

2025 学年度第一学期期末九年级自适应练习 (2026.1)

数学试卷

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
4. 填空题须在对应矩形框内作答, 超出对应边框作答无效.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 下列式子一定成立的是 ()

- A. $x = 5, y = 2$ B. $5x = 2y$ C. $y = \frac{5}{2}x$ D. $\frac{x-y}{y} = \frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了比例的基本性质, 分式的性质, 解题的关键是熟练掌握比例的基本性质. 由已知比例 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 通过代数变形验证各选项即可.

【详解】解: 选项 A: x 和 y 不一定为 5 和 2, 可能为其他比例相同的数, 不符合题意;

选项 B: 由比例得 $2x = 5y$, 不符合题意;

选项 C: 应由 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ 得 $y = \frac{2}{5}x$, 不符合题意;

选项 D: $\frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, 符合题意;

故选 D.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC = 1$, $BC = 2\sqrt{2}$, 那么 $\sin B$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查锐角三角函数的定义，根据勾股定理得出 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ 是解题的关键，由

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \text{ 求解即可.}$$

【详解】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore \text{由勾股定理， } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3，$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}，$$

故选 A.

3. 下列抛物线中，能满足经过原点，且对称轴为直线 $x=1$ 的是（ ）

A. $y = (x+1)^2$

B. $y = x^2 + 2x$

C. $y = -x^2 + 2x$

D. $y = x^2 - 2x + 1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的对称轴，掌握抛物线的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ 是解题的关键.

逐项验证 $x=0$ 时的坐标和对称轴即可.

【详解】 解： 选项 A： $y = (x+1)^2$ 经过 $(0,1)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，不符合题意；

选项 B： $y = x^2 + 2x$ 经过 $(0,0)$ ，对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$ ，不符合题意；

选项 C： $y = -x^2 + 2x$ 经过 $(0,0)$ ，对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$ ，符合题意；

选项 D： $y = x^2 - 2x + 1$ 经过 $(0,1)$ ，对称轴为直线 $x = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1$ ，不符合题意；

故选 C.

4. 设非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ， $\vec{b} = -3\vec{c}$ ，那么下列说法中错误的是（ ）

A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$

B. $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 方向相反

C. $|\vec{a}| = 6|\vec{c}|$

D. $\vec{a} - 6\vec{c} = \vec{0}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识，根据非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，有 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ， $\vec{b} = -3\vec{c}$ ，即可推出 $\vec{a} = -6\vec{c}$ ，然后逐一判断各选项的正确性.

【详解】解： $\because \vec{a} = 2\vec{b}$ ，且 $\vec{b} = -3\vec{c}$ ，

$$\therefore \vec{a} = 2 \times (-3\vec{c}) = -6\vec{c},$$

对于 A: $\because \vec{a} = -6\vec{c}$ ， $\therefore \vec{a} \parallel \vec{c}$ ，正确；

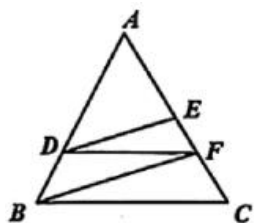
对于 B: $\because \vec{a} = -6\vec{c}$ ， $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 方向相反，正确；

对于 C: $|\vec{a}| = |-6\vec{c}| = 6|\vec{c}|$ ，正确；

对于 D: $\vec{a} - 6\vec{c} = -6\vec{c} - 6\vec{c} = -12\vec{c} \neq \vec{0}$ ，错误；

故选 D.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，点 E 、 F 在边 AC 上， $DF \parallel BC$. 下列条件中，不一定能判定 $DE \parallel BF$ 的是 ()



A. $\frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$

B. $\frac{DE}{BF} = \frac{DF}{BC}$

C. $\frac{EF}{FC} = \frac{DF}{BC}$

D. $\frac{CF}{AC} = \frac{EF}{AF}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是由平行得相似三角形，相似三角形的性质与判定，灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键，根据相似三角形的性质与判定，逐项判断即可.

【详解】解： $\because DF \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle EFD = \angle FCB, \quad \angle ADF = \angle ABC, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FC}, \quad \frac{BD}{AB} = \frac{CF}{AC}, \quad \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC},$$

选项 A: $\because \frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}, \therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AD}{BD}, \because \angle A = \angle A, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABF, \therefore \angle ADE = \angle ABF,$

$\therefore DE \parallel BF$, 不符合题意;

选项 B: $\because \frac{DE}{BF} = \frac{DF}{BC}, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BF}$, 不能得到 $DE \parallel BF$, 符合题意;

选项 C: $\because \frac{EF}{FC} = \frac{DF}{BC}, \angle EFD = \angle FCB, \therefore \triangle DEF \sim \triangle BFC, \therefore \angle EDF = \angle FBC, \therefore \angle ADF = \angle ABC,$

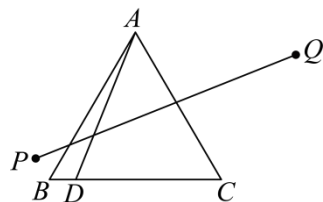
$\therefore \angle ADE = \angle ABF, \therefore DE \parallel BF$, 不符合题意;

选项 D: $\because \frac{CF}{AC} = \frac{EF}{AF}, \therefore \frac{EF}{AF} = \frac{BD}{AB}, \therefore \frac{EF}{AE} = \frac{BD}{AD}, \therefore \frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AD}, \because \angle A = \angle A, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABF,$

$\therefore \angle ADE = \angle ABF, \therefore DE \parallel BF$, 不符合题意;

故选: B.

6. 如图, 在等边三角形 ABC 中, 点 D 在边 BC 上, 点 D 关于直线 AB 、 AC 的对称点分别是点 P 、 Q , 那么关于线段 PQ 与线段 AD 之间的数量关系正确的是 ()



A. $PQ = \frac{2\sqrt{3}}{3} AD$

B. $PQ = \sqrt{3} AD$

C. $PQ = 2AD$

D. $PQ = \frac{3\sqrt{3}}{2} AD$

【答案】B

【解析】

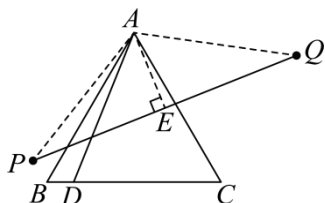
【分析】本题考查了轴对称的性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质等知识, 掌握知识点的运用是解题的关键.

连接 AP 、 AD 、 AQ , 过 A 作 $AE \perp PQ$ 于点 E , 由轴对称性质可得 $AP = AD = AQ$, $\angle BAD = \angle BAP$,

$\angle CAD = \angle CAQ$, $PE = QE = \frac{1}{2}PQ$, 又 ABC 是等边三角形, 则 $\angle BAC = 60^\circ$, 即 $\angle BAD + \angle CAD = 60^\circ$,

可得 $\angle PAQ = 120^\circ$ ，所以 $\angle APQ = \angle AQP = 30^\circ$ ，故有 $AE = \frac{1}{2}AP$ ，然后通过勾股定理即可求解.

【详解】解：如图，连接 AP 、 AD 、 AQ ，过 A 作 $AE \perp PQ$ 于点 E ，



$\because$ 点 D 关于直线 AB 、 AC 的对称点分别是点 P 、 Q ，

$\therefore AP = AD = AQ$ ， $\angle BAD = \angle BAP$ ， $\angle CAD = \angle CAQ$ ，

$\therefore PE = QE = \frac{1}{2}PQ$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$ ，即 $\angle BAD + \angle CAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle PAQ = \angle BAD + \angle BAP + \angle CAD + \angle CAQ = 2(\angle BAD + \angle CAD) = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle APQ = \angle AQP = 30^\circ$ ，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AP$ ，

$\because AP^2 = PE^2 + AE^2$ ，

$\therefore AP^2 = PE^2 + \left(\frac{1}{2}AP\right)^2$ ，

$\therefore PE = \frac{\sqrt{3}}{2}AP$ ，

$\therefore PQ = \sqrt{3}AP$ ，

$\therefore PQ = \sqrt{3}AD$ ，

故选：B.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 计算： $\sqrt[3]{8} = \underline{\quad}$.

【答案】2

【解析】

【分析】根据立方根的定义进行计算.

【详解】解： $\because 2^3=8$,

$$\therefore \sqrt[3]{8}=2,$$

故答案为：2.

8. 函数 $y = \frac{x-3}{x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查函数的定义域，根据分母不为0求解即可.

【详解】 $\because$ 函数 $y = \frac{x-3}{x}$,

$$\therefore x \neq 0,$$

$$\therefore \text{函数 } y = \frac{x-3}{x} \text{ 的定义域是 } x \neq 0,$$

故答案为： $x \neq 0$.

9. 已知反比例函数 $y = \frac{k+1}{x}$ ，其图象在所在的每一个象限内 y 都随 x 的增大而增大，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -1$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质，熟练掌握反比例函数的增减性是解题关键. 根据反比例函数的增减性可得 $k+1 < 0$ ，由此即可得.

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k+1}{x}$ 的图象在每一个象限内， y 都随 x 的增大而增大，

$$\therefore k+1 < 0,$$

解得 $k < -1$,

故答案为： $k < -1$.

10. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像经过点 $A(1,3)$ 、 $B(-1,1)$ ，那么这个二次函数的解析式为_____.

【答案】 $y = x^2 + x + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求函数解析式，将点 A 和点 B 的坐标代入二次函数解析式，得到关于 b 和 c 的方程组，然后求解方程组即可.

【详解】解：∵二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像经过点 $A(1,3)$ 、 $B(-1,1)$ ，

∴代入点 $A(1,3)$ 得： $3 = 1^2 + b \times 1 + c$ ，即 $b + c = 2$ ，

代入点 $B(-1,1)$ 得： $1 = (-1)^2 + b \times (-1) + c$ ，即 $-b + c = 0$ ，

解方程组：
$$\begin{cases} b + c = 2 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

两式相加得： $2c = 2$ ，解得 $c = 1$ ，

把 $c = 1$ 代入 $-b + c = 0$ 得： $-b + 1 = 0$ ，解得 $b = 1$ ，

∴二次函数的解析式为 $y = x^2 + x + 1$ ，

故答案为 $y = x^2 + x + 1$ 。

11. 已知抛物线 $y = 2x^2 + bx + b + 3$ 的对称轴是 y 轴，那么它的顶点坐标为_____。

【答案】 $(0,3)$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的图象及其性质，二次函数的对称轴，与 y 轴的交点为 $(0,c)$ 。由抛物线

对称轴是 y 轴，得 $x = -\frac{b}{2 \times 2} = -\frac{b}{4} = 0$ ，代入 $y = 2x^2 + bx + b + 3$ 求出 $b = 0$ ，再代入解析式得到 $y = 2x^2 + 3$ ，

最后求顶点坐标即可。

【详解】解：∵抛物线 $y = 2x^2 + bx + b + 3$ 的对称轴是 y 轴，

∴对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2 \times 2} = -\frac{b}{4} = 0$ ，

解得 $b = 0$ ，代入 $y = 2x^2 + bx + b + 3$ 得 $y = 2x^2 + 3$ ，

当 $x = 0$ 时， $2x^2 + 3 = 2 \times 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$ ，

∴顶点坐标为 $(0,3)$ 。

故答案为 $(0,3)$ 。

12. 将两根长度相同的细铜丝均在其黄金分割点处弯折（不计弯折处损耗），再首尾相接围成一个矩形 $ABCD$ （ $AB < BC$ ），连接 BD ，那么 $\angle DBC$ 的正切值等于_____。

【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查黄金分割的定义，矩形的性质，正切的定义，熟练掌握以上知识点是做题的关键. 先根据黄金分割定义，设出细铜丝的长度，进而表示出矩形的长和宽，再利用矩形的性质和正切的定义，进行计算即可.

【详解】 解：设每根细铜丝的长度为 $2a$ ，($a > 0$)，

由黄金分割的定义可得，较长线段的长度为 $2a \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (\sqrt{5}-1)a$ ，

$\therefore$ 较短线段的长度为 $2a - (\sqrt{5}-1)a = (3-\sqrt{5})a$ ，

$\therefore AB < BC$ ，

$\therefore$ 根据题意可得，矩形 $ABCD$ 的长 $BC = (\sqrt{5}-1)a$ ，宽 $CD = (3-\sqrt{5})a$ 。

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

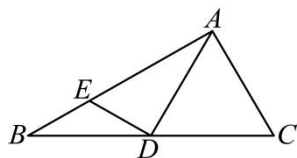
$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{(3-\sqrt{5})a}{(\sqrt{5}-1)a} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 为中线，点 E 在边 AB 上， $DE \perp AD$ 。如果 $BC = 20$ ，

$\cot B = \frac{5}{3}$ ，那么 $DE =$ _____。



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了利用余切求边长和直角三角形斜边中线的性质，由直角三角形斜边中线等于斜边一半可知 $AD = BD = DC = \frac{1}{2}BC = 10$ ，进而得出 $\angle B = \angle EDA$ ，再由 $DE = \frac{AD}{\cot \angle EAD}$ 即可得出结果。

【详解】 $\because \angle BAC = 90^\circ$ ， AD 为中线， $BC = 20$ ，

$$\therefore AD = BD = DC = \frac{1}{2}BC = 10,$$

$$\therefore \angle B = \angle EDA,$$

$$\because DE \perp AD, \cot B = \frac{5}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{AD}{\cot \angle EAD} = \frac{AD}{\cot B}$$

$$\text{即 } DE = 10 \div \frac{5}{3} = 6.$$

故答案为: 6.

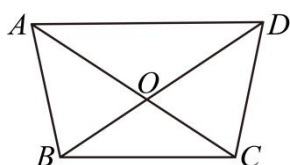
14. 已知四边形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$, $\angle ABD = 2\angle CAD$. 如果 $\angle ABC = 102^\circ$, 那么 $\angle ACD =$ _____ 度.

【答案】 68

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定与性质, 熟练掌握此知识点是做题的关键. 由条件 $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$, $\angle AOD = \angle BOC$, 可得 $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, 同理可得 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 再根据角之间的关系, 即可求出 $\angle ACD$ 的度数.

【详解】 解: 如图,



$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}, \angle AOD = \angle BOC \text{ (对顶角相等),}$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OBC.$$

同理可得, $\triangle AOB \sim \triangle DOC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD.$$

设 $\angle OAD = \angle OBC = \theta$, 则 $\angle ABD = 2\theta$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle OBC = 2\theta + \theta = 3\theta.$$

因为 $\angle ABC = 102^\circ$, 即 $3\theta = 102^\circ$,

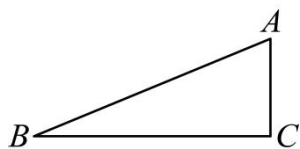
解得 $\theta = 34^\circ$,

又 $\because \angle ACD = \angle ABD$,

$\therefore \angle ACD = \angle ABD = 2\theta = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$.

故答案为: 68.

15. 如图, 斜坡 AB 的坡度为 $1:2.4$, 如果将斜坡的铅垂高度从 A 处沿射线 CA 的方向延伸 2 米, 并保持坡度不变, 那么需从 B 处沿射线 CB 的方向延伸_____米.



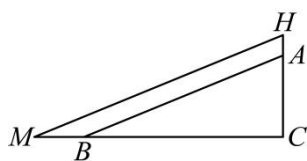
【答案】 4.8

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例, 坡度比的相关问题, 根据坡度比设 $AC = 5k$, $BC = 12k$, 由题意可知: $AH = 2$, $AB \parallel MH$, 则 $\frac{MB}{AH} = \frac{BC}{AC}$,

列方程求解即可.

【详解】 解: 如图所示: 斜坡 AB 的坡度为 $1:2.4$, 设 $AC = 5k$, $BC = 12k$,



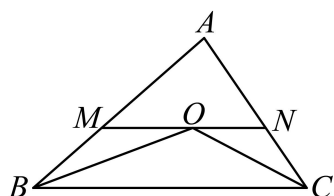
由题意可知: $AH = 2$, $AB \parallel MH$,

$$\therefore \frac{MB}{AH} = \frac{BC}{AC} \text{ 即 } \frac{MB}{2} = \frac{12}{5},$$

解得 $MB = 4.8$,

故答案为 4.8.

16. 如图, $\triangle ABC$ 中, OB 、 OC 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$, 点 M 、 N 分别在边 AB 、 AC 上. 过点 O 的线段 $MN \parallel BC$. 如果 $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$, 那么 $MN =$ _____.

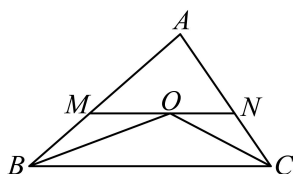


【答案】 $\frac{18}{5}$

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质，三角形相似的判定和性质，平行线分线段成比例，根据题意得 $MB = MO$ ， $NC = ON$ ，得 $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ ，得 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ，设 $BM = m$ ， $CN = n$ ，列比例方程求解即可。

【详解】解：如图所示：



$\because OB$ 、 OC 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ， $MN \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle MBO = \angle OBC = \angle MOB$ ， $\angle NCO = \angle OCB = \angle NOC$ ，
 $\therefore MB = MO$ ， $NC = ON$ ， $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}；$$

设 $BM = m$ ， $CN = n$ ，

$$\because AB = 5，AC = 4，BC = 6，则 AM = 5 - m，AN = 4 - n，\frac{5 - m}{5} = \frac{4 - n}{4} = \frac{m + n}{6}，$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 2 \\ n = \frac{8}{5} \end{cases}，$$

$$\therefore MN = OM + ON = BM + CN = \frac{18}{5}，$$

故答案为 $\frac{18}{5}$ 。

17. 我们把一个三角形一条边上的中线与另一条边上的高的交点称为这个三角形的中垂点。已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$ ， AD 为 BC 边上的高，点 O 在 AD 上，连接 CO 并延长交 AB 于点 E ，如果点 O 是 $\triangle ABC$ 的中垂点，那么 $\frac{OE}{OC}$ 的值为_____。

【答案】 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{8}$

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，余弦的定义，勾股定理等知识点，熟练掌握以上知识点是做题的关键。根据中垂点的定义，利用相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，分情况讨论即可。

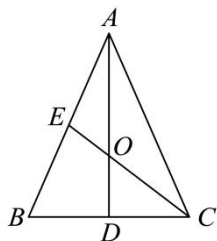
【详解】解： $\because AB = AC$ ， AD 为 BC 边上的高，

$\therefore$ 点 D 为 BC 的中点， $\angle ODC = 90^\circ$ 。

∵ 点 O 是 ABC 的中垂点,

∴ $CE \perp AB$ 或点 E 为 AB 的中点.

如图,



当点 D 为 BC 的中点, $CE \perp AB$ 时,

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ, \quad CD = \frac{1}{2}BC.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEC \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{4},$$

设 $BC = 4a$, 则 $BE = a$,

$$CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{15}a, \quad CD = \frac{1}{2}BC = 2a.$$

$$\because \angle ODC = \angle BEC = 90^\circ, \quad \angle OCD = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle OCD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{OC}{BC} = \frac{CD}{CE},$$

$$\text{即 } \frac{OC}{4a} = \frac{2a}{\sqrt{15}a},$$

$$\therefore OC = \frac{8\sqrt{15}}{15}a,$$

$$\therefore OE = CE - OC = \sqrt{15}a - \frac{8\sqrt{15}}{15}a = \frac{7\sqrt{15}}{15}a,$$

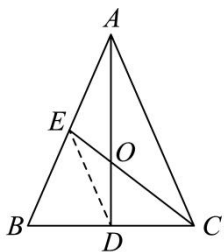
$$\therefore \frac{OE}{OC} = \frac{\frac{7\sqrt{15}}{15}a}{\frac{8\sqrt{15}}{15}a} = \frac{7}{8};$$

当点 E 为 AB 的中点, $AD \perp BC$ 时,

∵ $AB = AC$, AD 为 BC 边上的高,

∴ 点 D 为 BC 的中点.

如图, 连接 DE ,



即 DE 为 ABC 的中位线,

$$\therefore DE \parallel AC, \quad DE = \frac{1}{2} AC,$$

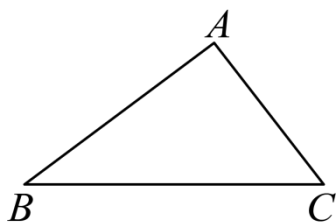
$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle AOC,$$

$$\therefore \frac{OE}{OC} = \frac{DE}{AC} = \frac{\frac{1}{2} AC}{AC} = \frac{1}{2}.$$

综上, $\frac{OE}{OC}$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{8}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{8}$.

18. 如图, ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 4$, 点 D 在边 AB 上, 将 $\triangle ACD$ 沿着 CD 翻折得 $\triangle A'CD$, 其中点 A 与点 A' 对应, 连接 $A'B$, 如果 $\angle ACD = \angle A'BA$, 那么 $AD =$ _____.



【答案】 $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$

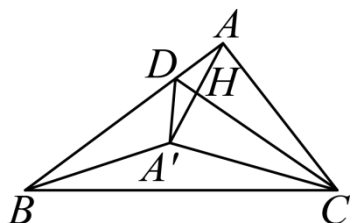
【解析】

【分析】 本题考查直角三角形的相关计算, 折叠的性质, 三角形相似的判定和性质, 勾股定理, 根据题意

证 $\triangle BAA' \sim \triangle A'AD$, 得 $\frac{AA'}{AB} = \frac{AD}{AA'}$, 设 $AD = x$, 则 $CD = \sqrt{9+x^2}$, 求得 $AA' = \frac{6x}{\sqrt{9+x^2}}$, 列方程求解

即可.

【详解】 解: 如图所示:



由题意可知: $\angle DAC = \angle DA'C = 90^\circ$, $AC = A'C = 3$, $\angle ACD = \angle A'CD$, $AH = A'H$, $AA' \perp CD$;

$$\therefore \triangle A'DH \sim \triangle CDA',$$

$$\therefore \angle ACD + \angle CAH = 90^\circ, \quad \angle DAA' + \angle CAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAA' = \angle ACD;$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A'BA,$$

$$\therefore \angle DAA' = \angle BAA' = \angle A'BA,$$

$$\therefore AA' = BA',$$

$$\therefore \triangle BAA' \sim \triangle A'AD, \text{ 所以 } \frac{AA'}{AB} = \frac{AD}{AA'};$$

$$\therefore AB = 4, \text{ 设 } AD = x,$$

$$\therefore \frac{AA'}{4} = \frac{x}{AA'}, \text{ 即 } AA'^2 = 4x$$

$$\therefore \triangle A'DH \sim \triangle CDA', \quad \frac{A'D}{CD} = \frac{A'H}{A'C},$$

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2},$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} = \frac{A'H}{3}, \text{ 即 } A'H = \frac{3x}{\sqrt{9 + x^2}},$$

$$\therefore AA' = 2A'H = \frac{6x}{\sqrt{9 + x^2}},$$

$$\therefore \left(\frac{6x}{\sqrt{9 + x^2}} \right)^2 = 4x, \text{ 解得 } x = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 在边 } AB \text{ 上},$$

$$\therefore AD < AB, \text{ 即 } x < 4,$$

$$\therefore AD = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \sin 60^\circ \cdot \tan^2 60^\circ - \frac{2}{\cot 30^\circ + 2 \sin 45^\circ}.$$

【答案】 $2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查特殊角的三角函数混合运算，将特殊角的三角函数值代入计算，化简即可.

【详解】 解: $\sin 60^\circ \cdot \tan^2 60^\circ - \frac{2}{\cot 30^\circ + 2 \sin 45^\circ}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{3})^2 - \frac{2}{\sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

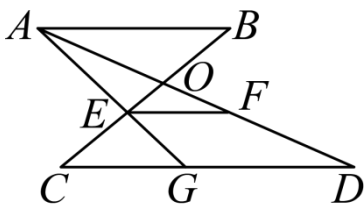
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20. 如图, 已知线段 AD 与 BC 交于点 O , 点 E 、 F 分别在 OC 和 OD 上, $AB \parallel EF \parallel CD$, 射线 AE 与 CD 交于点 G , $AO:OF:FD = 2:1:2$, $AB = 6$.



(1) 求 CG 的长;

(2) 连接 ED , 设 $\overrightarrow{EA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EB} =$ _____, $\overrightarrow{ED} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)

【答案】 (1) 4 (2) $\vec{a} + 2\vec{b}$, $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例, 平面向量的加减运算;

(1) 由题意得 $AB:EF = 2:1$, $EF:CD = 1:3$, $AF:AD = 3:5$, 求得 $EF = 3$, $CD = 9$, 列比例方程求解即可;

(2) 由题意得 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3\vec{b}$, $\overrightarrow{EB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{EC} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$, 根据 $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because AB \parallel EF \parallel CD$, $AO:OF:FD = 2:1:2$, $AB = 6$,

$$\therefore AO:OF = AB:EF = 2:1, OF:OD = EF:CD = 1:3, AF:AD = (2+1):(2+1+2) = 3:5,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AB = 3, CD = 3EF = 9;$$

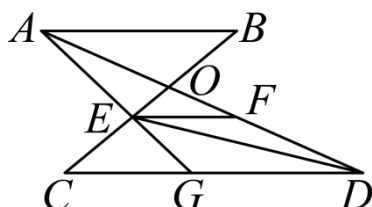
$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{EF}{GD}, \text{ 即 } \frac{3}{5} = \frac{3}{GD},$$

解得 $GD = 5$,

$$\therefore CG = CD - GD = 9 - 5 = 4.$$

【小问 2 详解】

解: 如图所示:



$$\because \overrightarrow{EA} = \vec{a}, \overrightarrow{EF} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\vec{b}, \overrightarrow{CD} = 3\vec{b};$$

$$\therefore \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b};$$

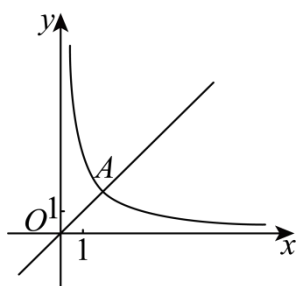
$$\because AO:OF:FD = 2:1:2,$$

$$\therefore EB:EC = (2+1):2 = 3:2,$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = -\frac{2}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}, \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} + 3\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}.$$

21. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 在第一象限内的图像交于点

$A(2, a)$, 点 $B(b, 8)$ 在直线 OA 上.



(1) 求点 A 、 B 的坐标;

(2) 点 C 在反比例函数 $y = \frac{4}{x} (x > 2)$ 的图像上, 如果 $\angle ABC = 45^\circ$, 将直线 OA 平移, 使其经过点 C , 求平移后所得直线的表达式.

【答案】 (1) $A(2, 2)$, $B(8, 8)$

(2) $y = x - \frac{15}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查反比例函数与一次函数的交点问题, 涉及反比例函数上点的坐标特征、一次函数解析式的求解以及一次函数的平移性质.

(1) 先利用反比例函数解析式求出点 A 的坐标, 再根据点 A 的坐标确定直线 OA 的解析式, 最后将点 B 的纵坐标代入直线解析式求出点 B 的坐标;

(2) 由直线 OA 的解析式 $y = x$ 得到 $\angle AOy = 45^\circ$, 结合 $\angle ABC = 45^\circ$, 根据同位角相等判定 $BC \parallel y$ 轴, 从而得到点 C 的横坐标与点 B 相同, 再代入反比例函数求出点 C 的坐标; 最后设出平移后直线的解析式, 代入点 C 的坐标求出参数.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(2, a)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上,

$\therefore$ 代入 $x = 2$ 得 $a = \frac{4}{2} = 2$, 故 $A(2, 2)$.

$\because$ 直线 OA 过点 $A(2, 2)$,

$\therefore y = 2k$, 解得 $k = 1$,

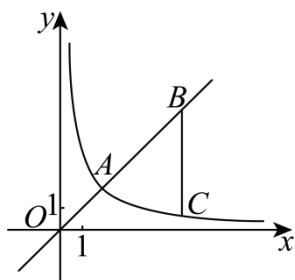
$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y = x$.

$\because$ 点 $B(b, 8)$ 在直线 OA 上,

$\therefore$ 代入 $y = 8$ 得 $b = 8$, 故 $B(8, 8)$;

【小问 2 详解】

解：如图，点 C 在点 A 右侧，设点 $C\left(t, \frac{4}{t}\right) (t > 2)$ ，



$$\therefore A(2, 2),$$

$\therefore$ 点 A 到两坐标轴的距离相等，

$$\therefore \angle AOy = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore BC \parallel y \text{ 轴},$$

$\therefore$ 点 C 的横坐标与点 B 的横坐标相同，即点 C 的横坐标为 8，

$$\therefore \text{将 } x = 8 \text{ 代入 } y = \frac{4}{x}, \text{ 得 } y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(8, \frac{1}{2}\right).$$

设平移后所得直线的解析式为 $y = x + m$ ，

$$\text{将点 } C\left(8, \frac{1}{2}\right) \text{ 代入解析式，得 } \frac{1}{2} = 8 + m, \text{ 解得 } m = -\frac{15}{2},$$

$$\therefore \text{平移后所得直线的表达式为 } y = x - \frac{15}{2}.$$

22. 【发现问题】顺次连接对角线相等的四边形的四条边的中点，就可以得到一个菱形. 小普同学进一步思考：如果一个四边形的对角线不相等，那么能否在这个四边形中画出一个菱形，使其满足四个顶点分别落在四边形的四条边上，且两组对边分别与四边形的两条对角线平行？

【提出问题】小普同学把这个想法改写成如下的一段数学语言：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AC \neq BD$ ，点 E, F, G, H 分别在边 AB, BC, CD, AD 上，且 $EH \parallel BD \parallel FG$ ，_____，如果四边形 $EFGH$ 是菱形，那么怎样画出这个菱形呢？

【分析问题】小普同学在与 AI 的交流中，AI 给出了一种解决问题的思考路径：

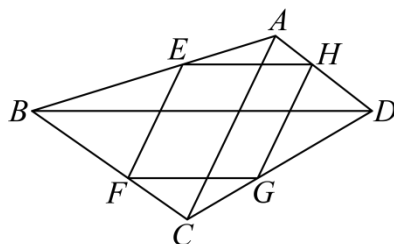
解决问题的思考路径

从条件中可知 $EFGH$ 已经是平行四边形，所以要画出这个菱形，只要确定点 E 在 AB 上的位置，使 $EH = EF$ 即可。根据这个想法，设

$\frac{AE}{BE} = k$ ，通过 确定 k 的值，使 $EH = EF$ 。

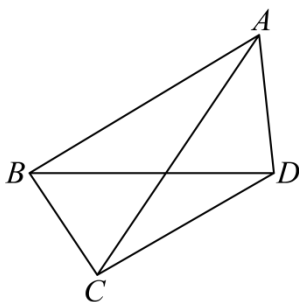
思考路径中提到的 k 的值与什么值相关？

k 的值主要与四边形的对角线 AC 和 BD 的长度相关。



【解决问题】

- (1) 根据图，将【提出问题】中缺失的条件补充完成（即“_____”）；
- (2) 根据小普同学与 AI 的对话，设 $AC = a$ ， $BD = b$ ，用含 a 、 b 的代数式表示 k ；
- (3) 在图中，画出符合要求的菱形 $EFGH$ ，写出确定点 E 的作图步骤，并保留确定点 E 的作图痕迹。



【答案】 (1) $EF \parallel AC \parallel HG$

(2) $\frac{a}{b}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例，平行四边形的判定；

(1) 根据 $EFGH$ 是平行四边形，添加条件即可；

(2) 由题意得 $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BD} = \frac{k}{k+1}$ ， $\frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{1}{k+1}$ ，计算 $\frac{EH}{BD} \cdot \frac{AC}{EF}$ 即可解答；

(3) 延长 AC ，利用圆规在 AC 延长线上截取 $CQ = BD$ ，连接 BQ ；作 $EC \parallel BQ$ ，即可解答。

【小问 1 详解】

解：根据题意可知 $EFGH$ 是平行四边形，则需添加 $EF \parallel AC \parallel HG$ ；

【小问 2 详解】

解: $\because EH \parallel BD \parallel FG, EF \parallel AC \parallel HG, \frac{AE}{BE} = k,$

$$\therefore AE = k \cdot BE, AB = AE + BE = (k+1)BE$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BD} = \frac{k}{k+1}, \frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{1}{k+1};$$

$$\therefore EH = EF, AC = a, BD = b,$$

$$\therefore \frac{EH}{BD} = \frac{k}{k+1}, \frac{EF}{AC} = \frac{1}{k+1};$$

$$\therefore \frac{EH}{BD} \cdot \frac{AC}{EF} = \frac{AC}{BD} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{1} = k$$

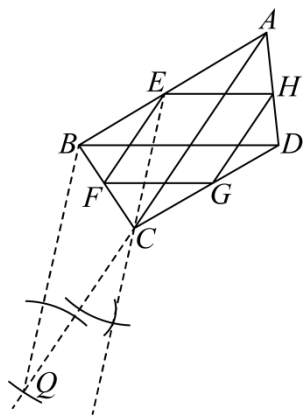
$$\therefore k = \frac{AC}{BD} = \frac{a}{b},$$

【小问3详解】

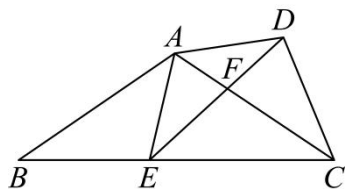
解: 如图所示 $EFGH$ 即为所求:

延长 AC , 利用圆规在 AC 延长线上截取 $CQ = BD$, 连接 BQ ;

作 $EC \parallel BQ$, 交 AB 边于点 E 即可.



23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, DE 交 AC 于点 F , $\angle AED = \angle B$, $AE^2 = AF \cdot AC$.



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ECF$;

(2) 如果 $\frac{AD}{EF} = \frac{AC}{EC}$, 求证: $DE \cdot AC = AE \cdot BC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质，三角形外角的性质，等角对等边；

(1) 由 $AE^2 = AF \cdot AC$ 得 $\triangle EAF \sim \triangle CAE$ ，由三角形外角得 $\angle BAE = \angle CEF$ 即可解答；

(2) 由 $\triangle EAF \sim \triangle CAE$ 得 $\frac{AE}{EF} = \frac{AC}{EC}$ ，题意证 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 即可解答.

【小问 1 详解】

解： $\because AE^2 = AF \cdot AC$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AE},$$

$$\therefore \angle EAF = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ACE;$$

$$\therefore \angle AED = \angle B,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle B,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle AED + \angle CEF = \angle B + \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECF.$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得 $\triangle EAF \sim \triangle CAE$ ， $\angle B = \angle ACB$ ，

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{EC}, \quad AB = AC;$$

$$\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{AC}{EC},$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE = \angle AED = \angle ADE,$$

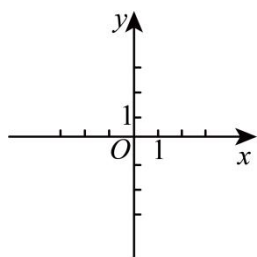
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{DE},$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore DE \cdot AC = AE \cdot BC.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = a(x+2)^2 + k (a > 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-5, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 顶点为 P .



- (1) 用含 a 的代数式分别表示点 B 、点 P 的坐标;
- (2) 作过点 B 和点 P 的直线交 x 轴于点 C .
 - ① 当 a 取不同的数值时, 点 C 是否会移动? 如果不会, 试求出点 C 的坐标; 如果会, 试用含 a 的代数式表示 OC 的长;
 - ② 当 a 取 1 时, 抛物线与 y 轴的交点记作 B_1 , 顶点记作 P_1 , 当 a 取 $m (0 < m < 1)$ 时, 此时抛物线与 y 轴的交点和顶点分别记作 B_m 和 P_m , 如果 $\angle P_1 P_m B_m$ 的补角等于 $\angle P_m P_1 B_1$ 的两倍时, 求 m 的值.

【答案】 (1) $B(0, -5a)$, $P(-2, -9a)$

(2) ① 不会, $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$; ② $m = \frac{3}{8}$

【解析】

【分析】 (1) 把 $A(-5, 0)$ 代入 $y = a(x+2)^2 + k (a > 0)$ 求出 $k = -9a$, 得出 $y = a(x+2)^2 - 9a (a > 0)$, 再求出点 B 坐标和顶点 P 的坐标即可;

(2) ① 先求出 $l_{BP}: y = 2ax - 5a$, 然后令 $y = 0$, 得出 $2ax - 5a = 0$, 求出点 $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, 即可得出答案;

② 先求出 $B_1(0, -5)$, $P_1(-2, -9)$, $B_m(0, -5m)$, $P_m(-2, -9m)$, 作 $B_m H \parallel P_1 B_1$, $B_m H$ 交 $P_m P_1$ 于点 H , 过点 B_m 作 $B_m Q \perp P_m P_1$ 于点 Q , 求出 $P_m H = P_m P_1 - P_1 H = -9m + 9 - (-5m + 5) = -4m + 4$, 根据等腰三角形的判定得出 $P_m B_m = P_m H = -4m + 4$, 根据勾股定理得出 $QB_m^2 + P_m Q^2 = P_m B_m^2$, 列出关于 m 的方程, 解方程即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(-5, 0)$ 代入 $y = a(x+2)^2 + k (a > 0)$ 得:

$$0 = 9a + k,$$

$$\therefore k = -9a,$$

$$\therefore y = a(x+2)^2 - 9a (a > 0),$$

$$\therefore \text{顶点坐标为 } P(-2, -9a),$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 代入得: } y = a(0+2)^2 - 9a = -5a,$$

$$\therefore B(0, -5a).$$

【小问 2 详解】

解: ①设 $l_{BP}: y = kx - 5a$, 将 $P(-2, -9a)$ 代入得:

$$-9a = -2k - 5a,$$

$$\therefore k = 2a,$$

$$\therefore l_{BP}: y = 2ax - 5a,$$

令 $y = 0$, 则:

$$2ax - 5a = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore C\left(\frac{5}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 不会移动, 且 } C\left(\frac{5}{2}, 0\right);$$

$$\text{②当 } a=1 \text{ 时, } y = (x+2)^2 - 9,$$

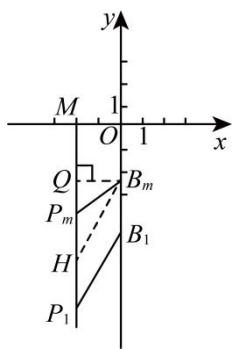
$$\therefore B_1(0, -5), P_1(-2, -9),$$

$$\text{当 } a=m \text{ 时, } y = m(x+2)^2 - 9m,$$

$$\therefore B_m(0, -5m), P_m(-2, -9m),$$

$$\therefore \text{点 } B_1, B_m \text{ 都在 } y \text{ 轴上, } P_1, P_m \text{ 都在直线 } x = -2 \text{ 上,}$$

$$\therefore P_1P_m \parallel B_1B_m,$$



如图，作 $B_m H \parallel P_1 B_1$ ， $B_m H$ 交 $P_m P_1$ 于点 H ，过点 B_m 作 $B_m Q \perp P_m P_1$ 于点 Q ，

则 $B_m Q = 2$ ， $Q(-2, -5m)$ ，

$\therefore \angle P_1 P_m B_m$ 的补角等于 $\angle P_m P_1 B_1$ 的两倍，

$\therefore \angle Q P_m B_m = 2 \angle P_m P_1 B_1$ ，

$\therefore B_m(0, -5m)$ ， $P_m(-2, -9m)$ ， $B_1(0, -5)$ ， $P_1(-2, -9)$ ，

$\therefore Q P_m = -5m - (-9m) = 4m$ ， $P_m P_1 = -9m - (-9) = -9m + 9$ ， $B_m B_1 = -5m - (-5) = -5m + 5$ ，

$\therefore B_m H \parallel P_1 B_1$ ， $P_1 P_m \parallel B_1 B_m$ ，

$\therefore$ 四边形 $B_m H P_1 B_1$ 为平行四边形，

$\therefore P_1 H = B_1 B_m = -5m + 5$ ，

$\therefore P_m H = P_m P_1 - P_1 H = -9m + 9 - (-5m + 5) = -4m + 4$ ，

$\therefore B_m H \parallel P_1 B_1$ ，

$\therefore \angle P_m H B_m = \angle P_m P_1 B_1$ ，

$\therefore \angle Q P_m B_m = 2 \angle P_m H B_m$ ，

$\therefore \angle Q P_m B_m = \angle P_m H B_m + \angle P_m B_m H$ ，

$\therefore \angle P_m B_m H = \angle P_m H B_m$ ，

$\therefore P_m B_m = P_m H = -4m + 4$ ，

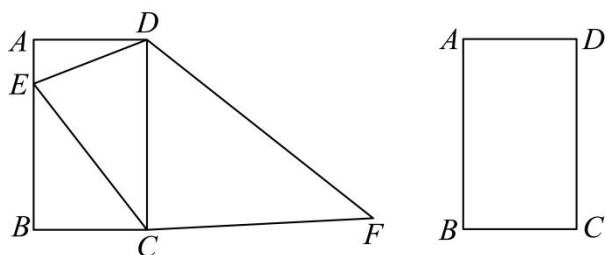
在 $\text{Rt} \triangle Q P_m B_m$ 中根据勾股定理得： $Q B_m^2 + P_m Q^2 = P_m B_m^2$ ，

$\therefore 2^2 + (4m)^2 = (-4m + 4)^2$ ，

解得： $m = \frac{3}{8}$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的综合应用， 平行四边形的判定和性质， 等腰三角形的判定， 三角形外角的性质， 勾股定理， 解题的关键是熟练掌握二次函数的性质.

25. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AB 上一动点, 在 $\triangle DEC$ 右侧作 $\triangle DCF$, 使得 $\triangle DCF \sim \triangle DEC$, 其中点 C 、 F 分别与点 E 、 C 对应. 已知 $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$.



(1) 当点 E 与点 B 重合时, 求四边形 $DECF$ 的面积;

(2) 点 E 由点 A 向点 B 移动的过程中 (点 E 不与点 B 重合), 研究以下 3 个量的变化情况, 完成填空并说明编号为②的量的变化情况的理由:

① $\angle EDF$ 的大小; ② DF 的长度; ③ $\tan \angle DFC$ 的值.

其中, 变大的量是 _____; 变小的量是 _____. (请在横线处填入编号)

(3) 当四边形 $DECF$ 的一条对角线平分另一条对角线时, 求 AE 的长.

【答案】 (1) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

(2) 变大的是③, 变小的是①②

(3) $2\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质, 勾股定理, 三角函数, 三角形面积公式, 三线合一, 三角形重心的性质, 分类讨论, 数形结合是解决问题的关键;

(1) 根据勾股定理得 $BD = DE = 4$, 由 $\triangle DCF \sim \triangle DEC$ 得 $\frac{CD}{DE} = \frac{CF}{CE} = \frac{DF}{CD}$, 求出直角边, 再按三角形面积公式计算即可;

(2) 作 $EH \perp CD$ 于 H , 根据移动过程中 DE 、 CH 、 $\angle EDH$ 的变化情况判断即可;

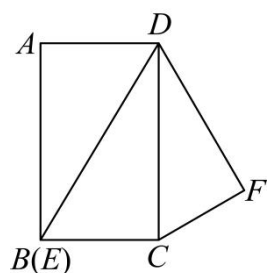
(3) 分两种情况讨论, 当 CD 平分 EF 时, $S_{\triangle OED} = S_{\triangle OFD}$, 过点 O 作 $OG \perp DE$, $OH \perp DF$, 则 $OG = OH$, $DE = DF$, 得 $\triangle DEF$ 是等腰三角形, CD 是 EF 的垂直平分线, $CE = CF$, $\triangle OCE$ 和 $\triangle OCF$ 关于 CD 对称, $\angle CED = \angle ECD = \angle CFD = \angle FCD$, 得 $ED = DC = 2\sqrt{3}$, $EO = OF = 2$, 根据 $AE = \sqrt{ED^2 - EO^2}$

求解即可；当 EF 平分 CD 时，取 DF 中点 P ，连接 CP 交 EF 于 Q ，证 $\triangle EDO \sim \triangle CDP \sim \triangle COQ$ ，根据 Q 是 CDF 中线的交点，求出 $CQ = 2$ ， $CP = 3$ ，设 $AE = x$ ，则 $DM = x$ ， $OM = \sqrt{3} - x$ ，

$EO = \sqrt{(\sqrt{3} - x)^2 + 2^2}$ ， $ED = \sqrt{x^2 + 4}$ ，根据 $\frac{EO}{CO} = \frac{ED}{CQ}$ 列方程求解即可。

【小问 1 详解】

解：当点 E 与点 B 重合时，如图所示：



$\because \triangle DCF \sim \triangle DEC$ ，

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{CF}{CE} = \frac{DF}{CD}，$$

$\because CD = AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = CE = 2$ ，

$$\therefore BD = DE = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4，，$$

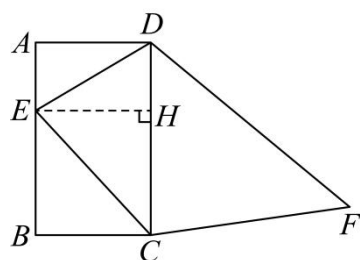
$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{CF}{2} = \frac{DF}{2\sqrt{3}}，$$

解得 $CF = \sqrt{3}$ ， $DF = 3$ ，

$$\therefore \text{四边形 } DECF \text{ 的面积为：} \frac{1}{2} CE \cdot CD + \frac{1}{2} CF \cdot DF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = \frac{7\sqrt{3}}{2}。$$

【小问 2 详解】

解：作 $EH \perp CD$ 于 H 如图所示：



$$\therefore \sin \angle EDH = \frac{EH}{DE} = \frac{2}{DE}，$$

$\therefore DE$ 增大,

$$\therefore \sin \angle EDH = \frac{2}{DE} \text{ 减小,}$$

$\therefore \triangle DCF \sim \triangle DEC$, 点 C 、 F 分别与点 E 、 C 对应,

$$\therefore \angle EDF = 2\angle EDH, \quad \angle F = \angle DCE,$$

$\therefore \angle EDF$ 减小;

$$\therefore \Delta DCF \sim \Delta DEC,$$
$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{DF}{CD}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{3}}{DE} = \frac{DF}{2\sqrt{3}}, \text{ 得 } DF = \frac{12}{DE},$$

$\therefore DE$ 增大,

$\therefore DF$ 减小;

$$\therefore \tan \angle ECH = \frac{EH}{CH} = \frac{2}{CH},$$

$\therefore CH$ 减小,

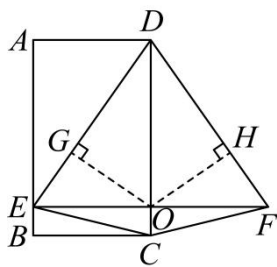
$$\therefore \tan \angle ECH = \frac{2}{CH} \text{ 增大;}$$

$\therefore \tan \angle DFC$ 增大,

综上：增大的是③，减小的是①②.

【小问 3 详解】

解: 1、如图所示: 当 CD 平分 EF 时, 记 CD 与 EF 的交点为 O , $EO = OF$


$$\therefore \Delta DCF \sim \Delta DEC,$$
$$\therefore \angle CDE = \angle CDF,$$

$\therefore CD$ 是 $\angle EOF$ 的角平分线,

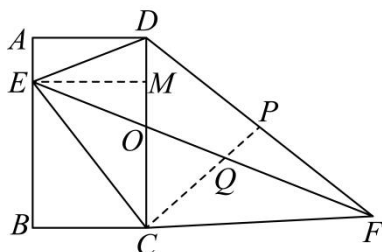
$$\therefore EO = OF,$$
$$\therefore S_{\wedge QED} = S_{\wedge QED},$$

过点 O 作 $OG \perp DE$, $OH \perp DF$, 则 $OG = OH$,

$$\therefore DE = DF ,$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰三角形,
 $\therefore CD$ 是 EF 的垂直平分线,
 $\therefore CE = CF$,
 $\therefore \triangle OCE$ 和 $\triangle OCF$ 关于 CD 对称,
 $\therefore \angle CED = \angle ECD = \angle CFD = \angle FCD$,
 $\therefore DE = DF = CD$,
 $\therefore EO = OF = 2$,
 $\therefore ED = DC = 2\sqrt{3}$.
 $\therefore AE = \sqrt{ED^2 - EO^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$;

2、如图所示: 当 EF 平分 CD 时, $DO = CO = \sqrt{3}$,



取 DF 中点 P , 连接 CP 交 EF 于 Q ,

$\therefore \triangle DCF \sim \triangle DEC$,
 $\therefore \angle EDC = \angle CDF$, $\frac{ED}{DC} = \frac{CD}{DF}$,
 $\therefore \frac{ED}{DO} = \frac{CD}{DP}$,
 $\therefore \triangle EDO \sim \triangle CDP$,
 $\therefore \angle DEO = \angle DCP$.
 $\therefore \angle EOD = \angle COQ$,
 $\therefore \triangle EOD \sim \triangle COQ$,
 $\therefore \triangle COQ \sim \triangle CDP$,
 $\therefore \frac{CP}{CO} = \frac{DC}{QC}$.

$\therefore Q$ 是 CDF 中线的交点,

$$\therefore CQ:PQ = 2:1, \quad CQ:CP = 2:3,$$

$$\text{设 } CQ = 2k, \quad CP = 3k, \quad \frac{3k}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2k},$$

$$\text{解得 } k = 1, \quad \text{则 } CQ = 2, \quad CP = 3,$$

$$\therefore \triangle EOD \sim \triangle COQ,$$

$$\therefore \frac{EO}{CO} = \frac{ED}{CQ}.$$

$$\text{设 } AE = x, \quad \text{则 } DM = x, \quad OM = \sqrt{3} - x,$$

$$\therefore EO = \sqrt{(\sqrt{3} - x)^2 + 2^2}, \quad ED = \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - x)^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad \text{解得 } x = 4\sqrt{3} \pm 4\sqrt{2}.$$

$\therefore E$ 在 AB 边上,

$$\therefore 0 < x < 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AE = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{2} \text{ 或 } 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}.$$