, 那么  $\tan \angle BAC$  的值是\_\_\_\_\_.

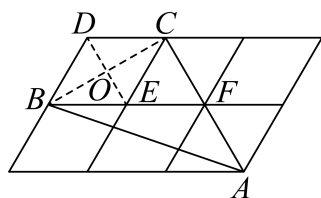


【答案】  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质, 网格中求三角函数值, 连接  $BC, DE$ , 交于点  $O$ , 易得  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $\triangle CEF, \triangle CDE$  均为等边三角形, 求出  $BC, AC$  的长, 再利用正切的定义, 进行计算即可.

【详解】 解: 连接  $BC, DE$ , 交于点  $O$ ,



$\therefore$  菱形  $BDCE$ ,

$\therefore BD \parallel CE, DE \perp BC, DC = CE, \angle EDC = \frac{1}{2} \angle BDC = 60^\circ, \angle ECO = \frac{1}{2} \angle ECD, BC = 2CO,$

$\therefore \triangle DCE$  为等边三角形,

$\therefore DE = CD = CE = 1, \angle DCE = 60^\circ,$

$\therefore \angle OCE = 30^\circ,$

$\therefore OC = CE \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\therefore BC = 2CO = \sqrt{3},$

同理:  $\triangle CEF$  为等边三角形,  $CF = CE = 1, AF = CF = 1,$

$\therefore \angle BCA = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ, AC = 2,$

$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

故答案为:  $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

18. 已知  $ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 点  $P, Q$  分别在边  $AB, BC$  上, 如果  $\triangle ACQ$  与  $BPQ$  相似, 且  $\triangle APQ$

是等腰三角形, 那么  $\frac{PQ}{AQ}$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 根据题意可得只存在  $\angle BQP = 90^\circ$  和  $\angle BPQ = 90^\circ$  这两种情况, 当  $\angle BQP = 90^\circ$  时, 可证明  $\triangle ACQ \sim \triangle BQP$ ,  $\angle APQ$  一定是钝角, 故  $AP = PQ$ , 导角可得  $\angle PQA = 30^\circ$ , 再解直角三角形即可; 当  $\angle BPQ = 90^\circ$  时, 同理可得  $AP = PQ$ , 利用勾股定理即可得到答案.

【详解】 解:  $\because \triangle ACQ$  与  $\triangle BPQ$  相似, 且  $\angle ACB = 90^\circ > \angle B$ ,

$\therefore$  只存在  $\angle BQP = 90^\circ$  和  $\angle BPQ = 90^\circ$  这两种情况,

如图所示, 当  $\angle BQP = 90^\circ$  时, 则  $\angle BQP = 90^\circ = \angle C$ ,

$\therefore AC \parallel PQ$ ,

$\therefore \angle QPB = \angle BAC > \angle CAQ$ ,

$\therefore$  此时只能是  $\triangle ACQ \sim \triangle BQP$ ,

$\therefore \angle AQC = \angle BPQ$ ;

$\because \angle QPB$  是锐角,

$\therefore \angle APQ$  一定是钝角,

$\because \triangle APQ$  是等腰三角形,

$\therefore AP = PQ$ ,

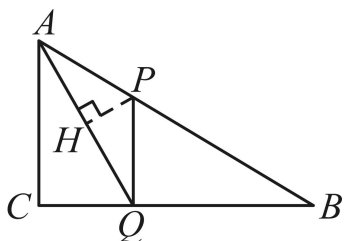
$\therefore \angle PAQ = \angle PQA$ ,

$\therefore \angle AQC = \angle BPQ = \angle PAQ + \angle PQA = 2\angle PQA$ ,

$\therefore \angle PQC = \angle AQC + \angle PQA = 3\angle PQA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle PQA = 30^\circ$ ,

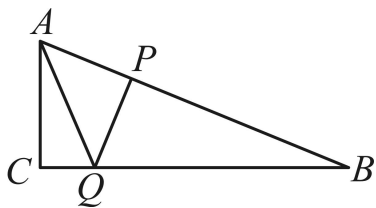
如图所示, 过点  $P$  作  $PH \perp AQ$  于点  $H$ , 则  $AQ = 2HQ$ ,  $HQ = PQ \cdot \cos \angle PQH = \frac{\sqrt{3}}{2} PQ$ ,



$$\therefore AQ = \sqrt{3}PQ,$$

$$\therefore \frac{PQ}{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

如图所示，当  $\angle BPQ = 90^\circ$  时，则  $\angle APQ = 90^\circ$ ，



$\therefore \triangle APQ$  是等腰三角形，

$$\therefore AP = PQ,$$

$$\therefore AQ = \sqrt{AP^2 + PQ^2} = \sqrt{2}PQ,$$

$$\therefore \frac{PQ}{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

综上所述， $\frac{PQ}{AQ}$  的值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

故答案为：  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质，解直角三角形，勾股定理，等边对等角，利用分类讨论的思想求解是解题的关键。

### 三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.  $ABC$  的三边分别是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，且  $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13}$ ，

- (1) 如果  $ABC$  的周长为 60，求  $a$  的值；
- (2) 如果  $ABC$  的面积为 60，求  $a$  的值。

【答案】 (1) 10

(2)  $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查比例的性质和勾股定理逆定理.

(1) 设  $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = k \ (k > 0)$ , 则  $a = 5k, b = 12k, c = 13k$ , 利用周长公式列方程求解即可;

(2) 设  $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = k \ (k > 0)$ , 则  $a = 5k, b = 12k, c = 13k$ , 通过勾股定理逆定理判断直角三角形, 再利用面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设  $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = k \ (k > 0)$ ,

则  $a = 5k, b = 12k, c = 13k$ ,

$\because \triangle ABC$  的周长为 60,

$$\therefore 5k + 12k + 13k = 60,$$

解得:  $k = 2$ ,

$$\therefore a = 5 \times 2 = 10;$$

【小问 2 详解】

解: 设  $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = k \ (k > 0)$ ,

则  $a = 5k, b = 12k, c = 13k$ ,

$$\because a^2 + b^2 = (5k)^2 + (12k)^2 = 25k^2 + 144k^2 = 169k^2, \quad c^2 = (13k)^2 = 169k^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

即  $\triangle ABC$  是直角三角形,  $\angle C = 90^\circ$ ,

$\because \triangle ABC$  的面积为 60,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5k \times 12k = 60,$$

$$\text{即 } 30k^2 = 60,$$

解得:  $k = \sqrt{2}$  (负值舍去),

$$\therefore a = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

20. 在画二次函数  $y = x^2 + bx + c$  的图象时, 列表如下:

|     |  |    |    |    |   |   |  |
|-----|--|----|----|----|---|---|--|
| $x$ |  | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |  |
|-----|--|----|----|----|---|---|--|

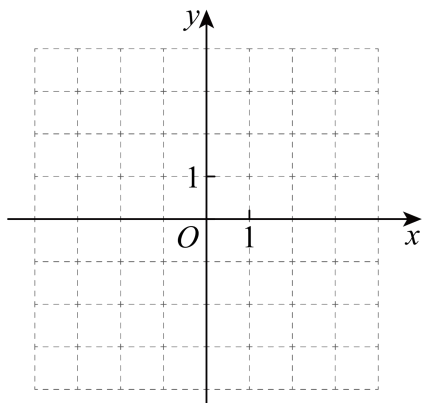
|     |  |   |     |     |    |   |  |
|-----|--|---|-----|-----|----|---|--|
| $y$ |  | 0 | $m$ | $n$ | -3 | 0 |  |
|-----|--|---|-----|-----|----|---|--|

(1) 直接写出  $b$ 、 $c$ 、 $m$ 、 $n$  的值:

$b =$  \_\_\_\_\_;  $c =$  \_\_\_\_\_;

$m =$  \_\_\_\_\_;  $n =$  \_\_\_\_\_;

(2) 在所给的平面直角坐标系  $xOy$  中, 画出这个二次函数的大致图象, 并描述图象的变化趋势



**【答案】** (1)  $2, -3, -3, -4$

(2) 图见解析, 在直线  $x = -1$  的左侧图象下降, 在直线  $x = -1$  的右侧图象上升

**【解析】**

**【分析】** 本题考查二次函数的图象和性质, 熟练掌握五点作图法是解题的关键:

(1) 待定系数法求出函数解析式, 进而求出  $m, n$  的值即可;

(2) 描点, 连线画出函数图象, 根据图象描述增减性即可.

**【小问 1 详解】**

解: 由表格可知, 函数图象与  $x$  轴的两个交点坐标为  $(-3, 0)$  和  $(1, 0)$ ,

$\therefore$  二次函数的解析式为  $y = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$ ,

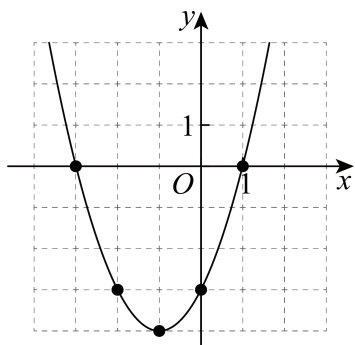
$\therefore b = 2, c = -3$ ,

当  $x = -2$  时,  $m = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 = -3$ ;

当  $x = -1$  时,  $n = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = -4$ ;

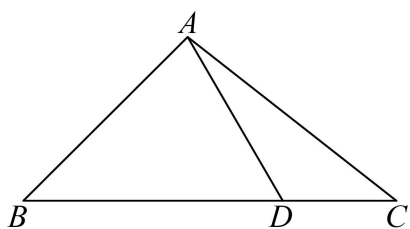
**【小问 2 详解】**

解: 描点, 连线, 画出函数图象如下:



由图象可知：在直线  $x = -1$  的左侧图象下降，在直线  $x = -1$  的右侧图象上升.

21. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{6}$ ， $AC = \sqrt{7}$ ，点  $D$  在边  $BC$  上，且  $\angle ADC = 120^\circ$ .



- (1) 求  $BD$  的长；
- (2) 求  $\angle CAD$  的余弦值.

【答案】(1)  $\sqrt{3} + 1$

(2)  $\frac{5\sqrt{7}}{14}$

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形，添加辅助线构造直角三角形是解题的关键：

- (1) 过点  $A$  作  $AE \perp BC$  于点  $E$ ，分别解  $\text{Rt}\triangle ABE$  和  $\text{Rt}\triangle AED$ ，进行求解即可.
- (2) 作  $DF \perp AC$  于点  $F$ ，勾股定理求出  $CE$  的长，进而求出  $BC$  的长，等积法求出  $DF$  的长，勾股定理求出  $AF$  的长，再利用余弦的定义进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：过点  $A$  作  $AE \perp BC$  于点  $E$ ，

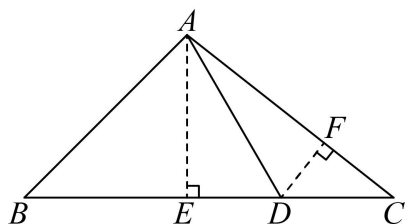
在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中， $\angle B = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{6}$ ，

$$\therefore AE = BE = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \sqrt{3},$$

在  $\text{Rt}\triangle AED$  中， $AE = \sqrt{3}$ ， $\angle ADE = 180^\circ - \angle ADC = 60^\circ$ ，

$$\therefore DE = AE \div \tan 60^\circ = 1, \quad AD = AE \div \sin 60^\circ = 2;$$

$$\therefore BD = BE + DE = \sqrt{3} + 1;$$



【小问 2 详解】

解：如 (1) 图，作  $DF \perp AC$  于点  $F$ ，

由 (1) 知：  $AE = BE = \sqrt{3}$ ,  $AD = 2$ ，

在  $\text{Rt}\triangle AEC$  中，  $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 2$ ，

$$\therefore BC = BE + CE = \sqrt{3} + 2,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} BD \cdot AE + \frac{1}{2} AC \cdot DF, \text{ 即 } (\sqrt{3} + 2) \times \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1) \times \sqrt{3} + \sqrt{7} DF,$$

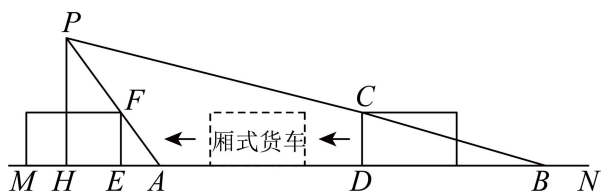
$$\therefore DF = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中，  $AD = 2$ ,  $DF = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，

$$\therefore AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \frac{5\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore \cos \angle CAD = \frac{AF}{AD} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

22. 如图， $P$  是在小区入口处安装的摄像头， $\triangle PAB$  是摄像头的监控区域。  $MN$  为水平地面，点  $A$ 、 $B$  在直线  $MN$  上。 已知摄像头离地面的高度  $PH = 4.8$  米，  $\angle APH = 37^\circ$ ，  $\angle APB = 39^\circ$ 。



(1) 求  $AB$  的长。

(2) 一辆高 2 米、长 4.4 米的厢式货车 (图中的矩形)，以每小时 5.4 千米的速度进入小区，那么从车头 ( $CD$ ) 进入监控区域到车尾 ( $EF$ ) 驶出监控区域需要几秒？

(参考数据：  $\sin 37^\circ = 0.6$ ，  $\cos 37^\circ = 0.8$ ，  $\tan 37^\circ = 0.75$ ，  $\sin 76^\circ = 0.97$ ，  $\cos 76^\circ = 0.24$ ，  $\tan 76^\circ = 4$ .)

【答案】(1) 15.6 米

(2) 9 秒

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形的实际应用，熟练掌握锐角三角函数的定义，是解题的关键：

(1) 分别解  $\text{Rt}\triangle PHA$ ,  $\text{Rt}\triangle PHB$ ，求出  $AH$ ,  $BH$  的长，进而求出  $AB$  的长即可；

(2) 分别解  $\text{Rt}\triangle AEF$ ,  $\text{Rt}\triangle BDC$ ，求出  $AE$ ,  $BD$  的长，进而求出货车行驶的路程，利用时间等于路程除以速度进行求解即可。

【小问 1 详解】

解：在  $\text{Rt}\triangle PHA$  中， $PH = 4.8$ ， $\angle APH = 37^\circ$ ，

$$\therefore AH = PH \cdot \tan 37^\circ = 4.8 \times 0.75 = 3.6；$$

在  $\text{Rt}\triangle PHB$  中， $PH = 4.8$ ， $\angle HPB = \angle APH + \angle APB = 37^\circ + 39^\circ = 76^\circ$ ，

$$\therefore BH = PH \cdot \tan 76^\circ = 4.8 \times 4 = 19.2；$$

$$\therefore AB = BH - AH = 19.2 - 3.6 = 15.6 \text{ (米)}；$$

【小问 2 详解】

解：由题意， $CD = EF = 2$ ， $\angle AFE = \angle APH = 37^\circ$ ， $\angle BCD = \angle BPH = 76^\circ$ ，

在  $\text{Rt}\triangle AEF$  中， $AE = EF \cdot \tan 37^\circ = 1.5$ ；

在  $\text{Rt}\triangle BDC$  中， $BD = CD \cdot \tan 76^\circ = 8$ ，

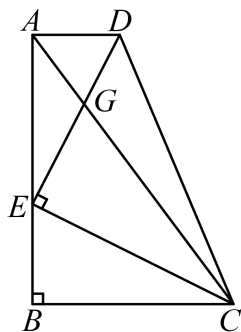
$$\therefore \text{厢式货车在监控范围内行驶的路程为 } AB - BD + AE + 4.4 = 15.6 - 8 + 1.5 + 4.4 = 13.5 \text{ (米)}；$$

$$5.4\text{km/h} = 1.5\text{m/s}，$$

$$\therefore t = 13.5 \div 1.5 = 9 \text{ (秒)}；$$

答：从车头 ( $CD$ ) 进入监控区域到车尾 ( $EF$ ) 驶出监控区域需要 9 秒。

23. 如图，在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $E$  是边  $AB$  上一点， $DE$  与  $AC$  交于点  $G$ ，如果  $CE$  平分  $\angle ACB$ ，且  $DE \perp CE$ 。



(1) 求证:  $AE^2 = AG \cdot AC$ ;

(2) 求证:  $AG \cdot GC = EG \cdot ED$ .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质, 等角对等边, 熟练掌握相似三角形的判定方法, 证明三角形相似, 是解题的关键.

(1) 根据同角的余角相等, 求出  $\angle BCE = \angle AED$ , 进而推出  $\angle AED = \angle ACE$ , 证明  $\triangle AEG \sim \triangle ACE$ , 即可得证;

(2) 证明  $\triangle AED \sim \triangle ECG$ , 得到  $AD \cdot CG = EG \cdot ED$ , 等角的余角相等结合对顶角相等, 得到  $\angle ADE = \angle AGD$ , 进而得到  $AG = AD$ , 即可得出结果.

【小问 1 详解】

证明:  $\because AD \parallel BC$ ,  $AB \perp BC$ ,

$\therefore AB \perp AD$ ,

$\therefore \angle BEC + \angle BCE = 90^\circ$ ,

$\because DE \perp CE$ ,

$\therefore \angle AED = \angle BEC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BCE = \angle AED$ ,

$\because CE$  平分  $\angle ACB$ ,

$\therefore \angle BCE = \angle ACE$ ,

$\therefore \angle AED = \angle ACE$ ,

又  $\because \angle EAG = \angle CAE$ ,

$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ACE$ ,

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AG}{AE}$ ,

$\therefore AE^2 = AG \cdot AC$ ;

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 知:  $BA \perp AD$ ,  $\angle AED = \angle ACE$ ,

又  $\because CE \perp DE$ ,

$\therefore \angle DAE = \angle CEG = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ECG$ ,

$$\therefore \frac{EG}{AD} = \frac{CG}{DE},$$

$$\therefore AD \cdot CG = EG \cdot ED,$$

$$\therefore \angle ECG + \angle EGC = 90^\circ, \angle AED + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EGC = \angle ADE,$$

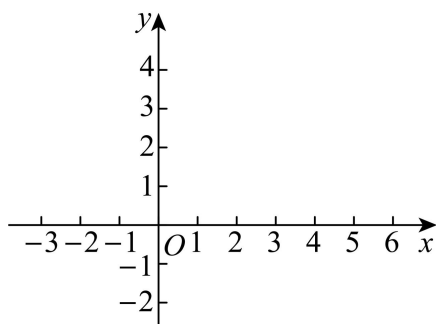
$$\therefore \angle EGC = \angle AGD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AGD,$$

$$\therefore AG = AD,$$

$$\therefore AG \cdot CG = EG \cdot ED.$$

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，一条抛物线与  $x$  轴交于点  $A(-2,0)$ 、点  $B(4,0)$ ，与  $y$  轴正半轴交于点  $C$ ，顶点为点  $D$ ，且  $OB = OC$ 。



(1) 求该抛物线的表达式和点  $D$  的坐标；

(2)  $P$  是抛物线上位于第一象限内的一点，且  $\angle PAB + \angle CAB = 90^\circ$ 。

①求点  $P$  的坐标；

②将该抛物线向右平移，点  $P$  移到点  $Q$ ，新抛物线的顶点为  $M$ ，如果新抛物线上存在点  $N$ ，使得四边形  $PMQN$  是平行四边形，求平移的距离。

**【答案】** (1)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ ,  $D\left(1, \frac{9}{2}\right)$

(2) ①  $P\left(3, \frac{5}{2}\right)$  ②  $4 - 2\sqrt{2}$  或  $4 + 2\sqrt{2}$  个单位长度

**【解析】**

**【分析】** 本题考查二次函数的综合应用，正确的求出函数解析式，利用数形结合的思想进行求解是解题的关键：

(1) 求出  $C$  点坐标，设出交点式，待定系数法求出函数解析式，进而求出顶点坐标即可；

(2) ①根据  $\angle CAB + \angle OCA = 90^\circ$ ,  $\angle PAB + \angle CAB = 90^\circ$ ，得到  $\angle PAB = \angle OCA$ ，进而得到

$\tan \angle PAB = \tan \angle OCA = \frac{1}{2}$ , 设直线  $AP$  与  $y$  轴交于点  $E$ , 则:  $\tan \angle PAB = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}$ , 求出  $E$  点坐标, 进而求出直线  $AP$  的解析式, 联立直线和抛物线的解析式, 求出  $P$  点坐标即可; ②设抛物线向右平移

$h(h > 0)$  个单位, 得到新的抛物线, 进而得到  $M\left(1+h, \frac{9}{2}\right)$ ,  $Q\left(3+h, \frac{5}{2}\right)$ , 设  $N(m, n)$ , 根据平行四边形的性质, 结合中点坐标公式求出  $N$  点坐标, 代入新的函数解析式, 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  一条抛物线与  $x$  轴交于点  $A(-2, 0)$ 、点  $B(4, 0)$ ,

$\therefore$  设抛物线的解析式为  $y = a(x+2)(x-4)$ ,

$\because OB = OC$ ,  $B(4, 0)$ ,

$\therefore OC = OB = 4$ ,

$\because$  抛物线与  $y$  轴正半轴交于点  $C$ ,

$\therefore C(0, 4)$ ,

把  $C(0, 4)$  代入  $y = a(x+2)(x-4)$ , 得  $a(0+2)(0-4) = 4$ , 解得  $a = -\frac{1}{2}$ ,

$\therefore y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ ,

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$ ,

$\therefore$  当  $x = 1$  时,  $y = -\frac{1}{2} \times 1^2 + 1 + 4 = \frac{9}{2}$ ,

$\therefore D\left(1, \frac{9}{2}\right)$ ;

【小问 2 详解】

解: ①  $\because \angle CAB + \angle OCA = 90^\circ$ ,  $\angle PAB + \angle CAB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle PAB = \angle OCA$ ,

$\because A(-2, 0), C(0, 4)$ ,

$\therefore OA = 2, OC = 4$ ,

$\therefore \tan \angle OCA = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore \tan \angle PAB = \tan \angle OCA = \frac{1}{2}$ ,

设直线  $AP$  与  $y$  轴交于点  $E$ ，则：  $\tan \angle PAB = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore OE = 1,$$

$\therefore$  点  $P$  在第一象限，

$$\therefore E(0,1),$$

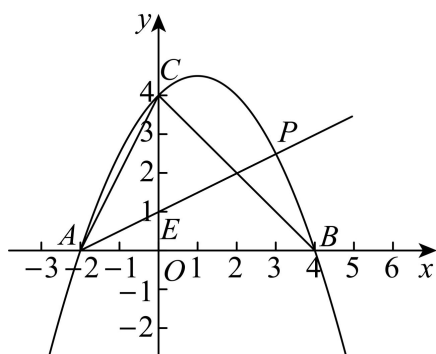
设直线  $AP$  的解析式为  $y = kx + 1$ ，

把  $A(-2,0)$  代入，得  $-2k + 1 = 0$ ，解得  $k = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(3, \frac{5}{2}\right);$$



②设抛物线向右平移  $h$  ( $h > 0$ ) 个单位，得到新的抛物线，

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{平移后的抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}(x-1-h)^2 + \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{平移后的抛物线的顶点坐标为 } M\left(1+h, \frac{9}{2}\right),$$

$$\text{由①知: } P\left(3, \frac{5}{2}\right),$$

$$\therefore Q\left(3+h, \frac{5}{2}\right),$$

设  $N(m, n)$ ,

$\therefore$  四边形  $PMQN$  为平行四边形,

$\therefore PQ, MN$  为对角线,

$$\therefore \begin{cases} 3+3+h = m+1+h \\ \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = n + \frac{9}{2} \end{cases},$$

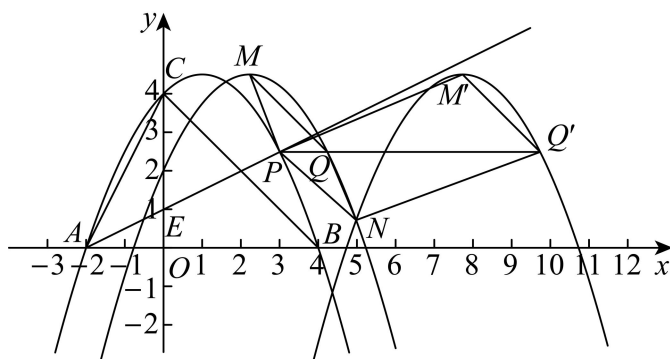
$$\therefore \begin{cases} m = 5 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore N\left(5, \frac{1}{2}\right),$$

把  $N\left(5, \frac{1}{2}\right)$  代入  $y = -\frac{1}{2}(x-1-h)^2 + \frac{9}{2}$ , 得  $-\frac{1}{2}(5-1-h)^2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ ,

解得  $h = 4 - 2\sqrt{2}$  或  $h = 4 + 2\sqrt{2}$ ;

即平移的距离为  $4 - 2\sqrt{2}$  或  $4 + 2\sqrt{2}$  个单位长度.



25. 在  $\square ABCD$  中,  $P$  是边  $BC$  上一点, 将  $\triangle APB$  沿直线  $AP$  翻折, 点  $B$  落在  $PD$  上的点  $E$  处,  $AE$  的延长线交射线  $BC$  于点  $F$ .

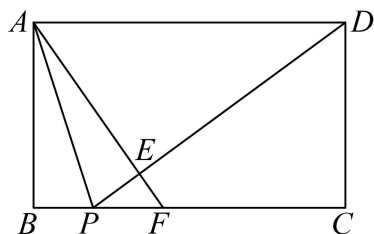


图 1

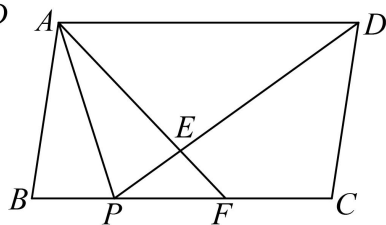


图 2

(1) 如图 1, 当四边形  $ABCD$  是矩形时, 如果  $BP = 4$ ,  $PF = 5$ , 求四边形  $ABCD$  的面积;

(2) 如图 2, 如果  $BP=1$ ,  $CP=2$ , 四边形  $CDEF$  的面积是  $\frac{3}{2}$ , 求  $\angle ADP$  的正弦值;

(3) 如果  $AB=AP$  且  $CF=\frac{1}{2}PF$ , 求  $\frac{AB}{AD}$  的值.

【答案】(1) 240;

(2)  $\frac{2}{3}$ ;

(3)  $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{4}$  或  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得到  $\angle ABP = \angle C = 90^\circ$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = CD$ , 根据折叠的性质得到  $\angle AEP = 90^\circ$ ,  $BP = EP = 4$ ,  $EA = AB = CD$ , 根据勾股定理得到  $EF = 3$ , 证明  $\triangle ADE \sim \triangle FPE$ 、 $\triangle EPF \sim \triangle CPD$ , 得到  $\frac{AD}{5} = \frac{DE}{4} = \frac{AE}{3}$ 、 $\frac{CP}{4} = \frac{PD}{5} = \frac{CD}{3}$ , 根据  $EA = CD$  可知  $\frac{AD}{5} = \frac{DE}{4} = \frac{CP}{4} = \frac{PD}{5}$ , 设  $\frac{AD}{5} = \frac{DE}{4} = \frac{CP}{4} = \frac{PD}{5} = k$ , 则  $PD = DE + PE = 4k + 4 = 5k$ , 求出  $k = 4$ , 进而求出  $AD = 20$ ,  $AB = 12$ , 根据矩形的面积公式计算即可;

(2) 根据折叠的性质得到  $\angle APB = \angle APE$ ,  $BP = EP = 1$ , 根据平行四边形的性质得到  $AD \parallel BC$ ,  $AD = BC = 3$ , 进而得到  $\angle ADP = \angle DPC$ ,  $\angle APE = \angle DAP$ , 根据等角对等边得到  $PD = AD = 3$ , 则  $DE = 2$ , 证明  $\triangle ADE \sim \triangle FPE$ , 得到  $\frac{AD}{FP} = \frac{DE}{PE}$ , 求出  $FP = \frac{3}{2}$ , 则  $FC = \frac{1}{2}$ , 连接  $CE$ , 设  $\triangle PEF$  的面积是  $3S$ , 根据“三角形高相等, 面积比等于底的比”得到  $\triangle CEF$  的面积是  $S$ ,  $\triangle CED$  的面积是  $8S$ , 根据四边形  $CDEF$  的面积是  $\frac{3}{2}$  得到  $\triangle CED$  的面积是  $\frac{3}{2} - S$ , 列方程求出  $S = \frac{1}{6}$ , 则  $\triangle CDP$  的面积是 2, 作  $DG \perp BC$  交  $BC$  延长线于  $G$ , 根据三角形面积公式求出  $DG = 2$ , 根据正弦的定义得到  $\sin \angle DPC = \frac{DG}{DP} = \frac{2}{3}$ , 即  $\sin \angle ADP = \frac{2}{3}$ ;

(3) 根据折叠的性质得到  $\angle APB = \angle APE$ ,  $BP = EP$ ,  $\angle BAP = \angle EAP$ ,  $\triangle ABP \cong \triangle AEP$ ,  $AB = AP = AE$ , 根据平行四边形的性质得到  $AD \parallel BC$ ,  $AD = BC$ , 进而得到  $\angle ADP = \angle DPC$ ,  $\angle APE = \angle DAP$ , 根据等角对等边得到  $PD = AD$ , 根据等边对等角得到  $\angle APB = \angle ABP$ , 即  $\angle APB = \angle ABP = \angle APE = \angle DAP$ , 则  $\triangle ABP \sim \triangle DAP$ 、 $\triangle AEP \sim \triangle DAP$ , 得到  $\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP} = \frac{AP}{DP}$ 、 $\frac{AE}{AD} = \frac{EP}{AP} = \frac{AP}{DP}$ , 即  $\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP} = \frac{AP}{DP} = \frac{AE}{AD} = \frac{EP}{AP}$ , 设  $\frac{AB}{AD} = x$ ,  $AD = a$ , 则  $PD = AD = a$ , 可得  $AP = ax$ ,  $BP = EP = a^2x$ ,  $ED = a(1-x^2)$ , 则  $x^2 < 1$ , 根据  $AD = BC = a$ ,  $BP = a^2x$  得到  $CP = a(1-x^2)$ , 当点  $F$  在线段  $PC$  上时, 根据  $CF = \frac{1}{2}PF$  得到  $PF = \frac{2}{3}a(1-x^2)$ , 证明  $\triangle ADE \sim \triangle FPE$ ,

得到  $\frac{a}{\frac{2}{3}a(1-x^2)} = \frac{a(1-x^2)}{ax^2}$ , 整理得到  $2x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ , 解关于  $x^2$  的方程得到  $x^2 = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$ , 根据完

全平方公式得到  $x^2 = \frac{7-\sqrt{33}}{4} = \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2}{8}$ , 开平方即可; 当点  $F$  在线段  $PC$  的延长线上时, 根据

$CF = \frac{1}{2}PF$  得到  $PF = 2a(1-x^2)$ , 证明  $ADE \sim FPE$ , 得到  $\frac{a}{2a(1-x^2)} = \frac{a(1-x^2)}{ax^2}$ , 整理得到

$2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ , 解关于  $x^2$  的方程得到  $x^2 = \frac{1}{2}$ , 开平方即可.

### 【小问 1 详解】

解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore \angle ABP = \angle C = 90^\circ$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = CD$ ,

$\because$  将  $\triangle APB$  沿直线  $AP$  翻折, 点  $B$  落在  $PD$  上的点  $E$  处,

$\therefore \angle AEP = 90^\circ$ ,  $BP = EP = 4$ ,  $EA = AB = CD$ ,

即  $\angle FEP = 90^\circ$ ,

$\therefore PF = 5$ ,

$\therefore EF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ,

$\therefore AD \parallel BC$ ,

$\therefore ADE \sim FPE$ ,

$\therefore \frac{AD}{FP} = \frac{DE}{PE} = \frac{AE}{FE}$ ,

即  $\frac{AD}{5} = \frac{DE}{4} = \frac{AE}{3}$ ,

$\therefore \angle FEP = \angle C = 90^\circ$ ,  $\angle EPF = \angle CPD$ ,

$\therefore \triangle EPF \sim \triangle CPD$ ,

$\therefore \frac{CP}{EP} = \frac{PD}{PF} = \frac{CD}{EF}$ ,

即  $\frac{CP}{4} = \frac{PD}{5} = \frac{CD}{3}$ ,

$\therefore EA = CD$ ,

$\therefore \frac{AE}{3} = \frac{CD}{3}$ ,

即  $\frac{AD}{5} = \frac{DE}{4} = \frac{CP}{4} = \frac{PD}{5}$ ,

设  $\frac{AD}{5} = \frac{DE}{4} = \frac{CP}{4} = \frac{PD}{5} = k$ ,

$$\therefore AD = PD = 5k, \quad DE = CP = 4k,$$

$$\because PD = DE + PE = 4k + 4 = 5k,$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore AD = PD = 5k = 20, \quad DE = CP = 4k = 16,$$

$$\because \frac{DE}{4} = \frac{AE}{3},$$

$$\therefore \frac{16}{4} = \frac{AE}{3},$$

$$\therefore AE = 12,$$

$$\text{即 } AB = 12,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \times AD = 12 \times 20 = 240;$$

【小问 2 详解】

解：  $\because$  将  $\triangle APB$  沿直线  $AP$  翻折，点  $B$  落在  $PD$  上的点  $E$  处，  $BP = 1$

$$\therefore \angle APB = \angle APE, \quad BP = EP = 1,$$

$$\because BP = 1, \quad CP = 2,$$

$$\therefore BC = 3,$$

$$\because \square ABCD,$$

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC = 3,$$

$$\therefore \angle APB = \angle DAP, \quad \angle ADP = \angle DPC,$$

$$\text{即 } \angle APE = \angle DAP,$$

$$\therefore PD = AD = 3,$$

$$\therefore DE = 2,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore ADE \sim FPE,$$

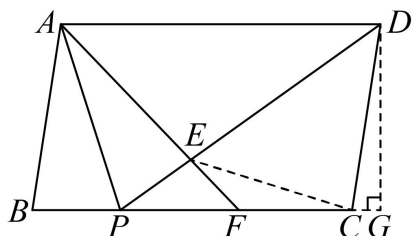
$$\therefore \frac{AD}{FP} = \frac{DE}{PE},$$

$$\text{即 } \frac{3}{FP} = \frac{2}{1},$$

$$\text{解得 } FP = \frac{3}{2},$$

$$\therefore FC = \frac{1}{2},$$

如图，连接  $CE$ ，



设  $\triangle PEF$  的面积是  $3S$ ，则  $\triangle CEF$  的面积是  $S$ ，

$\therefore \triangle CEP$  的面积是  $4S$ ，

$\because EP = 1, DE = 2$ ，

$\therefore \triangle CED$  的面积是  $8S$ ，

$\therefore$  四边形  $CDEF$  的面积是  $\frac{3}{2}$ ，

$\therefore \triangle CED$  的面积是  $\frac{3}{2} - S$ ，

即  $8S = \frac{3}{2} - S$ ，

解得：  $S = \frac{1}{6}$ ，

$\therefore \triangle CEP$  的面积是  $4S = \frac{2}{3}$ ，  $\triangle CED$  的面积是  $8S = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore \triangle CDP$  的面积是  $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$ ，

作  $DG \perp BC$  交  $BC$  延长线于  $G$ ，

则  $S_{\triangle CDP} = \frac{1}{2} \times PC \times DG = \frac{1}{2} \times 2 \times DG = 2$ ，

解得：  $DG = 2$ ，

$\therefore PD = 3$

$\therefore \sin \angle DPC = \frac{DG}{DP} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \angle ADP = \angle DPC$ ，

$\therefore \sin \angle ADP = \frac{2}{3}$ ；

**【小问 3 详解】**

解：  $\because$  将  $\triangle APB$  沿直线  $AP$  翻折，点  $B$  落在  $PD$  上的点  $E$  处，

$\therefore \angle APB = \angle APE$ ，  $BP = EP$ ，  $\angle BAP = \angle EAP$ ，  $\triangle ABP \cong \triangle AEP$ ，  $AB = AP = AE$ ，

$\therefore \square ABCD$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，  $AD = BC$ ，

$\therefore \angle APB = \angle DAP$ ，  $\angle ADP = \angle DPC$ ，

即  $\angle APE = \angle DAP$ ，

$$\therefore PD = AD,$$

$$\because AB = AP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP,$$

$$\text{即 } \angle APB = \angle ABP = \angle APE = \angle DAP,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle DAP,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP} = \frac{AP}{DP}$$

$$\because \triangle ABP \cong \triangle AEP,$$

$$\therefore \triangle AEP \sim \triangle DAP$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{EP}{AP} = \frac{AP}{DP}$$

$$\text{即 } \frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP} = \frac{AP}{DP} = \frac{AE}{AD} = \frac{EP}{AP},$$

$$\text{设 } \frac{AB}{AD} = x, \quad AD = a, \quad \text{则 } PD = AD = a,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{DP},$$

$$\therefore x = \frac{AP}{a},$$

$$\text{即 } AP = ax,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP} = \frac{EP}{AP},$$

$$\therefore BP = EP = \frac{AB}{AD} \cdot AP = a \cdot ax = a^2 x,$$

$$\therefore ED = PD - PE = a - ax^2 = a(1 - x^2),$$

$$\because ED > 0, \quad a > 0,$$

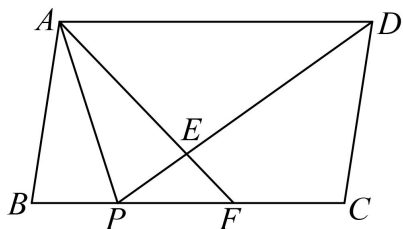
$$\therefore 1 - x^2 > 0,$$

$$\text{即 } x^2 < 1,$$

$$\because AD = BC = a, \quad BP = a^2 x,$$

$$\therefore CP = BC - BP = a - ax^2 = a(1 - x^2),$$

如图, 当点  $F$  在线段  $PC$  上时,



$$\therefore CF = \frac{1}{2}PF,$$

$$\therefore PF = \frac{2}{3}PC = \frac{2}{3}a(1-x^2),$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore ADE \sim FPE,$$

$$\therefore \frac{AD}{FP} = \frac{DE}{PE},$$

$$\therefore \frac{a}{\frac{2}{3}a(1-x^2)} = \frac{a(1-x^2)}{ax^2}$$

$$\text{即 } \frac{3}{2(1-x^2)} = \frac{1-x^2}{x^2},$$

$$\therefore 3x^2 = 2(1-x^2)^2,$$

$$\text{整理得 } 2x^4 - 7x^2 + 2 = 0,$$

$$\text{解关于 } x^2 \text{ 的方程得 } x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4},$$

$$\therefore x^2 < 1,$$

$$\therefore x^2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$$

$$= \frac{14 - 2\sqrt{33}}{8}$$

$$= \frac{11 + 3 - 2\sqrt{33}}{8}$$

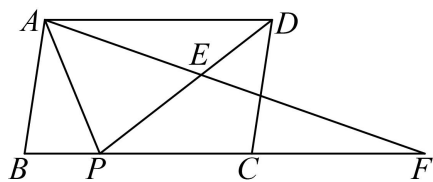
$$= \frac{(\sqrt{11})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{33}}{8}$$

$$= \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{3})^2}{8},$$

$$\begin{aligned}
\therefore x &= \sqrt{\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2}{8}} \\
&= \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{4},
\end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{4};$$

如图，当点  $F$  在线段  $PC$  的延长线上时，



$$\therefore CF = \frac{1}{2}PF,$$

$$\therefore PF = 2PC = 2a(1-x^2),$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore ADE \sim FPE,$$

$$\therefore \frac{AD}{FP} = \frac{DE}{PE},$$

$$\therefore \frac{a}{2a(1-x^2)} = \frac{a(1-x^2)}{ax^2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2(1-x^2)} = \frac{(1-x^2)}{x^2},$$

$$\therefore x^2 = 2(1-x^2)^2,$$

$$\text{整理得 } 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0,$$

$$\text{解关于 } x^2 \text{ 的方程得 } x^2_1 = 2, x^2_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 < 1,$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质，折叠的性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，平行四边形的性质，等腰三角形的判定和性质，求正弦值，全等三角形的判定和性质，完全平方公式变形求值，分母有理化，解一元二次方程，熟练掌握各知识点是解题的关键.

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：[shop492842749.taobao.com](https://shop492842749.taobao.com)



使用手机淘宝扫一扫

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：[shop492842749.taobao.com](https://shop492842749.taobao.com)



使用手机淘宝扫一扫