

2025-2026 学年上海市崇明区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）如果两个相似三角形的面积比为 1:4，那么这两个三角形的对应中线的比为（ ）

- A. 1:2 B. 1:4 C. 1:8 D. 1:16

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，那么下列说法正确的是（ ）

- A. $\sin A = \frac{3}{5}$ B. $\cos A = \frac{3}{5}$ C. $\tan A = \frac{3}{5}$ D. $\cot A = \frac{3}{5}$

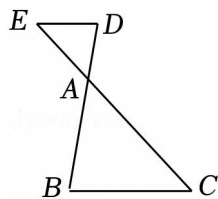
3.（4 分）将抛物线 $y = 3x^2$ 平移，使顶点移到点 $M(-2, 1)$ 的位置，所得新抛物线的表达式是（ ）

- A. $y = 3(x+2)^2 - 1$ B. $y = 3(x-2)^2 - 1$
C. $y = 3(x+2)^2 + 1$ D. $y = 3(x-2)^2 + 1$

4.（4 分）下列命题正确的是（ ）

- A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$
B. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $\vec{a} = \vec{b}$
C. 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
D. 如果 $m = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $m\vec{a} = \vec{0}$

5.（4 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 的反向延长线上，已知 $AC = 2AE$ ，下列条件中能判定 $DE \parallel BC$ 的是（ ）



- A. $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$ C. $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

6.（4 分）在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $AB = AC$ ， $DE = DF$ ，根据下列条件，一定能判断 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似的是（ ）

- A. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ B. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF}$ C. $\angle B = \angle D$ D. $\angle C = \angle E$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7.（4 分）如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ，那么 $\frac{a}{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. (4分) 计算: $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3\vec{a} =$ _____.

9. (4分) 已知线段 AB 的长为 4cm , 如果点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 那么 AP 的值是 _____ cm .

10. (4分) 如果抛物线 $y = (a+1)x^2 + 4$ 开口向下, 那么 a 的取值范围是_____.

11. (4分) 已知点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 为二次函数 $y = -(x-1)^2 + k$ 图象上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 (填“>”、“=”或“<”).

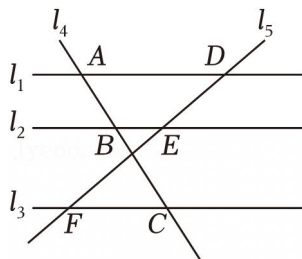
12. (4分) 小明沿着坡度 $i = 1:2.4$ 的斜坡前行了 65 米, 那么他距离地面的垂直高度上升了_____米.

13. (4分) 用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象时, 列出了如下的表格:

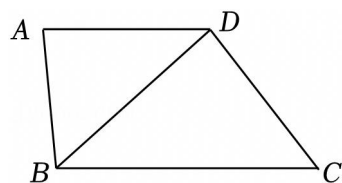
x	...	0	1	2	3	4	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	-3	0	1	0	-3	...

那么当 $x = 5$ 时, 该二次函数 y 的值为_____.

14. (4分) 如图, 已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别与直线 l_4 交于点 A 、 B 、 C , 与直线 l_5 交于点 D 、 E 、 F , 如果 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB = 2$, $AC = 5$, $EF = 4$, 则 DE 的长是_____.

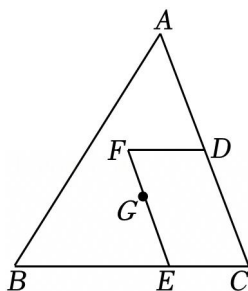


15. (4分) 如图, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABD = \angle C$, 如果 $AD = 3$, $BD = 4$, 那么 BC = _____.

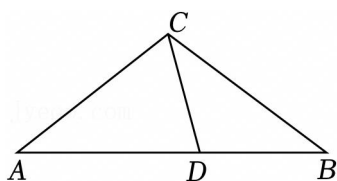


16. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\angle A$ 是锐角), $\angle B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{10}$, 那么 AB 的长为_____.

17. (4分) 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D 是边 AC 的中点, $GE \parallel AC$ 交 BC 于点 E , $DF \parallel BC$ 交 EG 于点 F , 则 $\frac{S_{\text{四边形}CDFE}}{S_{\triangle ABC}}$ 的比值为_____.



18. (4分) 定义：当一个三角形有两个内角的差为 90° 时，这个三角形叫做“差直角三角形”. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 10$ ， $AB = 16$ ，点 D 是边 AB 上的一动点（且 $AD > BD$ ），若 $\triangle BCD$ 是“差直角三角形”，则 CD 的长为 _____.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10分) 计算： $\frac{2\tan 60^\circ}{\cot 30^\circ - 2\sin 30^\circ} + \cos^2 45^\circ$.

20. (10分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, -1)$ 、 $B(0, -4)$.

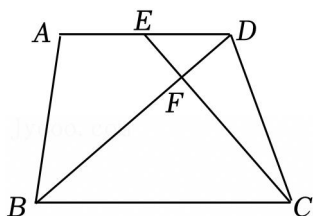
(1) 求抛物线的表达式；

(2) 若将该抛物线向上平移 m ($m > 0$) 个单位长度，使得平移后的抛物线与 x 轴只有一个公共点，求 m 的值.

21. (10分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，且 $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$ ，点 E 是边 AD 的中点，联结 CE 交对角线 BD 于点 F .

(1) 当 $BD = 6$ 时，求 DF 的长；

(2) 设 $\vec{BA} = \vec{a}$ ， $\vec{BC} = \vec{b}$ ，请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\vec{BF}$.



22. (10分) 长兴岛风电基地的巨型风电机将源源不断的清洁风能转化为电能，实现海岛能源的绿色转型（如图 1）. 某校初三数学兴趣小组在完成解直角三角形应用知识的学习后，围绕“风叶长度的实地测算”这一课题开展数学实践活动. 已知三片风叶 OA 、 OB 、 OC 两两所成的角为 120° ，在实地测量中（如图 2），当其中一片风叶 OC 与塔干 OD 叠合时（即 O 、 C 、 D 在一直线上），在与塔底 D 水平距离

为 200 米的 E 处，测得塔干顶部 O 的仰角为 37° ，风叶 OA 的端点 A 的仰角为 59° ，点 A, B, C, D, E, O ，在同一平面内。

(参考数据 $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\tan 59^\circ \approx 1.7$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)

(1) 求塔干 OD 的长度；

(2) 求风叶 OA 的长度。(精确到 1 米)



图1

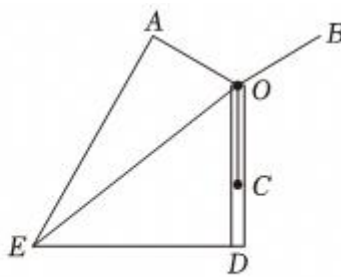
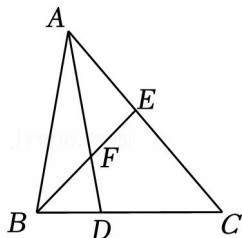


图2

23. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在边 BC, AC 上， $AB = AD$ ， AD 与 BE 交于点 F ，且 $BC^2 = AC \cdot EC$ 。

(1) 求证： $\angle ADB = \angle BEC$ ；

(2) 如果 $AB = BC$ ，求证： $AE \cdot AD = AF \cdot BE$ 。

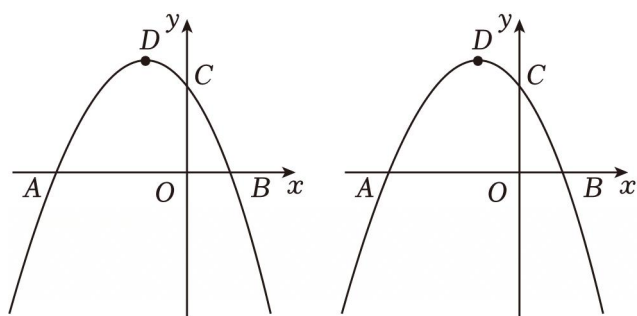


24. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 A 和 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，抛物线的顶点为 D 。

(1) 求点 A 和点 B 的坐标；

(2) 若点 E 与点 C 关于抛物线的对称轴对称，联结 AE, AC ，若 AC 平分 $\angle EAO$ ，求抛物线的表达式；

(3) 若点 P 是抛物线第四象限上一动点，联结 AD, AC, DP, CP ，线段 DP 与线段 AC 交于点 F ，与 x 轴交于点 G ，当 $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP}$ 时，求 $\frac{DG}{GP}$ 的值。



备用图

25. (14分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 8$, $\tan B = \frac{3}{4}$, 点 E 是 AB 边上的一点, 将 $\triangle ABC$ 沿着过点 E 的直线翻折, 点 A 落在 BC 边上, 记作点 D , 折痕所在的直线与射线 AC 交于点 F , 过点 D 作 $DG \perp BC$, 交射线 BA 于点 G .

(1) 如图 1, 当点 F 和点 C 重合时, 求 AE 的长;

(2) 如图 2, 当点 F 在边 AC 上时, 设 $BD = x$, $\tan \angle AFE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域;

(3) 延长 DG , 交 CA 的延长线于点 H , 当 $\triangle DFH$ 是以 DH 为腰的等腰三角形时, 求 EG 的长.

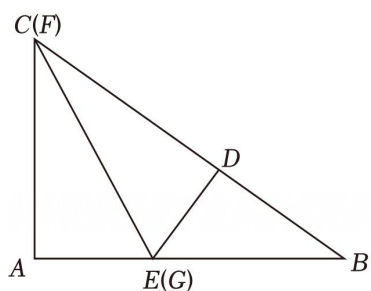


图 1

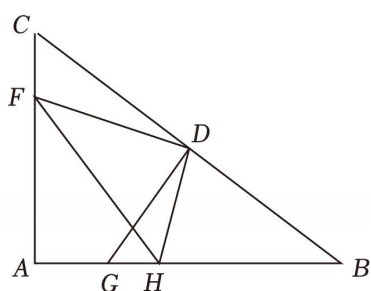
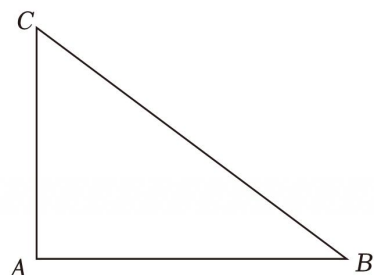


图 2



备用图

2025-2026 学年上海市崇明区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	B	C	C	B	D

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）如果两个相似三角形的面积比为 1：4，那么这两个三角形的对应中线的比为（ ）

- A. 1：2 B. 1：4 C. 1：8 D. 1：16

【分析】相似三角形的面积比等于相似比的平方，对应中线的比等于相似比，据此解答即可．

【解答】解：∵两个相似三角形的面积比为 1：4，

∴两个三角形的相似比为 1：2．

又∵相似三角形对应中线的比等于相似比，

∴这两个三角形的对应中线的比为 1：2．

综上所述，只有选项 A 正确，符合题意，

故选：A．

【点评】本题考查相似三角形的性质，关键是相似三角形性质的熟练掌握．

2.（4 分）在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，AB = 10，AC = 6，那么下列说法正确的是（ ）

- A. $\sin A = \frac{3}{5}$ B. $\cos A = \frac{3}{5}$ C. $\tan A = \frac{3}{5}$ D. $\cot A = \frac{3}{5}$

【分析】由锐角三角函数的定义，即可求解．

【解答】解：由勾股定理得到： $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，

∴ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ， $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ， $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ， $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ．

故选：B．

【点评】本题考查锐角三角形函数的定义，关键是掌握锐角三角函数的定义．

3.（4 分）将抛物线 $y = 3x^2$ 平移，使顶点移到点 M（-2，1）的位置，所得新抛物线的表达式是（ ）

- A. $y = 3(x+2)^2 - 1$ B. $y = 3(x-2)^2 - 1$
C. $y = 3(x+2)^2 + 1$ D. $y = 3(x-2)^2 + 1$

【分析】根据平移只改变图形的位置不改变图形的形状与大小，利用顶点式解析式写出即可．

【解答】解：∵将抛物线 $y = 3x^2$ 平移，使顶点移到点 $M(-2, 1)$ 的位置，

∴所得新抛物线的表达式是 $y = 3(x+2)^2 + 1$ ．

故选：C．

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目利用顶点的平移解答更简便．

4. (4 分) 下列命题正确的是 ()

A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

B. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

C. 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 如果 $m = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $m\vec{a} = \vec{0}$

【分析】根据平面向量的定义逐项判断即可．

【解答】解：A. 向量相等需要大小和方向都相同，仅模长相等不能推出向量相等，故本选项不符合题意；

B. 单位向量仅模长为 1，但方向可以不同，不能推出向量相等，故本选项不符合题意；

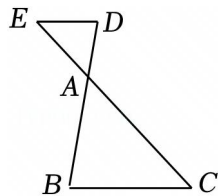
C. 方向相反的向量是平行向量，故本选项符合题意；

D. 数乘向量的结果是向量，正确结论应为零向量，而不是数字 0，故本选项不符合题意．

故选：C．

【点评】本题主要考查命题与定理、平面向量，熟练掌握以上知识点是解题的关键．

5. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 的反向延长线上，已知 $AC = 2AE$ ，下列条件中能判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$

B. $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

【分析】利用平行线的判定方法解决问题即可．

【解答】解：选项 B 符合题意．

理由：∵ $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AC = 2AE,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore DE \parallel BC.$$

故选：B.

【点评】 本题考查平行线分线段成比例定理，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

6. (4分) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $AB = AC$ ， $DE = DF$ ，根据下列条件，一定能判断 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似的是 ()

A. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ B. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF}$ C. $\angle B = \angle D$ D. $\angle C = \angle E$

【分析】 由相似三角形的判定方法，即可判断.

【解答】 解：A、两三角形的两边对应成比例，但夹角不一定相等，不能判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似，故A不符合题意；

B、由 $AB = AC$ ， $DE = DF$ ， $AB : DE = AC : EF$ ，推出 $DF = EF$ ，判定 $\triangle DEF$ 是等边三角形，但 $\triangle ABC$ 不一定是等边三角形，因此两个三角形不一定相似，故B不符合题意；

C、 $AB : DE = AC : DF$ ， AB 和 AC 的夹角是 $\angle A$ ， DE 和 DF 夹角是 $\angle D$ ，应该是 $\angle A = \angle D$ 而不是 $\angle B = \angle D$ ，才能判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似，故C不符合题意；

D、由两个等腰三角形的底角相等得到 $\angle A = \angle D$ ，而 $AB : DE = AC : DF$ ，判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似，故D符合题意.

故选：D.

【点评】 本题考查相似三角形的判定，等腰三角形的性质，关键是掌握三组对应边的比相等的两个三角形相似，两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似，有两组角对应相等的两个三角形相似.

二、填空题 (本大题共12题，每题4分，满分48分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ，那么 $\frac{a}{a+b} = \frac{3}{5}$.

【分析】 用 b 表示出 a ，然后代入比例式进行计算即可得解.

【解答】 解： $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$,

$$\therefore a = \frac{3}{2}b,$$

$$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{3}{2}b}{\frac{3}{2}b+b} = \frac{3}{5}.$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查了比例的性质，用 b 表示出 a 是解题的关键.

8. (4分) 计算： $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3\vec{a} = \underline{4\vec{b} - \vec{a}}$.

【分析】去括号合并同类向量即可.

【解答】解：原式 $= 2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{a}$

$$= 4\vec{b} - \vec{a}.$$

故答案为： $4\vec{b} - \vec{a}$.

【点评】本题考查平面向量，解题的关键是掌握平面向量的加减法则.

9. (4分) 已知线段 AB 的长为 4cm ，如果点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$)，那么 AP 的值是 $\underline{(2\sqrt{5}-2)}$ cm .

【分析】根据黄金分割的定义列式计算即可.

【解答】解： $\because$ 线段 AB 的长为 4cm ，点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$)，

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = (2\sqrt{5}-2)(\text{cm}),$$

故答案为： $(2\sqrt{5}-2)$.

【点评】本题考查了黄金分割，熟练掌握黄金分割是解题的关键.

10. (4分) 如果抛物线 $y = (a+1)x^2 + 4$ 开口向下，那么 a 的取值范围是 $\underline{a < -1}$.

【分析】抛物线的开口方向由二次项系数的符号决定：当二次项系数小于 0 时，抛物线开口向下；大于 0 时，开口向上.

【解答】解：如果抛物线 $y = (a+1)x^2 + 4$ 开口向下，

抛物线 $y = (a+1)x^2 + 4$ 的二次项系数为 $a+1$.

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a+1 < 0, \text{ 解得 } a < -1;$$

故答案为： $a < -1$.

【点评】本题考查二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象性质，正确记忆相关知识点是解题关键.

11. (4分) 已知点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 为二次函数 $y = -(x-1)^2 + k$ 图象上的两点，那么 $y_1 \underline{>} y_2$ (填“ $>$ ”、“ $=$ ”或“ $<$ ”).

【分析】利用开口方向和对称轴判断函数值的大小关系.

【解答】解：二次函数的开口向下，对称轴为直线 $x = 1$ ，开口向下时，点离对称轴越近，函数值越大，

点 $A(-1, y_1)$ 到对称轴的距离为 $|-1 - 1| = 2$, 点 $B(-3, y_2)$ 到对称轴的距离为 $|-3 - 1| = 4$.

$\therefore$ 且 $2 < 4$,

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为: $>$.

【点评】 本题考查二次函数的性质, 关键是利用开口方向 and 对称轴判断函数值的大小关系.

12. (4 分) 小明沿着坡度 $i = 1: 2.4$ 的斜坡前行了 65 米, 那么他距离地面的垂直高度上升了 25 米.

【分析】 设小明距离地面的垂直高度上升了 x 米, 根据坡度的概念用 x 表示出小明行走的水平距离, 再根据勾股定理列出方程, 解方程得到答案.

【解答】 解: 设小明距离地面的垂直高度上升了 x 米,

$\therefore$ 斜坡的坡度 $i = 1: 2.4$,

$\therefore$ 小明行走的水平距离为 $2.4x$ 米,

由勾股定理得: $x^2 + (2.4x)^2 = 65^2$,

解得: $x = 25$ (负值舍去),

则小明距离地面的垂直高度上升了 25 米,

故答案为: 25.

【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 熟记坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

13. (4 分) 用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象时, 列出了如下的表格:

x	$\cdots$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y = ax^2 + bx + c$	$\cdots$	-3	0	1	0	-3	$\cdots$

那么当 $x = 5$ 时, 该二次函数 y 的值为 -8.

【分析】 从表格可知: 抛物线的顶点坐标为 $(2, 1)$, 抛物线过点 $(0, -3)$, 代入求出抛物线的解析式, 再把 $x = 5$ 代入函数解析式, 即可求出答案.

【解答】 解: 从表格可知: 抛物线的顶点坐标为 $(2, 1)$,

设 $y = ax^2 + bx + c = a(x - 2)^2 + 1$,

从表格可知过点 $(0, -3)$, 代入得: $-3 = a(0 - 2)^2 + 1$,

解得: $a = -1$,

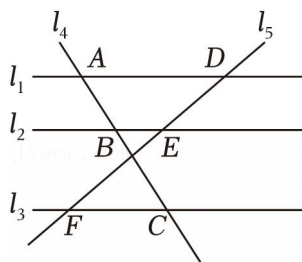
即 $y = -(x - 2)^2 + 1$,

当 $x = 5$ 时, $y = -(5 - 2)^2 + 1 = -8$,

故答案为：-8.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，二次函数的图象和性质，用待定系数法求二次函数的解析式等知识点，能求出函数的解析式是解此题的关键.

14. (4分) 如图，已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别与直线 l_4 交于点 A 、 B 、 C ，与直线 l_5 交于点 D 、 E 、 F ，如果 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $AB=2$ ， $AC=5$ ， $EF=4$ ，则 DE 的长是 $\frac{8}{3}$.



【分析】 利用平行线分线段成比例定理求解.

【解答】 解：∵ $AB=2$ ， $AC=5$ ，

$$\therefore BC = AC - AB = 5 - 2 = 3,$$

$$\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC},$$

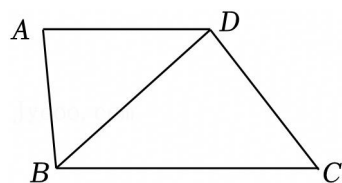
$$\therefore \frac{DE}{4} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{8}{3}.$$

故答案为： $\frac{8}{3}$.

【点评】 本题考查平行线分线段成比例定理，解题的关键是掌握平行线分线段成比例定理.

15. (4分) 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABD = \angle C$ ，如果 $AD=3$ ， $BD=4$ ，那么 $BC = \frac{16}{3}$.



【分析】 由 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle ADB = \angle DBC$ ，而 $\angle ABD = \angle C$ ，则 $\triangle ADB \sim \triangle DBC$ ，所以 $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}$ ，因

为 $AD=3$ ， $BD=4$ ，所以 $BC = \frac{BD^2}{AD} = \frac{16}{3}$ ，于是得到问题的答案.

【解答】 解：∵ $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\because \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

$$\because AD = 3, BD = 4,$$

$$\therefore BC = \frac{BD^2}{AD} = \frac{4^2}{3} = \frac{16}{3},$$

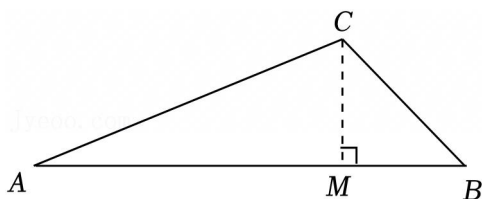
故答案为: $\frac{16}{3}$.

【点评】 此题重点考查平行线的性质、相似三角形的判定与性质等知识, 证明 $\triangle ADB \sim \triangle DBC$ 是解题的关键.

16. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\angle A$ 是锐角), $\angle B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{10}$, 那么 AB 的长为 4.

【分析】 根据题意画出示意图, 再结合正弦的定义及勾股定理进行计算即可.

【解答】 解: 过点 C 作 AB 的垂线, 垂足为 M , 如图所示,



在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中,

$$\sin A = \frac{CM}{AC}.$$

$$\because \sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}, AC = \sqrt{10},$$

$$\therefore CM = 1,$$

$$\text{则 } AM = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3.$$

$$\because \angle B = 45^\circ, CM \perp AB,$$

$$\therefore \angle BCM = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore BM = CM = 1,$$

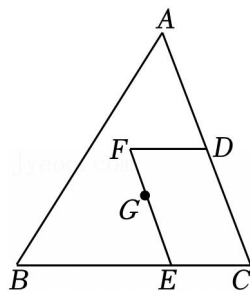
$$\therefore AB = AM + BM = 3 + 1 = 4.$$

故答案为: 4.

【点评】 本题主要考查了解直角三角形, 熟知正弦的定义及勾股定理是解题的关键.

17. (4分) 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D 是边 AC 的中点, $GE \parallel AC$ 交 BC 于点 E , $DF \parallel BC$ 交 EG

于点 F ，则 $\frac{S_{\text{四边形}CDEF}}{S_{\triangle ABC}}$ 的比值为 $\frac{1}{3}$ 。

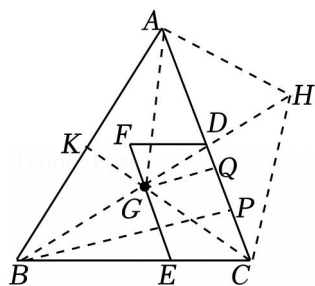


【分析】连接 AG ， CG ， AD ，设 CG 的延长线交 AB 于点 K ，过点作 $BP \perp AC$ 于点 P ，过点 G 作 $GQ \perp AC$ 于点 Q ， AD 经过点 G ，在 AD 的延长线上取一点 H ，使 $DH = DG$ ，连接 AH ， CH ，则 $GH = 2DG$ ，证明四边形 $AGCH$ 是平行四边形得 $AH \parallel CG$ ，进而证明 GK 是 $\triangle ABH$ 的中位线得 $BG = GH = 2GD$ ，则 $AD = 3DG$ ，设 $GQ = h$ ， $CD = a$ ，则 $AC = 2a$ ，再证明 $\triangle DGQ$ 和 $\triangle DBP$ 相似，利用相似三角形性质得 $BP = 3h$ ，由此得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BP = 3ah$ ，然后证明四边形 $CDEF$ 是平行四边形得 $S_{\text{四边形}CDEF} = CD \cdot GH = ah$ ，据此即可得出 $\frac{S_{\text{四边形}CDEF}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值。

【解答】解：连接 AG ， CG ， AD ，设 CG 的延长线交 AB 于点 K ，过点作 $BP \perp AC$ 于点 P ，过点 G 作 $GQ \perp AC$ 于点 Q ，

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，点 D 是边 AC 的中线，

$\therefore AD$ 经过点 G ，在 AD 的延长线上取一点 H ，使 $DH = DG$ ，连接 AH ， CH ，如图所示：



$\therefore GH = DH + DG = 2DG$ ，

$\because$ 点 D 是边 AC 的中线，

$\therefore AD = CD$ ，

又 $\because DH = DG$ ，

$\therefore$ 四边形 $AGCH$ 是平行四边形，

$\therefore AH \parallel CG$ ，

$\therefore AH \parallel GK$ ，

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore CK$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore AK = BK$,

$\therefore GK$ 是 $\triangle ABH$ 的中位线,

$\therefore BG = GH = 2GD$,

$\therefore AD = AG + DG = 3DG$,

设 $GQ = h$, $CD = a$,

$\therefore AC = 2CD = 2a$,

$\because BP \perp AC$ 于点 P , $GQ \perp AC$ 于点 Q ,

$\therefore GQ \parallel BP$,

$\therefore \triangle DGQ \sim \triangle DBP$,

$$\therefore \frac{GQ}{BP} = \frac{GD}{BD},$$

$$\therefore \frac{h}{BP} = \frac{DG}{3DG},$$

$\therefore BP = 3h$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BP = \frac{1}{2} \times 2a \times 3 = 3ah,$$

$\because GE \parallel AC$ 交 BC 于点 E , $DF \parallel BC$ 交 EG 于点 F ,

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 是平行四边形,

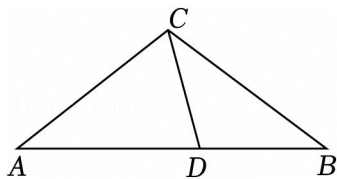
$\therefore S_{\text{四边形 } CDFE} = CD \cdot GH = ah$,

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形 } CDFE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ah}{3ah} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

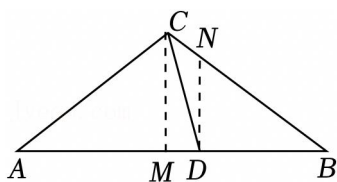
【点评】此题主要考查了三角形的重心,相似三角形的判定和性质,三角形的面积和平行四边形的面积,理解三角形的重心,熟练掌握相似三角形的判定和性质,三角形的面积和平行四边形的面积公式是解决问题的关键.

18. (4分) 定义: 当一个三角形有两个内角的差为 90° 时, 这个三角形叫做“差直角三角形”. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 10$, $AB = 16$, 点 D 是边 AB 上的一动点 (且 $AD > BD$), 若 $\triangle BCD$ 是“差直角三角形”, 则 CD 的长为 $\frac{15}{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.



【分析】先作等腰 $\triangle ABC$ 的高 CM ，用勾股定理求出 $CM=6$ ，根据“差直角三角形”定义，分 $\angle BDC - \angle B = 90^\circ$ 和 $\angle BDC - \angle BCD = 90^\circ$ 两种情况讨论．第一种情况通过角的等量代换推导 $\triangle CMD \sim \triangle BMC$ ，用相似比求 MD ，再用勾股定理得 CD ；第二种情况构造平行线 $DN \parallel CM$ ，得 $\triangle NDB \sim \triangle CMB$ ，结合 $CN = DN$ 列方程求 BD ，再用勾股定理得 CD ．

【解答】解：如图，过点 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ，过点 D 作 $DN \parallel CM$ ，交 BC 于 N ．



$$\because AC = BC = 10, AB = 16,$$

$$\therefore M \text{ 为 } AB \text{ 中点, } AM = MB = 8.$$

$$\therefore CM = \sqrt{BC^2 - MB^2} = 6. \quad AD > BD,$$

$$\therefore \angle BDC \text{ 为钝角.}$$

分两种情况：

$$\textcircled{1} \angle BDC - \angle B = 90^\circ, \text{ 则 } \angle BDC = \angle B + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDC = 180^\circ - \angle BDC = 90^\circ - \angle B.$$

$$\because \angle CMD = \angle BMC = 90^\circ, \quad \angle MDC = \angle BCM = 90^\circ - \angle B,$$

$$\therefore \triangle CMD \sim \triangle BMC,$$

$$\therefore \frac{CM}{BM} = \frac{MD}{MC}, \text{ 即 } \frac{6}{8} = \frac{MD}{6},$$

$$\text{解得 } MD = \frac{9}{2},$$

$$\therefore CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = \frac{15}{2};$$

$$\textcircled{2} \angle BDC - \angle BCD = 90^\circ, \text{ 则 } \angle BCD = \angle BDC - 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDN = \angle BDC - 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDN = \angle BCD.$$

$$\therefore DN \parallel CM,$$

$$\therefore \triangle NDB \sim \triangle CMB,$$

$$\therefore \frac{ND}{CM} = \frac{DB}{BM} = \frac{BN}{CB}, \text{ 即 } \frac{ND}{6} = \frac{DB}{8} = \frac{BN}{10},$$

$$\therefore ND = \frac{3}{4}BD, BN = \frac{5}{4}BD,$$

$$\therefore \angle CDN = \angle BCD,$$

$$\therefore CN = DN,$$

$$\therefore BC = DN + BN = \frac{3}{4}BD + \frac{5}{4}BD = 10. \text{ 解得 } BD = 5,$$

$$\therefore MD = BM - BD = 8 - 5 = 3,$$

$$\therefore CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = 3\sqrt{5},$$

综上, CD 的长为 $\frac{15}{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.

故答案为: $\frac{15}{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.

【点评】 本题考查等腰三角形“三线合一”性质、相似三角形判定与性质、勾股定理, 以及分类讨论思想的应用, 理解定义是解题关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\frac{2\tan 60^\circ}{\cot 30^\circ - 2\sin 30^\circ} + \cos^2 45^\circ$.

【分析】 根据特殊角的三角函数值进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\times\frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{2} \\ &= 3 + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查特殊角的三角函数值, 解决本题的关键是掌握特殊角的三角函数值.

20. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, -1)$ 、 $B(0, -4)$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若将该抛物线向上平移 m ($m > 0$) 个单位长度, 使得平移后的抛物线与 x 轴只有一个公共点, 求 m 的值.

【分析】 (1) 直接将点 $A(3, -1)$ 、 $B(0, -4)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$, 解得 b 、 c 的值即可求得表达式;

(2) 求得抛物线的顶点, 再判断顶点经过怎样的平移能到 x 轴上即可.

【解答】 解: (1) 由题意可得:

$$\text{得} \begin{cases} 3^2 + 3b + c = -1 \\ c = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的表达式 $y = x^2 - 2x - 4$;

$$(2) \because y = x^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 - 5,$$

$\therefore$ 该抛物线的顶点为 $(1, -5)$.

$\therefore$ 要使抛物线与 x 轴只有一个公共点, 即要求顶点在 x 轴上,

$\therefore$ 顶点纵坐标应为 0.

$\therefore$ 将该抛物线向上平移 5 个单位后, 所得抛物线与 x 轴只有一个公共点.

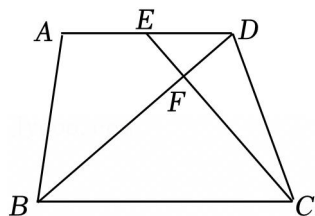
$\therefore m$ 的值是 5.

【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的表达式, 二次函数的平移, 解决本题的关键是掌握待定系数法求解解析式和函数的图象特征及平移规律.

21. (10 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$, 点 E 是边 AD 的中点, 联结 CE 交对角线 BD 于点 F .

(1) 当 $BD = 6$ 时, 求 DF 的长;

(2) 设 $\vec{BA} = a$, $\vec{BC} = b$, 请用 a 、 b 表示 $\vec{BF}$.



【分析】 (1) 通过证明三角形相似, 利用相似比结合已知线段长度求解;

(2) 先将对角线向量用已知向量表示, 再结合相似比得到目标向量的表达式.

【解答】 解: (1) $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BCF$,

$\because$ 点 E 是 AD 的中点, 且 $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}BC$, 即 $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore DF = \frac{1}{4}BD = \frac{3}{2}$;

$$(2) \because AD \parallel BC \text{ 且 } \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \vec{AD} = \frac{2}{3} \vec{BC} = \frac{2}{3} \vec{b},$$

$$\because \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} \text{ 且 } \vec{BA} = \vec{a},$$

$$\therefore \vec{BD} = \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b},$$

$$\text{由 (1) 知 } \frac{DF}{BF} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } BF = \frac{3}{4} BD,$$

$$\therefore \vec{BF} = \frac{3}{4} \vec{BD} = \frac{3}{4} (\vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}) = \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

【点评】 本题主要考查相似三角形的判定与性质、向量的线性运算，涉及相似三角形的对应边成比例、向量的分解与数乘等知识点，掌握其相关知识点是解题的关键.

22. (10 分) 长兴岛风电基地的巨型风电机将源源不断的清洁风能转化为电能，实现海岛能源的绿色转型（如图 1）. 某校初三数学兴趣小组在完成解直角三角形应用知识的学习后，围绕“风叶长度的实地测算”这一课题开展数学实践活动. 已知三片风叶 OA 、 OB 、 OC 两两所成的角为 120° ，在实地测量中（如图 2），当其中一片风叶 OC 与塔干 OD 叠合时（即 O 、 C 、 D 在一直线上），在与塔底 D 水平距离为 200 米的 E 处，测得塔干顶部 O 的仰角为 37° ，风叶 OA 的端点 A 的仰角为 59° ，点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 O ，在同一平面内.

（参考数据 $\sin 37^\circ \approx 0.6$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\tan 59^\circ \approx 1.7$ ， $\sqrt{3} \approx 1.7$ ）

(1) 求塔干 OD 的长度；

(2) 求风叶 OA 的长度.（精确到 1 米）



图1

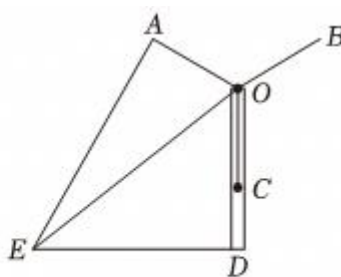


图2

【分析】 (1) 根据题意可得： $OD \perp DE$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 OD 的长，即可解答；

(2) 过点 A 作 $AF \perp DE$ ，垂足为 F ，过点 O 作 $OG \perp AF$ ，垂足为 G ，根据题意可得： $FG = OD = 150$ 米， $OG = DF$ ， $\angle DOG = 90^\circ$ ，从而可得 $\angle AOG = 30^\circ$ ，然后设 $DF = OG = x$ 米，则 $EF = (200 - x)$ 米，分别在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 和 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 AG 和 AF 的长，从而列出关于 x 的方

程，进行计算即可解答．

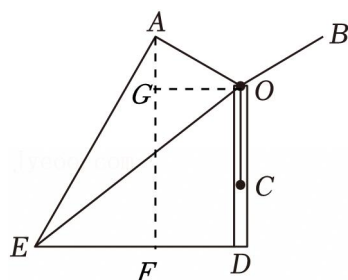
【解答】解：（1）由题意得： $OD \perp DE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中， $\angle OED = 37^\circ$ ， $DE = 200$ 米，

$$\therefore OD = DE \cdot \tan 37^\circ \approx 0.75 \times 200 = 150 \text{ (米)},$$

$\therefore$ 塔干 OD 的长度约为 150 米；

（2）过点 A 作 $AF \perp DE$ ，垂足为 F ，过点 O 作 $OG \perp AF$ ，垂足为 G ，



由题意得： $FG = OD = 150$ 米， $OG = DF$ ， $\angle DOG = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOG = \angle AOD - \angle DOG = 30^\circ,$$

设 $DF = OG = x$ 米，则 $EF = DE - DF = (200 - x)$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中， $AG = OG \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (米)，

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $\angle AEF = 59^\circ$ ，

$$\therefore AF = EF \cdot \tan 59^\circ \approx 1.7(200 - x) \text{ 米},$$

$$\therefore AF - AG = FG,$$

$$\therefore 1.7(200 - x) - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 150,$$

解得： $x \approx 83.0$ ，

$$\therefore OG \approx 83 \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中， $AO = \frac{OG}{\cos 30^\circ} \approx \frac{83}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 98$ (米)，

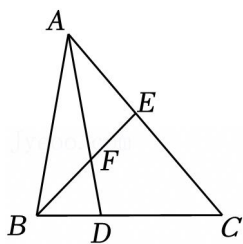
$\therefore$ 风叶 OA 的长度约为 98 米．

【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键．

23. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上， $AB = AD$ ， AD 与 BE 交于点 F ，且 $BC^2 = AC \cdot EC$ ．

(1) 求证： $\angle ADB = \angle BEC$ ；

(2) 如果 $AB = BC$, 求证: $AE \cdot AD = AF \cdot BE$.



【分析】(1) 利用两边成比例且夹角相等证得 $\triangle ABC \sim \triangle BEC$, 得出 $\angle ABC = \angle BEC$, 再根据等边对等角得出 $\angle ABC = \angle ADB$, 即可得证;

(2) 根据等边对等角得出 $\angle BAC = \angle C$, 结合(1)知 $\angle ADB = \angle BEC$, 以及三角形外角的性质可证得 $\angle CAD = \angle EBA$, 于是推出 $\triangle AEF \sim \triangle BEA$, 再根据相似三角形的性质得出 $AE \cdot AB = AF \cdot BE$, 由已知条件 $AB = AD$, 即可得证.

【解答】(1) 证明: $\because BC^2 = AC \cdot EC$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{EC}{BC},$$

$\because \angle C$ 为公共角,

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BEC,$$

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BEC;$$

(2) 证明: $\because AB = BC$,

$$\therefore \angle BAC = \angle C,$$

由(1)知 $\angle ADB = \angle BEC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle CAD + \angle C, \quad \angle BEC = \angle EBA + \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle EBA,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEA,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BEA,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{AB},$$

$$\therefore AE \cdot AB = AF \cdot BE,$$

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore AE \cdot AD = AF \cdot BE.$$

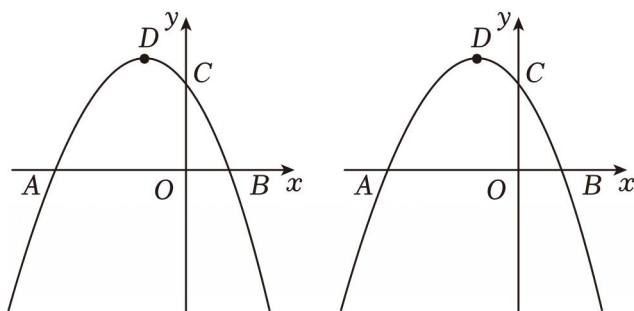
【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 A 和 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，抛物线的顶点为 D .

(1) 求点 A 和点 B 的坐标;

(2) 若点 E 与点 C 关于抛物线的对称轴对称，联结 AE ， AC ，若 AC 平分 $\angle EAO$ ，求抛物线的表达式;

(3) 若点 P 是抛物线第四象限上一动点，联结 AD 、 AC 、 DP 、 CP ，线段 DP 与线段 AC 交于点 F ，与 x 轴交于点 G ，当 $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP}$ 时，求 $\frac{DG}{GP}$ 的值.



备用图

【分析】(1) 令 $y = 0$ 得: $0 = ax^2 + 2ax - 3a$ ，即可解得 $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$;

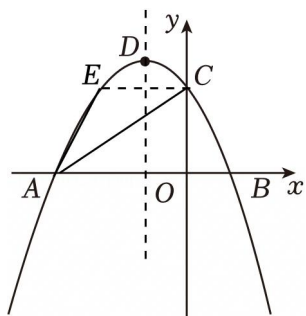
(2) 求出抛物线 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ 的对称轴为直线 $x = -1$ ， $C(0, -3a)$ ，可得 $E(-2, -3a)$ ， $EC \parallel x$ 轴，而 AC 平分 $\angle EAO$ ，可知 $AE = CE$ ，即 $\sqrt{(-3+2)^2 + (0+3a)^2} = 2$ ，解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即可得抛物线的表达式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$;

(3) 求出 $D(-1, -4a)$ ，直线 CD 解析式为 $y = ax - 3a$ ，由 $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP}$ ，可得 $AP \parallel CD$ ，即可求出直线 AP 解析式为 $y = ax + 3a$ ，解得 $P(2, 5a)$ ，故直线 DP 解析式为 $y = 3ax - a$ ，可得 $G(\frac{1}{3}, 0)$ ，再求出 $DG = \sqrt{(-1-\frac{1}{3})^2 + 16a^2} = \frac{4\sqrt{1+9a^2}}{3}$ ， $GP = \sqrt{(2-\frac{1}{3})^2 + 25a^2} = \frac{5\sqrt{1+9a^2}}{3}$ ，从而可得答案.

【解答】解: (1) 在 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ ($a < 0$) 中，令 $y = 0$ 得: $0 = ax^2 + 2ax - 3a$ ，解得 $x = -3$ 或 $x = 1$ ，

$\therefore A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$;

(2) 如图:



$$\because y = ax^2 + 2ax - 3a = a(x+1)^2 - 4a,$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ 的对称轴为直线 $x = -1$,

在 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = -3a$,

$$\therefore C(0, -3a),$$

$\because$ 点 E 与点 C 关于抛物线的对称轴直线 $x = -1$ 对称,

$$\therefore E(-2, -3a), EC \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle ECA = \angle CAO,$$

$\because AC$ 平分 $\angle EAO$,

$$\therefore \angle EAC = \angle CAO,$$

$$\therefore \angle ECA = \angle EAC,$$

$$\therefore AE = CE,$$

$$\because A(-3, 0), C(0, -3a), E(-2, -3a),$$

$$\therefore \sqrt{(-3+2)^2 + (0+3a)^2} = 2,$$

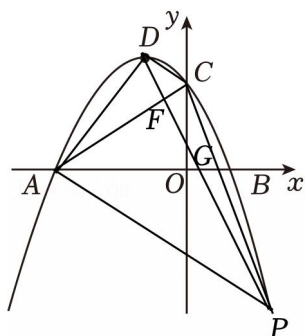
$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } a = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3};$$

(3) 如图:



$$\because y = ax^2 + 2ax - 3a = a(x+1)^2 - 4a,$$

$$\therefore D(-1, -4a),$$

$$\therefore C(0, -3a),$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 解析式为 } y = ax - 3a,$$

$$\because S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP},$$

$$\therefore S_{\triangle ADP} = S_{\triangle ACP},$$

$$\therefore AP \parallel CD,$$

$$\text{设直线 } AP \text{ 解析式为 } y = ax + m,$$

$$\text{把 } A(-3, 0) \text{ 代入得: } 0 = -3a + m,$$

$$\therefore m = 3a,$$

$$\therefore \text{直线 } AP \text{ 解析式为 } y = ax + 3a,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = ax + 3a \\ y = ax^2 + 2ax - 3a \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5a \end{cases},$$

$$\therefore P(2, 5a),$$

$$\text{由 } D(-1, -4a), P(2, 5a) \text{ 得直线 } DP \text{ 解析式为 } y = 3ax - a,$$

$$\text{在 } y = 3ax - a \text{ 中, 令 } y = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{3},$$

$$\therefore G\left(\frac{1}{3}, 0\right),$$

$$\because D(-1, -4a), P(2, 5a),$$

$$\therefore DG = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 16a^2} = \frac{4\sqrt{1+9a^2}}{3}, \quad GP = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 + 25a^2} = \frac{5\sqrt{1+9a^2}}{3},$$

$$\therefore \frac{DG}{GP} = \frac{4}{5}.$$

【点评】 本题考查二次函数综合应用, 涉及待定系数法, 两点间距离公式的应用, 等腰三角形的判定等知识, 解题的关键是掌握上述知识.

25. (14分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 8$, $\tan B = \frac{3}{4}$, 点 E 是 AB 边上的一点, 将 $\triangle ABC$ 沿着过点 E 的直线翻折, 点 A 落在 BC 边上, 记作点 D , 折痕所在的直线与射线 AC 交于点 F , 过点 D 作 $DG \perp BC$, 交射线 BA 于点 G .

(1) 如图 1, 当点 F 和点 C 重合时, 求 AE 的长;

(2) 如图 2, 当点 F 在边 AC 上时, 设 $BD = x$, $\tan \angle AFE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域;

(3) 延长 DG , 交 CA 的延长线于点 H , 当 $\triangle DFH$ 是以 DH 为腰的等腰三角形时, 求 EG 的长.

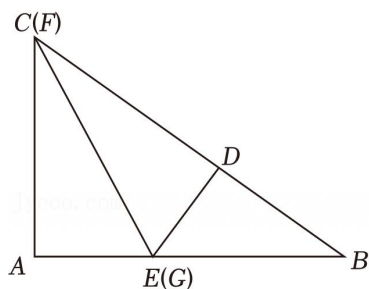


图 1

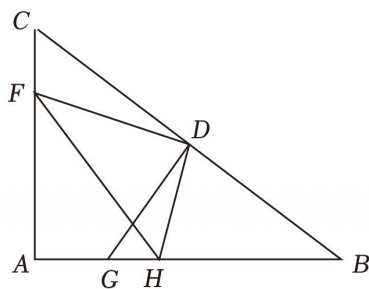
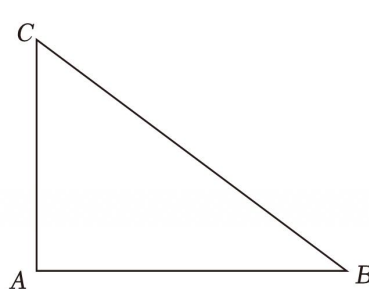


图 2



备用图

【分析】 (1) 首先在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由 $\angle A = 90^\circ$ 、 $AB = 8$ 和 $\tan B = \frac{3}{4}$, 根据三角函数定义得 $AC = \frac{3}{4}AB = 6$, 再通过勾股定理算出 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$, 因 $\triangle ABC$ 沿 CE 翻折后 A 与 D 重合, 利用翻折性质可得 $AC = DC = 6$ 、 $AE = DE$ 、 $\angle CDE = 90^\circ$, 进而推出 $\angle EDB = 90^\circ$ 且 $BD = BC - DC = 4$. 设 $AE = x$, 则 $DE = x$ 、 $EB = 8 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中, 由勾股定理列方程 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$, 求解得 $x = 3$, 即 $AE = 3$;

(2) 由翻折性质得 $AE = DE$ 、 $AF = DF$ 、 $\angle EDF = 90^\circ$, 结合 $DG \perp BC$ 得 $\angle GDB = 90^\circ$, 通过“同角的余角相等”推出 $\angle DGB = \angle C$; 再由角的和差关系得 $\angle CDF = \angle EDG$, 进而判定 $\triangle DGE \sim \triangle DCF$, 得到 $\frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DC}$. 在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, 由 $\tan B = \frac{3}{4}$ 和 $BD = x$ 得 $DG = \frac{3x}{4}$, 又 $DC = 10 - x$, 而 $\tan \angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF}$, 故 $y = \frac{DG}{DC} = \frac{3x}{4(10-x)}$. 结合 F 在 AC 上的边界条件, 当 F 与 C 重合时 $x = 4$, 当 E 与 B 重合时 $x = 8$, 确定定义域为 $4 \leq x \leq 8$;

(3) 设 $BD = x$, 先由 $\triangle ABC \sim \triangle GDB$, 根据相似得 $DG = \frac{3x}{4}$ 、 $BG = \frac{5x}{4}$, 再分两种情况讨论等腰 $\triangle DFH$: ①当 F 在 AC 延长线上时, 因 $\angle FDH > 90^\circ$, 故 $DH = DF$, 通过角的等量代换得 $\angle DEB = \angle B$, 即 $DE = BD$, 作 $EK \perp BC$, 得 $BK = \frac{4}{5}x$, 结合 $BK = \frac{1}{2}(8 - x)$, 列方程解得 $x = \frac{40}{13}$, 进而 $EG = 8 - x - \frac{5x}{4} = \frac{14}{13}$; ②当 F 在线段 AC 上时, 因 $\angle HFD > \angle H$, 故 $DH = FH$, 通过角的转化得 $\angle BED = \angle BDE$, 即 $BD = BE$, 由勾股定理得 $AE = DE = \frac{\sqrt{10}}{5}x$, 结合 $AB = AE + BE = 8$ 列方程解得 $x = \frac{40 - 8\sqrt{10}}{3}$, 进而

$$EG = \frac{5x}{4} - x = \frac{10-2\sqrt{10}}{3}.$$

【解答】解：（1）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ ，

$$\therefore AC = \frac{3}{4}AB = 6,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10.$$

$\because \triangle CAE$ 沿着 CE 折叠得到 $\triangle CDE$ ，

$$\therefore AE = DE, AC = DC = 6, \angle CDE = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB = 90^\circ, BD = BC - DC = 10 - 6 = 4,$$

设 $AE = x$ ，则 $DE = x$ ， $EB = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中，由勾股定理得 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$ ，解得 $x = 3$ ，故 $AE = 3$ ；

（2）由翻折性质知 $AE = DE$ ， $AF = DF$ ， $\angle EDF = \angle A = 90^\circ$ ，

$\because DG \perp BC$ ，

$$\therefore \angle GDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGB + \angle B = 90^\circ, \angle C + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGB = \angle C.$$

$$\because \angle EDF = \angle EDG + \angle FDG = 90^\circ, \angle CDG = \angle CDF + \angle FDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle EDG,$$

$$\therefore \triangle DGE \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DC},$$

在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中， $\tan B = \frac{3}{4}$ ， $BD = x$ ，

$$\therefore DG = BD \cdot \tan B = \frac{3x}{4},$$

$$\text{又 } DC = BC - BD = 10 - x, y = \tan \angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DC},$$

$$\therefore y = \frac{DG}{DC} = \frac{\frac{3x}{4}}{10-x} = \frac{3x}{4(10-x)},$$

当点 F 在 AC 上时，由（1），当 F 与 C 重合时 $DB = 4$ ，

$$\therefore x \geq 4,$$

当点 E 与点 B 重合时， $BD = AB = 8$ ，

$$\therefore x \leq 8,$$

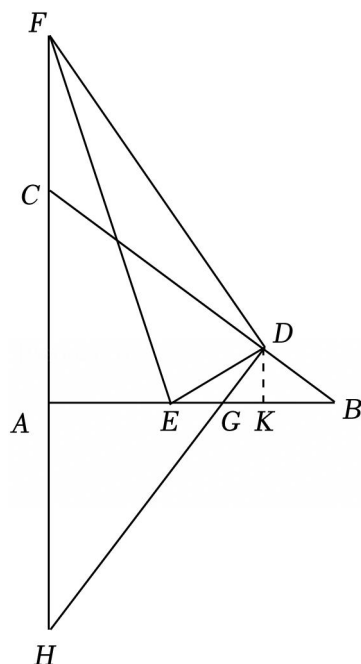
∴ 定义域是 $4 \leq x \leq 8$ 综上, y 关于 x 的函数解析式是 $y = \frac{3x}{4(10-x)}$, 定义域是 $4 \leq x \leq 8$.

(3) 设 $BD = x$, 易得 $\triangle ABC \sim \triangle DBG$,

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BG} = \frac{AC}{GD}, \text{ 即 } \frac{6}{GD} = \frac{10}{GB} = \frac{8}{x},$$

$$\therefore DG = \frac{3x}{4}, BG = \frac{5x}{4};$$

①如图, 点 F 在 AC 的延长线上时,



$$\angle FDH > \angle FDE = 90^\circ,$$

∴ 只能 $DH = DF$, 此时 $\angle H = \angle CFD$,

同(2)得到 $\angle DGB = \angle ACB$, $\angle CDF = \angle EDG$,

$$\therefore \angle DGB - \angle EDG = \angle ACB - \angle CDF, \text{ 即 } \angle DEB = \angle CFD.$$

又 $\because \angle H = \angle B$,

$$\therefore \angle DEB = \angle B,$$

∴ $DE = BD = x$, $\triangle BED$ 是等腰三角形,

$$\therefore BK = EK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}(8-x),$$

在 $\triangle BED$ 中作 $DK \perp BC$ 于 K , 则 $DK \parallel AC$,

$$\therefore \frac{BK}{AB} = \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } \frac{BK}{8} = \frac{BD}{10},$$

$$\therefore BK = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}x,$$

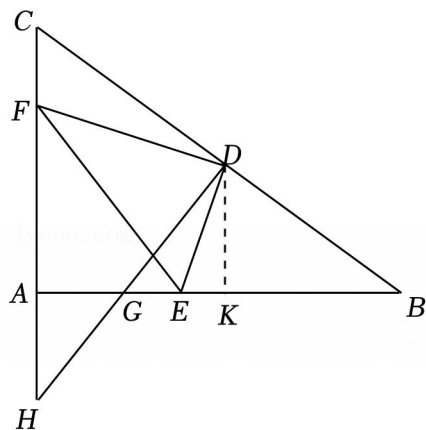
$$\text{解方程 } \frac{4}{5}x = \frac{1}{2}(8-x), \text{ 得 } x = \frac{40}{13},$$

$$\text{当 } x = \frac{40}{13}, EG = BE - BG = 8 - x - \frac{5x}{4} = \frac{14}{13},$$

②如图，点 F 在线段 AC 上时，

$$\because \angle HFD = \angle C + \angle CDF > \angle H,$$

$$\therefore \text{只能 } DH = FH, \text{ 此时 } \angle HFD = \angle HDF,$$



$$\because \angle CDF = \angle EDG, \angle CDH = \angle BDH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDH - \angle CDF = \angle BDH - \angle EDG, \text{ 即 } \angle HDF = \angle EDB,$$

$$\therefore \angle HFD = \angle HDF = \angle EDB,$$

$$\because \angle DEB = \angle GDE + \angle DGB, \angle DGB = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CDF + \angle ACB = \angle HFD,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BDE, BD = BE,$$

$$\because BK = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}x, DK = \frac{3}{5}BD = \frac{3}{5}x,$$

$$\therefore EK = BE - BK = \frac{1}{5}x,$$

$$\therefore AE = DE = \sqrt{EK^2 + DK^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}x,$$

$$\because AB = AE + BE = 8,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{10}}{5}x + x = 8, \text{ 解得 } x = \frac{40 - 8\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore EG = BG - BE = \frac{5}{4} - x = \frac{1}{4}x = \frac{10 - 2\sqrt{10}}{3}.$$

【点评】 本题以直角三角形翻折为背景，主要考查直角三角形的性质、翻折的性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的分类讨论，以及函数解析式的构建与定义域求解，重点考查几何图形中边与角的等量转化能力和分类讨论思想的应用。