

杨浦区 2025-2026 学年度第一学期初三年级期末质量调研

数学学科

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 下列各组线段的长度中, 成比例的是 ()

- A. 1, 2, 3, 4 B. 2, 4, 4, 8 C. 1.5, 3, 4.5, 6 D. 3, 4, 5, 6

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了成比例线段, 若在四条线段中, 如果其中的两条线段的比等于另外两条线段的比, 那么这四条线段叫做成比例线段, 简称比例线段, 即一组线段 a 、 b 、 c 、 d , 若有 $a:b=c:d$, 这四条线段成比例线段, 这是解题关键.

通过计算 $a:b$ 与 $c:d$ 来判断是否成比例.

【详解】解: A、 $1:2 \neq 3:4$, 故不成比例线段;

B、 $2:4=4:8$, 故成比例线段;

C、 $1.5:3=1:2 \neq 4.5:6=3:4$, 故不成比例线段;

D、 $3:4 \neq 5:6$, 故不成比例线段;

故选: B.

2. 已知点 C 在线段 AB 上, 如果 $AB=3AC$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, 那么 $\overrightarrow{BC}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{3}\vec{a}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a}$ C. $-\frac{1}{3}\vec{a}$ D. $-\frac{2}{3}\vec{a}$

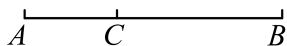
【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查平面向量的运算, 掌握平面向量的运算法则是解题的关键.

根据向量减法和线段比例关系求解 $\overrightarrow{BC}$

【详解】 $\because C$ 在线段 AB 上, 且 $AB=3AC$, 如图,



$$\therefore AC = \frac{1}{3}AB,$$

$$\therefore BC = \frac{2}{3}AB,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\vec{a}.$$

故选：D.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 1$ ，下列结论中正确的是（ ）

A. $\sin B = \frac{1}{3}$

B. $\cos B = \frac{1}{3}$

C. $\tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\cot B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

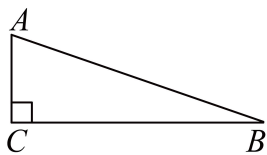
【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了锐角三角函数的定义，熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

根据题意画出图形，由勾股定理求出 BC 的长，再由锐角三角函数的定义进行解答即可.

【详解】解：如图所示：



$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $AB = 3$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}.$$

故选：A.

4. 一传送带和地面所成斜坡的坡比为 $1:2.4$ ，如果要把物体从地面送到离地面 10 米高的地方，那么物体所经过的路程是（ ）

A. 12 米

B. 13 米

C. 24 米

D. 26 米

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查坡比的概念，由坡比定义为垂直高度与水平距离之比，已知坡比1:2.4和垂直高度10米，可求水平距离，再应用勾股定理求斜坡长度.

【详解】 $\because$ 坡比为1:2.4，即垂直高度：水平距离=1:2.4，

$\therefore$ 垂直高度 $AC=10$ 米时，水平距离 $BC=10 \times 2.4=24$ 米，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，斜坡 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{10^2+24^2}=\sqrt{100+576}=\sqrt{676}=26$ 米.

$\therefore$ 物体所经过的路程为26米.

故选：D.

5. 如果将抛物线 $y=-(x+6)^2+8$ 向右平移10个单位，那么此抛物线与 y 轴的交点 P 在平移过程中的位置变化情况符合下列哪种情形（ ）

A. 持续向上 B. 持续向下 C. 先向上再向下 D. 先向下再向上

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的性质.

依据题意，根据“左加右减，上加下减”的平移规律，求出平移后的解析式，然后设此图象向右平移 m 单位($0 < m \leq 10$)，故新图象为 $y=-(x+6-m)^2+8$ ，由此可得 P' 的纵坐标满足的关系式，从而可以判断得解.

【详解】解：由题意， $\therefore$ 二次函数为 $y=-(x+6)^2+8$ ，

$\therefore$ 令 $x=0$ ，则 $y=-28$ ，即此时图象与 y 轴的交点 P 为 $(0, -28)$.

又根据“左加右减，上加下减”的平移规律，设此图象向右平移 m 单位($0 < m \leq 10$)，

$\therefore$ 新图象为 $y=-(x+6-m)^2+8$ ，

$\therefore$ 图象与 y 轴交点 P' 为 $(0, -m^2+12m-28)$ ，

又 $\because -m^2+12m-28=-(m-6)^2+8$ ，

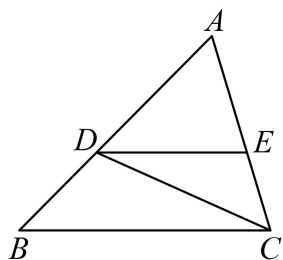
$\therefore$ 当 $m=6$ 时， P' 的纵坐标取最大值8，

又 $\because 0 < m \leq 10$ ，

$\therefore P$ 点位置的变化先向上再向下.

故选：C.

6. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $\angle ACD = \angle B$ ，下列结论中错误的是（ ）



A. $\frac{DC^2}{BC^2} = \frac{AE}{AC}$

B. $\frac{DE^2}{DC^2} = \frac{AD}{AB}$

C. $\frac{AD^2}{AC^2} = \frac{AE}{AB}$

D. $\frac{EC^2}{BD^2} = \frac{DE}{BC}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键。根据题意，易证 $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle ADE$ ， $\triangle DBC \sim \triangle ECD$ ，然后根据相似三角形对应边成比例列出式子，得到 $CD^2 = BC \cdot DE$ ， $AD^2 = AC \cdot AE$ ， $AC^2 = AB \cdot AD$ ，再结合比例式逐项判断即可。

【详解】解： $\because DE \parallel BC$ ， $\angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$$\therefore \angle EDC = \angle DCB,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle ADE, \triangle DBC \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD}, \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}, \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}, \frac{EC}{BD} = \frac{DE}{DC} = \frac{CD}{BC},$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE}, AD^2 = AC \cdot AE, AC^2 = AB \cdot AD,$$

$$\therefore CD^2 = BC \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{BC \cdot DE}{BC^2} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}, \text{ 故 A 正确, 不符合题意;}$$

$$\frac{DE^2}{DC^2} = \frac{DE^2}{BC \cdot DE} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 故 B 正确, 不符合题意;}$$

$$\frac{AD^2}{AC^2} = \frac{AC \cdot AE}{AB \cdot AD} \neq \frac{AE}{AB}, \text{ 故 C 错误, 符合题意;}$$

$$\frac{EC^2}{BD^2} = \frac{DE^2}{DC^2} = \frac{DE^2}{BC \cdot DE} = \frac{DE}{BC}, \text{ 故 D 正确, 不符合题意.}$$

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 请将结果直接填入答题纸的相应位置上.

7. 计算: $\cot 60^\circ =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了求特殊角的余切值, 根据三角函数定义, $\cot 60^\circ$ 是 $\tan 60^\circ$ 的倒数, 而 $\tan 60^\circ$ 为 $\sqrt{3}$, 然后即可得出答案.

【详解】 解: $\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

8. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{a+b}{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查代数式的运算, 掌握整体代换是解题的关键.

将 $\frac{a+b}{b}$ 拆分为 $\frac{a}{b} + \frac{b}{b}$, 并代入已知条件计算.

【详解】 由已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$

故答案为: $\frac{5}{3}.$

9. 已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且 $|\vec{a}| = 3$, 那么 $\vec{a} =$ _____. (用向量 $\vec{e}$ 的式子表示)

【答案】 $-3\vec{e}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量, 熟练掌握单位向量以及向量反向的定义是解题的关键.

根据单位向量的定义和向量方向相反的条件, 结合模长关系求解.

【详解】 $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且 $|\vec{a}| = 3, |\vec{e}| = 1,$

$\therefore \vec{a} = -3\vec{e}.$

故答案为: $-3\vec{e}$.

10. 如果二次函数 $y = x^2 - mx + m + 1$ 的图象经过原点, 那么 m 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据函数图像过原点, 所以将原点 $(0, 0)$ 代入解析式, 然后进一步求解即可.

【详解】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 - mx + m + 1$ 的图象经过原点,

$$\therefore 0 = 0 - 0 + m + 1,$$

解得: $m = -1$,

故答案为: -1 .

【点睛】 本题主要考查了二次函数的性质, 熟练掌握相关概念是解题关键.

11. 如果抛物线 $y = ax^2 + 2x$ 的开口向上, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 0$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象与系数之间的关系, 熟练掌握抛物线的开口方向决定的符号, 是解题的关键.

根据二次函数的性质, 当二次项系数大于零时, 抛物线开口向上.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 2x$ 的开口向上,

$$\therefore \text{二次项系数 } a > 0.$$

故答案为: $a > 0$.

12. 已知抛物线 $y = -x^2 + c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “ $>$ ”、“ $<$ ”、或 “ $=$ ”)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象性质, 熟悉掌握二次函数的图象性质是解题的关键.

找出二次函数的开口方向 and 对称轴, 即可根据位置信息求解.

【详解】 解: $\because y = -x^2 + c$

$\therefore a = -1$ 开口向下, y 有最大值, 且对称轴为 y 轴,

$\therefore$ 越靠近 y 轴, 值越大,

$$\because |-1| < |4|,$$

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为: $>$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 和中线 CE 相交于 G , 则 $AG: AD = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】2: 3

【解析】

【分析】由三角形重心的概念可知, 再根据重心的性质即可求得 $AG=2GD$, $AD=3GD$, 即可求得 $AG: AD$.

【详解】解: $\because AD$ 、 AE 分别是三角形的中线,

$\therefore G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG=2GD, AD=3GD,$$

$$\therefore AG: AD=2: 3.$$

故答案为: 2: 3.

【点睛】本题考查了重心的概念和性质: 三角形的重心是三角形三条中线的交点, 且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的2倍.

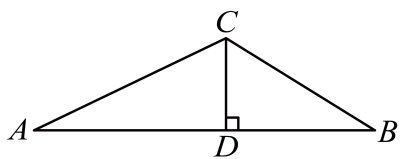
14. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AC=4$, $\angle A=30^\circ$, $\tan B=\frac{2}{3}$, 那么 BC 的长为_____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 分别解 $\text{Rt}\triangle ADC$ 和 $\text{Rt}\triangle BDC$, 求出 CD, BD , 再利用勾股定理求出 BC 的长即可.

【详解】解: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AC=4$, $\angle A=30^\circ$,

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AC = 2;$$

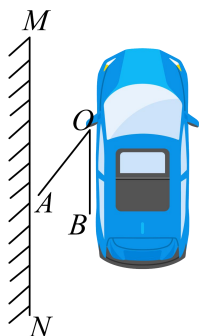
在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $CD=2$, $\tan B = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore BD=3,$$

$$\therefore BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{13};$$

故答案为: $\sqrt{13}$

15. 如图，是一辆小汽车与墙平行停放的平面示意图，汽车靠墙一侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 米，这辆小汽车车门宽 AO 为 1.2 米，当车门打开角度 $\angle AOB$ 为 40° 时，车门是否会碰到墙？_____。（填“是”或“否”）（参考数据： $\sin 40^\circ \approx 0.64$ ， $\cos 40^\circ \approx 0.77$ ， $\tan 40^\circ \approx 0.84$ ）

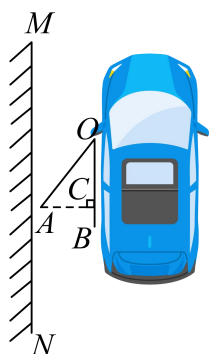


【答案】 否

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是正确添加辅助线. 过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C ，根据解直角三角形的计算求得 AC 长度，再与车跟墙壁的距离比较即可得到答案.

【详解】 解：如图，过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C ，



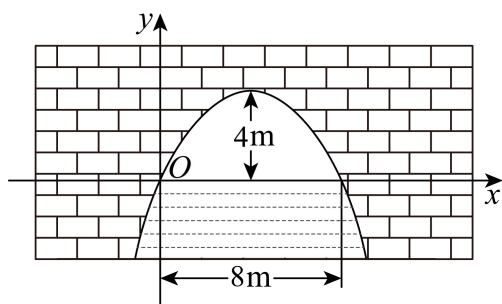
则在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\angle ACO = 90^\circ$ ， $\angle AOC = 40^\circ$ ， $AO = 1.2$ 米，

$$\therefore AC = AO \sin 40^\circ \approx 1.2 \times 0.64 = 0.768 < 0.8,$$

$\therefore$ 不会碰到墙.

故答案为： 否.

16. 已知抛物线形拱桥的横截面示意图，当拱顶离水面 4 米时，水面宽 8 米. 如图建立平面直角坐标系 xOy ，如果水面上升 3 米，那么水面宽度减少_____米.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的应用，理解题意求得函数表达式是解题的关键.

依题意，设该抛物线表达式为 $y = a(x-4)^2 + 4$ ，代入 $(0,0)$ ，从而得到抛物线的表达式，根据水面上升 3 米，则 $y=3$ ，求得此时对应的横坐标，从而得到此时的水面宽度，进而求得答案.

【详解】 解：依题意得，抛物线的顶点坐标为 $(4,4)$ ，

$\therefore$ 设该抛物线表达式为 $y = a(x-4)^2 + 4$ ，

代入 $(0,0)$ 得 $0 = a(0-4)^2 + 4$ ，

解得 $a = -\frac{1}{4}$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4$ ，

如果水面上升 3 米，则 $y=3$ ，

此时 $3 = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4$ ，

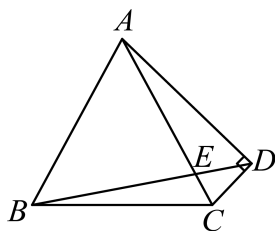
解得 $x_1 = 6$ ， $x_2 = 2$ ，

$\therefore$ 此时水面宽度为 $6-2=4$ (米)，

$\therefore$ 水面宽度减少 $8-4=4$ (米).

故答案为： 4.

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=BC=6$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $\angle ADC=90^\circ$ ， 对角线 AC 与 BD 相交于点 E ， 若 $BE=3DE$ ， 则 $BD=$ _____.



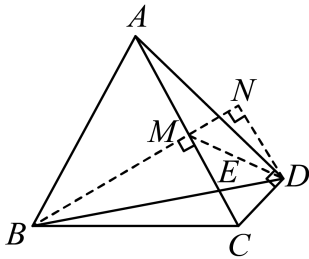
【答案】 $3\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了等边三角形的性质，勾股定理，直角三角形斜边中线定理等知识点，解题的关键是构造辅助线，熟练掌握以上性质.

过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M ，过点 D 作 $DN \perp BM$ 于点 N ，连接 DM ，利用平行线和等边三角形的性质，求出相关线段的长度和数量关系，利用直角三角形斜边中线定理求出 DM 长度，最后利用勾股定理求解即可.

【详解】 解：过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M ，过点 D 作 $DN \perp BM$ 于点 N ，连接 DM .



$$\therefore \angle BMC = \angle BND = 90^\circ,$$

$$\therefore CM \parallel DN.$$

$\because BE = 3DE$ ，根据同高，

$$\therefore S_{\triangle MBE} = 3S_{\triangle MED},$$

将 ME 看作两个三角形的同底，且 $CM \parallel DN$ ，则 MN 等于 MED 的高，

$$\therefore BM = 3MN.$$

$$\because AB = BC = 6, \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AC = 6.$$

$$\because BM \perp AC,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AC = 3.$$

$$\therefore BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore MN = \sqrt{3},$$

$$\therefore BN = 4\sqrt{3},$$

$\because \angle ADC = 90^\circ$ ，点 M 为 AC 中点，

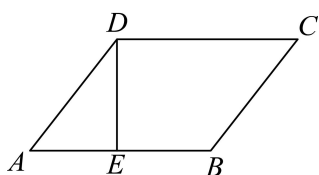
$$\therefore DM = \frac{1}{2} AC = 3,$$

$$\therefore DN = \sqrt{DM^2 - MN^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore BD = \sqrt{BN^2 + DN^2} = \sqrt{48 + 6} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

故答案为: $3\sqrt{6}$.

18. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 5$, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为点 E , 将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转得到 $\triangle FGE$, 点 A 的对应点 F 落在边 AD 上, 点 D 的对应点 G 落在边 BC 上, 连接 FG 与 DE 交于点 H , 那么 $\frac{FH}{GH}$ 的值_____.

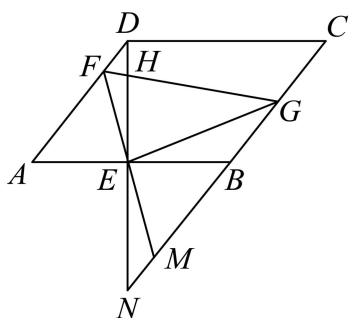


【答案】 $\frac{7}{32}$

【解析】

【分析】分别延长 CB , DE , FE 交于 N , M , 根据旋转的性质和等边对等角得到 $\angle A = \angle EFA = \angle EFG$, 根据平行四边形的性质得到 $AB = DC = 6$, $BC = AD = 5$, $AD \parallel BC$, 进而根据 $AD \parallel BC$ 得到 $\angle A = \angle EBM = \angle EMB = \angle EFA = \angle EFG$, 根据等角对等边得到 $EB = EM$, $FG = MG = 5$, 根据等腰三角形三线合一得到 $EF = EM$, 即 $EF = EM = \frac{1}{2} AB = 3$, $MF = 6$, 证明 $\triangle FDE \cong \triangle MNE$ (SAS), 得到 $FD = MN$, 证明 $\triangle EAF \sim \triangle GMF$, 得到 $\frac{AF}{MF} = \frac{AE}{GM}$, 求出 $AF = \frac{18}{5}$, 则 $FD = MN = \frac{7}{5}$, 证明 $\triangle DFH \sim \triangle NGH$, 根据 $\frac{FH}{GH} = \frac{FD}{GN}$ 计算即可.

【详解】解: 如图所示, 分别延长 CB , DE , FE 交于 N , M .



由题知: $AE = EF$,

$$\therefore \angle A = \angle EFA = \angle EFG,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AB = DC = 6, BC = AD = 5, AD \parallel BC,$

$\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle A = \angle EBM = \angle EMB = \angle EFA = \angle EFG,$

$\therefore FG = MG, EB = EM,$

即 $FG = MG = AD = BC = 5,$

$\because EG \perp FM,$

$\therefore EF = EM$

即 $EF = EM = AE = EB = \frac{1}{2}AB = 3, EF + EM = MF = AB = 6,$

$\therefore \triangle FDE \cong \triangle MNE (\text{SAS}),$

$\therefore FD = MN,$

$\because \angle A = \angle EFG, \angle EMB = \angle EFA,$

$\therefore \triangle EAF \sim \triangle GMF,$

$\therefore \frac{AF}{MF} = \frac{AE}{GM}$

即 $\frac{AF}{6} = \frac{3}{5},$

解得 $AF = \frac{18}{5}$

$\therefore FD = MN = AD - AF = \frac{7}{5},$

$\because AD \parallel BC,$

$\therefore \triangle DFH \sim \triangle NGH,$

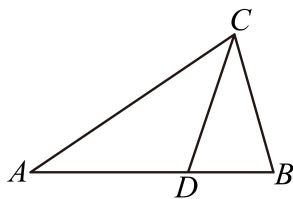
$\therefore \frac{FH}{GH} = \frac{FD}{GN} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{5} + 5} = \frac{7}{32}.$

故答案为: $\frac{7}{32}.$

【点睛】 本题考查了旋转的性质，等腰三角形的判定和性质，平行四边形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，熟练掌握各知识点是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $AD = 2BD.$



(1) 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含有向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示)

(2) 如果 $\angle BCD = \angle A$, $BC = 6$, 求 AB 的长.

【答案】 (1) $-\frac{3}{2}\vec{b} + \vec{a}$

(2) $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的运算和相似三角形的判定与性质, 熟练掌握向量的运算法则和相似三角形的判定是解题的关键.

(1) 根据题意可推出 $AB = \frac{3}{2}AD$, 则有 $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$, 再根据 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 计算即可解答;

(2) 根据题意易证 $\triangle BCD \sim \triangle BAC$, 得到 $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$, 结合 $AD = 2BD$, $BC = 6$, 即可求得 AB 的长.

【小问 1 详解】

解: $\because AD = 2BD$,

$$\therefore AB = \frac{3}{2}AD,$$

$$\because \overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\vec{b} + \vec{a},$$

故答案为: $-\frac{3}{2}\vec{b} + \vec{a}$;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle BCD = \angle A$, $\angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC},$$

$$\because AD = 2BD, BC = 6,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{3}AB,$$

$$\therefore \frac{6}{AB} = \frac{\frac{1}{3}AB}{6}$$

$$\therefore AB = 6\sqrt{3}.$$

20. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中, 函数值 y 与自变量 x 之间的部分对应关系如下表所示.

x	$\cdots$	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	0	1	0	$\cdots$

(1) 求该二次函数的解析式及其图像的对称轴;

(2) 设该二次函数图像与 x 轴相交于点 A (点 A 在对称轴的右侧), 与 y 轴相交于点 B , 顶点为 C , 求 ABC 的面积.

【答案】 (1) $y = -(x-2)^2 + 1$, 对称轴为直线 $x = 2$

(2) 3

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数的图像与性质, 勾股定理及其逆定理, 熟练掌握二次函数的图像与性质是解题的关键.

(1) 由表格数据可知, 该抛物线顶点为 $(2, 1)$, 图像的对称轴为直线 $x = 2$, 然后设 $y = a(x-2)^2 + 1$, 将 $(0, -3)$ 代入, 即可求得解析式;

(2) 由表格数据可知, $A(3, 0)$, $B(0, -3)$, $C(2, 1)$, 然后由勾股定理及其逆定理可判断 ABC 为直角三角形, 然后根据面积公式即可解答.

【小问 1 详解】

解: 由表格数据可知, 该抛物线顶点为 $(2, 1)$,

$\therefore$ 设 $y = a(x-2)^2 + 1$, 且其图像的对称轴为直线 $x = 2$,

将 $(0, -3)$ 代入, 得 $-3 = a(0-2)^2 + 1$,

解得 $a = -1$,

$\therefore$ 该二次函数的解析式 $y = -(x-2)^2 + 1$.

【小问 2 详解】

解: 由表格数据可知, $A(3, 0)$, $B(0, -3)$, $C(2, 1)$,

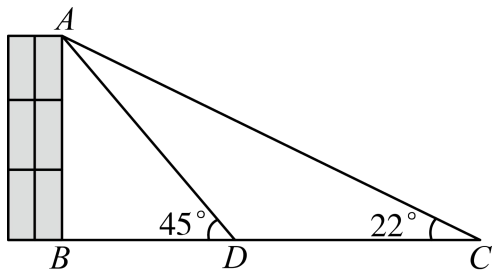
$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{(0-2)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{5}$,

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3.$$

21. 如图, 为了测量学校教学楼 AB 的高度, 小慧同学先在教学楼前点 D 处测得楼顶 A 的仰角为 45° , 再沿 BD 方向后退了 16 米到点 C 处, 此时测得楼顶 A 的仰角为 22° (B 、 D 、 C 在一条直线上), 根据这些数据, 请你帮助小慧求出教学楼 AB 的高度 (精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 22^\circ = \frac{3}{8}$, $\cos 22^\circ \approx \frac{15}{16}$, $\tan 22^\circ \approx \frac{2}{5}$)



【答案】 教学楼 AB 的高度为 10.7 米

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用, 等腰直角三角形的判定, 熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据题意可知 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形, 设 $AB = x$, 则 $BD = AB = x$, $BC = BD + CD = x + 16$, 然后根据在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan C = \frac{AB}{BC} \approx \frac{2}{5}$, 代入得到方程, 解之即可.

【详解】 解: 设 $AB = x$,

由题意可知, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$, $CD = 16$ 米, $\angle C = 22^\circ$,

$$\therefore \angle DAB = \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = AB = x,$$

$$\therefore BC = BD + CD = x + 16,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{x+16} \approx \frac{2}{5},$$

解得 $x \approx 10.7$ 米,

$\therefore$ 教学楼 AB 的高度为 10.7 米.

22. 新定义: 由边长为 1 的小正方形构成的网格图形中, 每个小正方形的顶点称为格点. 如图, 已知在 8×8 的网格图形中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 都在格点上. 请按要求完成下列问题:

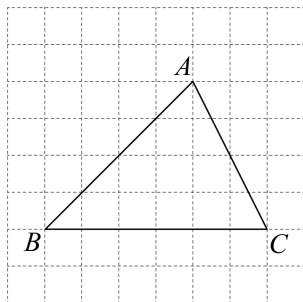


图1

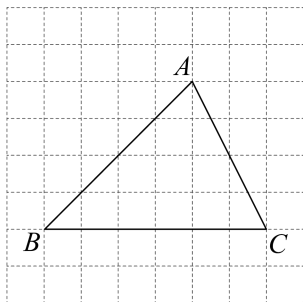


图2

(1) $\sin \angle BAC =$ _____;

(2) 请仅用无刻度的直尺作图 (不要求写作法, 但保留作图痕迹, 写出结论).

①如图 1, 在边 AB 上求作一点 P , 使 $\angle ACP = 45^\circ$;

②如图 2, 在边 AC 上求作一点 Q , 使 $BQ \perp AC$.

【答案】 (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) ①图见解析; ②图见解析

【解析】

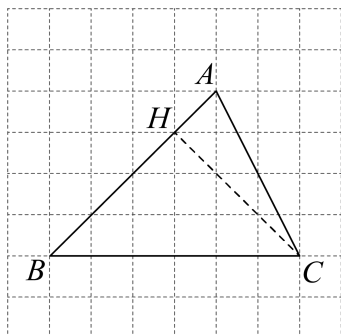
【分析】 (1) 过 C 作 $CH \perp AB$, 根据题意, 可知 $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \times 4}{2} = \frac{AB \times CH}{2}$, 利用网格求得 AB , AC , 然后即可求解;

(2) 将点 B 上移两格得到点 D , 连接 AD, CD , CD 交 AB 于点 P , 那么点 P 即为所求, 此时 $AD^2 = AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20, CD^2 = 2^2 + 6^2 = 40$, 其中 $AD^2 + AC^2 = CD^2$, 可判定 $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形, 则 $\angle ACP = 45^\circ$;

(3) 利用三角形高所在的直线相交于一点, 先画出 BC 边上的高 AH , 然后将点 A 往左一格, 再往下一格得到点 M , 连接 CM , 交 AH 于点 G , 连接 BG 并延长交 AC 于点 Q , 则点 Q 为所求作, 此时利用网格, 可得到 $BM^2 = CM^2 = 3^2 + 3^2 = 18, BC^2 = 36, BM^2 + CM^2 = BC^2$, 可判定 $\triangle BCM$ 为等腰直角三角形, 那么 $CM \perp AB$.

【小问 1 详解】

解: 如图所示: 过 C 作 $CH \perp AB$,



根据题意, 可知 $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \times 4}{2} = \frac{AB \times CH}{2}$, $AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $BC = 6$, $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

$$\therefore 6 \times 4 = 4\sqrt{2} \times CH,$$

$$\therefore CH = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{CH}{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

【小问 2 详解】

解: ①如图所示 P 为所求,

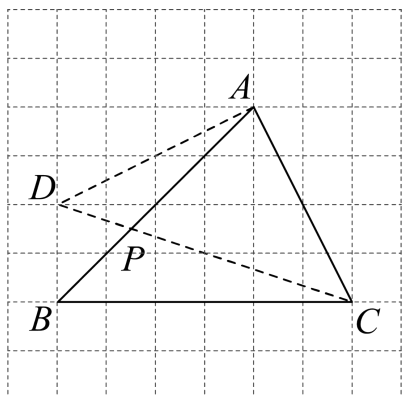


图1

②如图所示, Q 为所求,

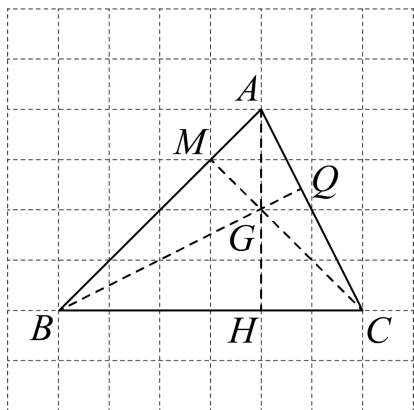
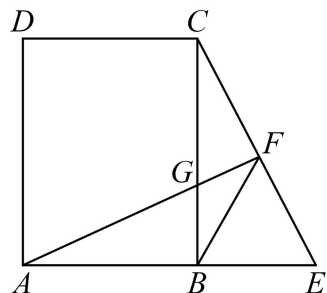


图2

【点睛】本题考查了三角形的面积，解直角三角形，勾股定理及其逆定理，等腰直角三角形的判定与性质，三角形三条高所在的直线相交于一点，熟练掌握以上知识点是解题的关键.

23. 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 的延长线上, 过 A 作 $AF \perp CE$, 垂足为点 F , $CF = EF$, AF 与边 BC 交于点 G , 联结 BF .



(1) 求证: $FB^2 = FA \cdot FG$;

(2) 连接 BD 与 AG 交于点 H , 如果 $AB = BC$, 求证: $\frac{AH}{HG} = \frac{HF}{FG}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $AF \perp CE$ 和矩形的性质, 结合直角三角形的锐角互余, 可证得 $\triangle AEF \sim \triangle CGF$, 根据相似三角形对应边成比例, 结合直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 即可证得结论;

(2) 由题意易得四边形 $ABCD$ 为正方形, 利用正方形的性质, 三角形外角的性质, 等边对等角和 $\triangle AEF \sim \triangle CGF$, 可求得 $\angle FHB = \angle FBH$, 可知 $HF = FB$, 然后根据 $\triangle ADH \sim \triangle GBH$, $\triangle AGB \sim \triangle CGF$, 得到 $\frac{AH}{HG} = \frac{AD}{GB} = \frac{AB}{GB}$, $\frac{CF}{GF} = \frac{AB}{GB}$, 利用等量代换即可证得结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because AF \perp CE$,

$\therefore \angle GFC = \angle EFA = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FAE + \angle FEB = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABG = \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCF = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle GFC = \angle EFA = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CGF,$$

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{EF}{GF},$$

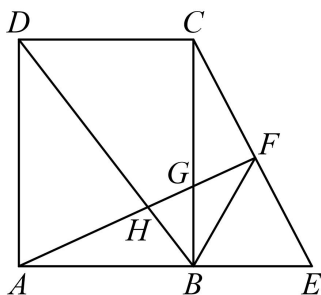
$$\therefore CF = EF,$$

$$\therefore CF = EF = BF,$$

$$\therefore FB^2 = FA \cdot FG.$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，



$$\therefore AB = BC,$$

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 45^\circ, \quad AB = BC = AD, \quad AD \parallel BC,$$

由 (1) 可知, $\triangle AEF \sim \triangle CGF$, $CF = BF$,

$$\therefore \angle GAB = \angle GCF = \angle CBF,$$

$$\therefore \angle FHB = \angle GAB + 45^\circ, \quad \angle FBH = \angle GBF + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FHB = \angle FBH,$$

$$\therefore HF = FB,$$

$$\therefore AD \parallel BC, \quad \angle AGB = \angle CGF, \quad \angle ABG = \angle CFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADH \sim \triangle GBH, \quad \triangle AGB \sim \triangle CGF,$$

$$\therefore \frac{AH}{HG} = \frac{AD}{GB} = \frac{AB}{GB}, \quad \frac{CF}{GF} = \frac{AB}{GB},$$

$$\therefore \frac{AH}{HG} = \frac{CF}{GF} = \frac{BF}{GF},$$

$$\therefore \frac{AH}{HG} = \frac{HF}{FG}.$$

【点睛】本题考查了矩形的性质，正方形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，直角三角形的性质，等腰三角形的判定与性质，三角形外角的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

24. 在一场篮球赛中，运动员小杨在距篮下 4 米处跳起投篮，球运行的路线呈抛物线形，当球运行的水平距离为 2.5 米时，到达最高点，此时球离地面的距离是 3.5 米，然后准确落入篮圈，已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 米.

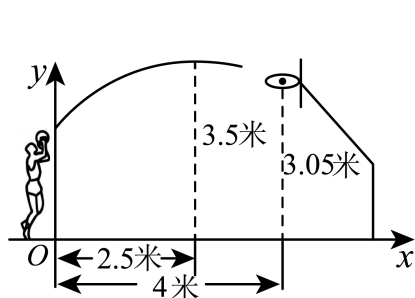


图1

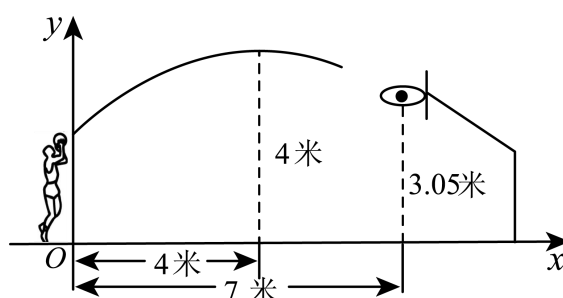


图2

(1) 如图 1 建立平面直角坐标系.

①求此抛物线的表达式;

②如果小杨的身高是 1.8 米，在这次跳投中，球在头顶上方 0.25 米，那么球出手时，他跳离地面的高度是多少米？

(2) 如图 2，在这场篮球赛中，另一位运动员小浦跳起投篮，已知球出手时离地面高 $\frac{20}{9}$ 米，与篮圈中心的水平距离为 7 米，当球出手后水平距离为 4 米时到达最高点，此时球离地面的距离是 4 米，设篮球运行的路线也呈抛物线形，问此球能否投中这个篮圈？

【答案】(1) ① $y = -0.2(x - 2.5)^2 + 3.5$; ② 0.2 米

(2) 不能投进

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的应用，理解题意求得二次函数的表达式是解题的关键.

(1) ①根据题意，设抛物线为 $y = a_1(x - 2.5)^2 + 3.5$ ，将 $(4, 3.05)$ 代入，即可求得抛物线表达式；②求得抛物线与 y 轴的交点坐标，即为球出手时离地面的高度，进而求得答案；

(2) 根据题意，设抛物线为 $y = a_2(x - 4)^2 + 4$ ，将 $(4, 3.05)$ 代入，求得抛物线表达式，然后把 $x = 7$ 代入表达式，求得 y 的值，即可判断.

【小问 1 详解】

解：①由题意可知，抛物线的顶点坐标为 $(2.5, 3.5)$ ，

$\therefore$ 设抛物线为 $y = a_1(x - 2.5)^2 + 3.5$ ，

将 $(4, 3.05)$ 代入 $y = a_1(x - 2.5)^2 + 3.5$ ，

得 $3.05 = a_1(4 - 2.5)^2 + 3.5$ ，

解得 $a_1 = -0.2$

$\therefore y = -0.2(x - 2.5)^2 + 3.5$ 。

②当 $x = 0$ 时， $y = -0.2(x - 2.5)^2 + 3.5 = -0.2 \times (-2.5)^2 + 3.5 = 2.25$ ，

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点为 $(0, 2.25)$ ，即球出手时离地面的高度为 2.25 米，

$\therefore$ 他跳离地面的高度为： $2.25 - 1.8 - 0.25 = 0.2$ （米）。

【小问 2 详解】

解：由题意可知，抛物线的顶点坐标为 $(4, 4)$ ，

$\therefore$ 设抛物线为 $y = a_2(x - 4)^2 + 4$ ，

将 $(0, \frac{20}{9})$ 代入 $y = a_2(x - 4)^2 + 4$ ，

得 $\frac{20}{9} = a_2(0 - 4)^2 + 4$ ，

解得 $a_2 = -\frac{1}{9}$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{9}(x - 4)^2 + 4$ 。

当 $x = 7$ 时， $y = -\frac{1}{9}(7 - 4)^2 + 4 = 3$ ，

$\therefore 3 < 3.05$ ，

$\therefore$ 不能投进。

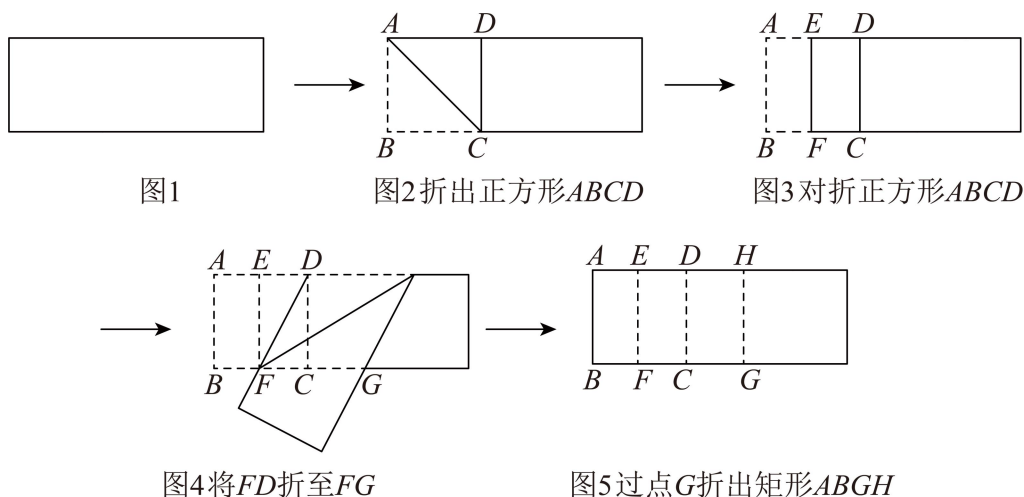
25. 综合与实践：折黄金矩形

【问题提出】

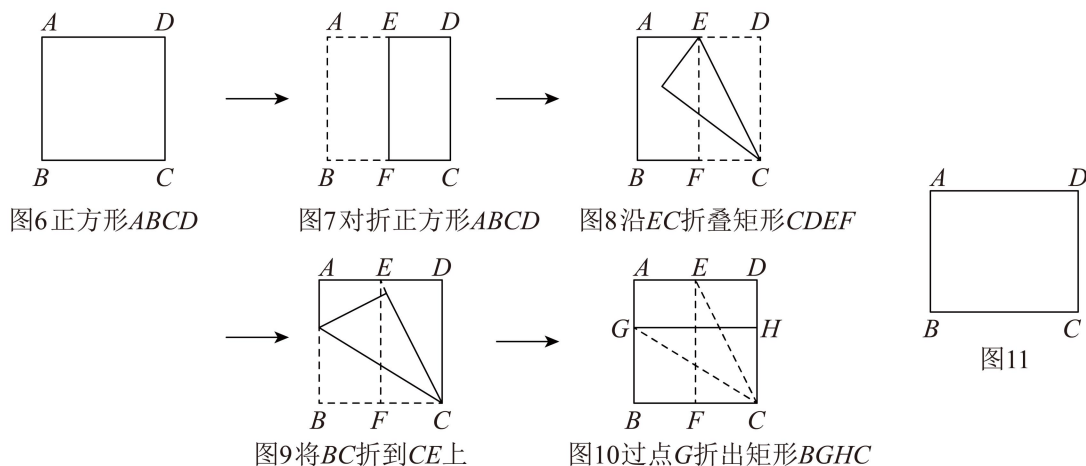
我们把宽与长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形称为黄金矩形。黄金矩形以协调、匀称的美感，常见于艺术、建筑、自然界中，那么，如何用不同形状的纸片折出黄金矩形，并证明这个矩形是黄金矩形呢？

【操作探究】

(1) 小创小组将一张矩形纸片 (如图 1) 按照图 2 至图 5 的方式操作, 那么图 5 中哪些矩形是黄金矩形? 请直接写出结论.



(2) 小智小组将一张正方形纸片 (如图 6) 按照图 7 至图 10 的方式操作, 得到矩形 $BGHC$, 你能证明矩形 $BGHC$ 是黄金矩形吗? 请写出证明过程.



【学以致用】

(3) 将一张矩形纸片 $ABCD$ (如图 11), 先按下列操作画出示意图, 再按要求解决问题.

- ①沿过点 C 的直线折叠, 使点 B 落在边 AD 上的点 E 处, 折痕交边 AB 于点 G ;
- ②沿过点 E 的直线折叠, 使点 D 落在线段 CE 上的点 H 处, 折痕交边 CD 于点 F ;
- ③沿过点 E 的直线折出矩形 $ENCD$, 折痕 EN 交线段 CG 于点 M , 连接 MH .

如果 $MH \perp EN$, 请说明点 G 是线段 AB 的黄金分割点.

【答案】(1) 矩形 $ABGH$ 、矩形 $CGHD$

(2) 见解析 (3) 见解析

【解析】

$$\therefore CE = \sqrt{ED^2 + CD^2} = \sqrt{5},$$

设 $BG = x$, 则 $AG = 2 - x$,

∴ 将 BC 折到 CE 上, 对应点为点 B' ,

$$\therefore CB' = CB = 2, \quad BG = GB' = x, \quad \angle GB'C = \angle GB'E = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore EB' = CE - CB' = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore AG^2 + AE^2 = EB'^2 + GB'^2,$$

$$\text{即 } (2-x)^2 + 1^2 = (\sqrt{5}-2)^2 + x^2,$$

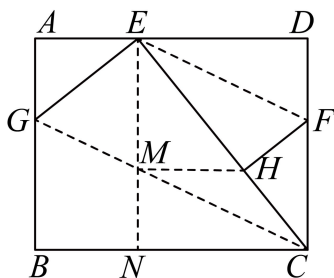
解得 $x = \sqrt{5} - 1$,

$$\therefore \frac{BG}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

∴ 矩形 $BGHC$ 是黄金矩形.

【小问 3 详解】

解: 如图所示示意图即为所求,

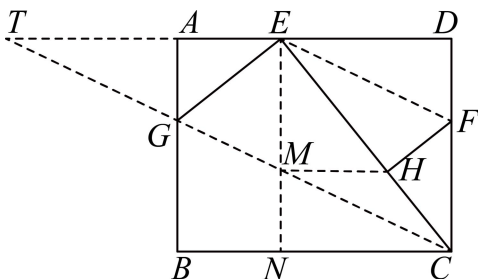


设 $AE = m$, $ED = n$,

∵ 四边形 $ABCD$ 、 $ENCD$ 为矩形,

$$\therefore BC = AD = AE + ED = m + n, \quad AD \parallel BC, \quad ED = NC = n,$$

如图, 延长 DA 、 CG 交于点 T ,



由折叠可知, $BC = EC = m + n$, $\angle BCG = \angle ECG$, $ED = EH = n$,

$$\therefore HC = EC - EH = m + n - n = m ,$$

$$\therefore TD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ETC = \angle BCG,$$

$$\therefore \angle ETC = \angle ECG,$$

$$\therefore ET = EC = m + n,$$

$$\therefore AT = ET - AE = m + n - m = n,$$

$$\therefore MH \perp EN,$$

$$\therefore MH \parallel ET \parallel NC,$$

$$\therefore \frac{TE}{NC} = \frac{ME}{MN} = \frac{EH}{HC}.$$

$$\therefore \frac{m+n}{n} = \frac{n}{m},$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}n,$$

$$\therefore AT \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AG}{GB} = \frac{AT}{BC} = \frac{n}{m+n} = \frac{n}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}n+n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\therefore$ 点 G 是线段 AB 的黄金分割点.

【点睛】 本题考查了折叠的性质，正方形的性质，矩形的性质，勾股定理，平行线分线段成比例，黄金分割点，等腰三角形的判定与性质等，熟练掌握折叠的性质，作出合适的辅助线是解题的关键.

小学、中学、高中电子版

最新资料认准“优尖升教育”全网唯一一家

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



使用手机淘宝扫一扫