

2025 学年第一学期期末学业质量调研

九年级数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1. 如果两个相似三角形的面积比为 $1:4$, 那么这两个三角形的对应中线的比为 ()

A. $1:2$

B. $1:4$

C. $1:8$

D. $1:16$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的性质, 相似三角形的面积比等于相似比的平方, 对应中线的比等于相似比.

【详解】解: $\because$ 两个相似三角形的面积比为 $1:4$,

$\therefore$ 两个三角形的相似比为 $1:2$.

又 $\because$ 相似三角形对应中线的比等于相似比,

$\therefore$ 这两个三角形的对应中线的比为 $1:2$.

故选: A.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$ 那么下列说法正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{3}{5}$

B. $\cos A = \frac{3}{5}$

C. $\tan A = \frac{3}{5}$

D. $\cot A = \frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查勾股定理, 锐角三角函数的定义, 准确代入对应边是解题关键.

根据勾股定理求出 BC , 再根据锐角三角函数的定义计算各选项.

【详解】解：∵在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，

∴由勾股定理得： $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

故选：B.

3. 将抛物线 $y = 3x^2$ 平移，使顶点移到点 $M(-2, 1)$ 的位置，所得新抛物线的表达式是 ()

A. $y = 3(x+2)^2 - 1$

B. $y = 3(x-2)^2 - 1$

C. $y = 3(x+2)^2 + 1$

D. $y = 3(x-2)^2 + 1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象的平移问题，抛物线平移时开口大小和方向不变，故二次项系数 a 不变，根据新顶点坐标直接写出顶点式即可.

【详解】解：∵将抛物线 $y = 3x^2$ 平移，使顶点移到点 $M(-2, 1)$ 的位置，

∴所得新抛物线的表达式是 $y = 3(x+2)^2 + 1$ ，

故选：C.

4. 下列命题正确的是 ()

A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

B. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

C. 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 如果 $m = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $m\vec{a} = \vec{0}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查向量的基本概念，包括向量相等的条件、单位向量的定义、平行向量的判定以及向量数乘的结果.

【详解】解：A 选项：向量相等需要模相等且方向相同，仅 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 只能说明长度相等，方向不一定相同，

故 A 错误;

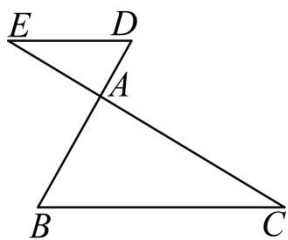
B 选项: 单位向量的模都为 1, 但方向可以不同, 因此单位向量不一定相等, 故 B 错误;

C 选项: 若 $\vec{a} = -\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是相反向量, 相反向量属于平行向量(共线向量), 故 C 正确;

D 选项: 当 $m = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$ 时, $m\vec{a} = \vec{0}$ (零向量), 而不是数字 0, 故 D 错误.

故选: C.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 的反向延长线上, 已知 $AC = 2AE$, 下列条件中能判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$

B. $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定定理, 结合线段比例关系与相似三角形判定来推导平行关系. 关键是利用“两边对应成比例且夹角相等, 则三角形相似”, 进而推出同位角相等, 判定两直线平行.

【详解】解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC.$$

$\because$ 点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 的反向延长线上,

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC.$$

已知 $AC = 2AE$, 则 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$, 若要判定 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$, 还需满足边的关系是 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$.

选项 A 中 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, 不满足比例关系, 不合题意;

选项 B 中 $\because \frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \frac{AB + AD}{AB} = \frac{3}{2},$$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$, 满足题意;

选项 C 中 $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$, 推得 $\frac{AD}{AB} = 2 \neq \frac{1}{2}$, 不合题意;

选项 D 中 $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ 仅为线段长度比, 无夹角相等条件, 无法判定相似与平行.

故选: B.

6. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $AB = AC, DE = DF$, 根据下列条件, 一定能判断 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似的是

()

A. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

B. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF}$

C. $\angle B = \angle D$

D. $\angle C = \angle E$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质与相似三角形的判定, 核心是利用等腰三角形的底角相等, 结合相似三角形的“两角对应相等, 两三角形相似”判定定理进行分析.

【详解】解: 已知 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$, 故 $\angle B = \angle C$; $\triangle DEF$ 中 $DE = DF$, 故 $\angle E = \angle F$.

A 选项: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, 因 $AB = AC, DE = DF$, 该比例恒成立, 但仅两边成比例且无夹角相等, 无法判定相似, 故 A 错误;

B 选项: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF}$, 由 $AB = AC$ 可得 $DE = EF$, 结合 $DE = DF$ 仅能说明 $\triangle DEF$ 为等边三角形, 无法推出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似, 故 B 错误;

C 选项: $\angle B = \angle D$, $\angle B$ 是 $\triangle ABC$ 的底角, $\angle D$ 是 $\triangle DEF$ 的顶角, 无法推出两组角对应相等, 故 C 错误;

D 选项: $\angle C = \angle E$, 结合等腰三角形性质, 可得 $\angle B = \angle C = \angle E = \angle F$, 即两组角对应相等, 根据“两角对应相等, 两三角形相似”, 可判定 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 故 D 正确.

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{a}{a+b}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查比例的性质，可通过设参数的方法代入求解，也可利用比例变形直接计算.

【详解】 解： $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{2},$

$\therefore$ 设 $a = 3k, b = 2k (k \neq 0),$ 则 $a + b = 3k + 2k = 5k,$

$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5};$

故答案为： $\frac{3}{5}.$

8. 计算： $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\vec{a} + 4\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的线性运算，核心是通过去括号、合并同类向量来化简表达式.

【详解】 解： $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3\vec{a} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{a} = (2\vec{a} - 3\vec{a}) + 4\vec{b} = -\vec{a} + 4\vec{b};$

故答案为： $-\vec{a} + 4\vec{b}.$

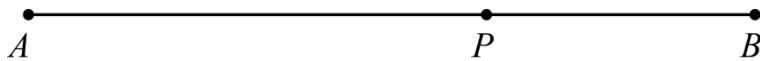
9. 已知线段 $AB = 4,$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 则线段 AP 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\sqrt{5} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了黄金分割点，线段成比例的计算，公式法解一元二次方程，掌握黄金分割点的计算方法是解题的关键.

【详解】 解： 如图所示，设 $AP = x,$ 则 $PB = 4 - x,$



$\therefore$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点,

$\therefore \frac{BP}{AP} = \frac{AP}{AB},$

$\therefore \frac{4-x}{x} = \frac{x}{4},$ 整理得 $x^2 + 4x - 16 = 0,$

$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-16)}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5},$

$$\because AP = x > 0,$$

$$\therefore AP = 2\sqrt{5} - 2,$$

故答案为: $2\sqrt{5} - 2$.

10. 如果抛物线 $y = (a+1)x^2 + 4$ 开口向下, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < -1$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象性质, 抛物线的开口方向由二次项系数的符号决定:

当二次项系数小于 0 时, 抛物线开口向下; 大于 0 时, 开口向上.

【详解】 解: 抛物线 $y = (a+1)x^2 + 4$ 的二次项系数为 $a+1$.

$\because$ 抛物线开口向下,

$$\therefore a+1 < 0, \text{ 解得 } a < -1;$$

故答案为: $a < -1$.

11. 已知点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 为二次函数 $y = -(x-1)^2 + k$ 图像上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 (填“>”、“=”或“<”)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的性质, 关键是利用开口方向 and 对称轴判断函数值的大小关系.

【详解】 解: 二次函数 $y = -(x-1)^2 + k$ 的开口向下, 对称轴为直线 $x = 1$.

点 $A(-1, y_1)$ 到对称轴的距离为 $|-1-1| = 2$, 点 $B(-3, y_2)$ 到对称轴的距离为 $|-3-1| = 4$.

$\because$ 开口向下时, 点离对称轴越近, 函数值越大, 且 $2 < 4$,

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故答案为: $>$.

12. 小杰沿着坡度 $i = 1:2.4$ 的斜坡向上行走了 65 米, 那么他距离地面的垂直高度升高了_____米.

【答案】 25

【解析】

【分析】 本题主要考查坡度与坡比的概念、勾股定理的应用等知识点，灵活运用相关知识是解题的关键.
根据坡度定义，垂直高度与水平距离的比为1:2.4，设垂直高度为 x 米，则水平距离为 $2.4x$ 米，再利用勾股定理建立方程求解即可.

【详解】 解：设垂直高度升高了 x 米，则水平距离为 $2.4x$ 米，斜坡长度为65米，
在直角三角形中，由勾股定理得： $x^2 + (2.4x)^2 = 65^2$ ，解得： $x = 25$ （负值舍去），
所以垂直高度升高了25米.
故答案为：25.

13. 用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像时，列出了如下的表格：

x	...	0	1	2	3	4	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	-3	0	1	0	-3	...

那么当 $x = 5$ 时，该二次函数 y 的值为_____.

【答案】 -8

【解析】

【分析】 根据待定系数法将表格中任意三个点代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中，列出含 a, b, c 的方程组，求解 a, b, c 即可确定函数表达式.

【详解】 解：将点(0,-3),(1,0),(2,1)代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中得，

$$\begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases},$$
$$\text{解得, } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases},$$

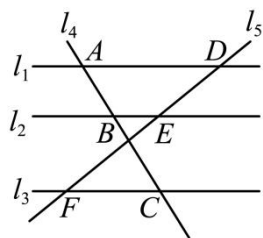
∴ 抛物线表达式为 $y = -x^2 + 4x - 3$.

∴ 当 $x = 5$ 时， $y = -8$.

故答案为：-8.

【点睛】 本题考查待定系数法求二次函数解析式，遵循待定系数法求解析式的步骤即可，即“一设”、“二代”、“三求解”、“四确定”.

14. 如图, 已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别与直线 l_4 交于点 A 、 B 、 C , 与直线 l_5 交于点 D 、 E 、 F , 如果 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB = 2$, $AC = 5$, $EF = 4$, 则 DE 的长是_____.



【答案】 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线分线段成比例定理, 根据平行线分线段成比例定理可得 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, 据此代入数据计算即可.

【详解】 解: $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

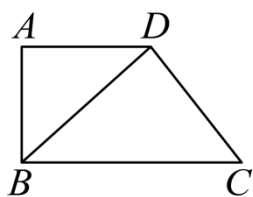
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \text{ 即 } \frac{2}{5} = \frac{DE}{DE+4},$$

$$\therefore DE = \frac{8}{3},$$

故答案为: $\frac{8}{3}$.

15. 如图, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABD = \angle C$, 如果 $AD = 3$, $BD = 4$, 那么

$BC =$ _____.



【答案】 $\frac{16}{3}$ 或 $5\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定, 可证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$, 再根据相似三角形的性质列出比例式求解即可.

【详解】 解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\text{又} \because \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}, \text{ 即 } \frac{BC}{4} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BC = \frac{16}{3},$$

故答案为: $\frac{16}{3}$.

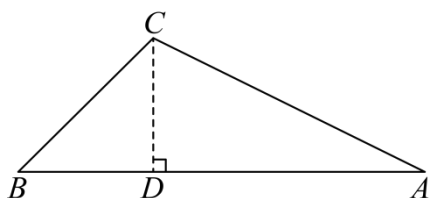
16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\angle A$ 是锐角), $\angle B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{10}$, 那么 AB 的长为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题主要考查了解直角三角形和勾股定理, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 根据正弦的定义求出 CD 的长, 则可用勾股定理求出 AD 的长, 再解直角三角形求出 BD 的长即可得到答案.

【详解】解: 如图所示, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad AC = \sqrt{10},$$

$$\therefore CD = 1,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3,$$

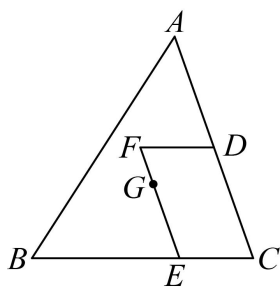
$$\text{在 Rt}\triangle DBC \text{ 中, } BD = \frac{CD}{\tan B} = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 4,$$

故答案为: 4.

17. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D 是边 AC 的中点, $GE \parallel AC$ 交 BC 于点 E , $DF \parallel BC$ 交 EG 于

点 F , 则 $\frac{S_{\text{四边形}CDFE}}{S_{\triangle ABC}}$ 的比值为_____.

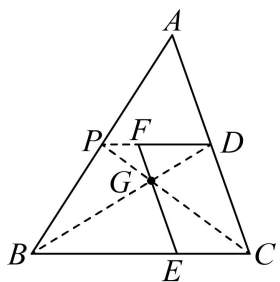


【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】连接 BG, DG, CG ，延长 DF 交 AB 于点 P ，连接 PG ，根据重心的性质推出 $\frac{DG}{BC} = \frac{1}{2}$ ，通过证明 $\triangle GDP \sim \triangle GBC$ ， $\triangle GDF \sim \triangle GBE$ ，得出 $\frac{GD}{GB} = \frac{DP}{BC} = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{S_{\triangle GDF}}{S_{\triangle GBE}} = \frac{1}{4}$ ， $\frac{GB}{BD} = \frac{2}{3}$ ，再证明 $\triangle BGE \sim \triangle BDC$ ，得出 $\frac{S_{\triangle GBE}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{4}{9}$ ，设 $S_{\triangle GDF} = x$ ，则 $S_{\triangle GBE} = 4x$ ， $S_{\triangle DBC} = 9x$ ， $S_{\triangle ABC} = 18x$ ，即可求解。

【详解】解：连接 BG, DG, CG ，延长 DF 交 AB 于点 P ，连接 PG ，



$\because$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 重心，点 D 为 AC 边中点，

$\therefore$ 点 B, G, D 在同一直线上，

$\because DF \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AP}{BP}，$$

$\because$ 点 D 为 AC 边中点，

$$\therefore AD = CD，$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AP}{BP} = 1，$$

$$\therefore AP = BP$$

$\therefore$ 点 P 为 AB 边中点，

$\therefore$ 点 C, P, G 在同一直线上，

$\because$ 点 D 为 AC 边中点, 点 P 为 AB 边中点,

$\therefore DP$ 为 ABC 的中位线,

$$\therefore DP = \frac{1}{2}BC, \text{ 即 } \frac{DP}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore DF \parallel BC,$

$\therefore \triangle GDP \sim \triangle GBC, \triangle GDF \sim \triangle GBE,$

$$\therefore \frac{GD}{GB} = \frac{DP}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GDF}}{S_{\triangle GBE}} = \left(\frac{GD}{GB}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{GB}{BD} = \frac{2}{3},$$

$\therefore FE \parallel AC,$

$\therefore \triangle BGE \sim \triangle BDC,$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GBE}}{S_{\triangle DBC}} = \left(\frac{GB}{BD}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

设 $S_{\triangle GDF} = x$, 则 $S_{\triangle GBE} = 4x$, $S_{\triangle DBC} = 9x$,

$$\therefore S_{\text{四边形}GECD} = S_{\triangle DBC} - S_{\triangle GBE} = 5x,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CDFE} = S_{\triangle GDF} + S_{\text{四边形}GECD} = x + 5x = 6x,$$

$\because$ 点 D 为 AC 边中点,

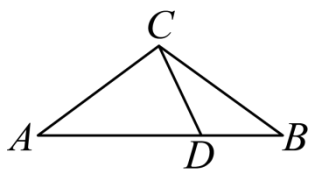
$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle DBC} = 18x,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}CDFE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{6x}{18x} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题主要考查三角形重心的性质, 平行线分线段成比例定理, 三角形中位线定理, 相似三角形的判定和性质, 解题的关键是掌握三角形的三条中线相交于一点, 这一点是三角形的重心; 三角形的中线将三角形面积平分.

18. 定义: 当一个三角形有两个内角的差为 90° 时, 这个三角形叫做“差直角三角形”. 如图, 在 ABC 中, $AC = BC = 10$, $AB = 16$, 点 D 是边 AB 上的一动点 (且 $AD > BD$), 若 $\triangle BCD$ 是“差直角三角形”, 则 CD 的长为_____.

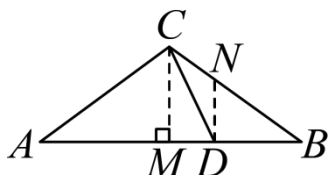


【答案】 $\frac{15}{2}$ 或 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形“三线合一”性质、相似三角形判定与性质、勾股定理，以及分类讨论思想的应用．先作等腰 $\triangle ABC$ 的高 CM ，用勾股定理求出 $CM = 6$ ，根据“差直角三角形”定义，分 $\angle BDC - \angle B = 90^\circ$ 和 $\angle BDC - \angle BCD = 90^\circ$ 两种情况讨论．第一种情况通过角的等量代换推导 $\triangle CMD \sim \triangle BMC$ ，用相似比求 MD ，再用勾股定理得 CD ；第二种情况构造平行线 $DN \parallel CM$ ，得 $\triangle NDB \sim \triangle CMB$ ，结合 $CN = DN$ 列方程求 BD ，再用勾股定理得 CD ．

【详解】 解：如图，过点 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ，过点 D 作 $DN \parallel CM$ ，交 BC 于 N ．



$$\because AC = BC = 10, AB = 16,$$

$$\therefore M \text{ 为 } AB \text{ 中点, } AM = MB = 8,$$

$$\therefore CM = \sqrt{BC^2 - MB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

$$\because AD > BD,$$

$$\therefore \angle BDC \text{ 为钝角.}$$

分两种情况：

$$\textcircled{1} \angle BDC - \angle B = 90^\circ, \text{ 则 } \angle BDC = \angle B + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDC = 180^\circ - \angle BDC = 90^\circ - \angle B.$$

$$\because \angle CMD = \angle BMC = 90^\circ, \angle MDC = \angle BCM = 90^\circ - \angle B,$$

$$\therefore \triangle CMD \sim \triangle BMC,$$

$$\therefore \frac{CM}{BM} = \frac{MD}{CM} = \frac{6}{8} = \frac{MD}{6}, \text{ 解得 } MD = \frac{36}{8} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = \frac{15}{2};$$

$$\textcircled{2} \angle BDC - \angle BCD = 90^\circ, \text{ 则 } \angle BCD = \angle BDC - 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDN = \angle BDC - 90^\circ$$

$$\therefore \angle CDN = \angle BCD.$$

$$\therefore DN \parallel CM,$$

$$\therefore \triangle NDB \sim \triangle CMB,$$

$$\therefore \frac{ND}{CM} = \frac{DB}{MB} = \frac{BN}{CB}, \text{ 即 } \frac{ND}{6} = \frac{BD}{8} = \frac{BN}{10},$$

$$\therefore ND = \frac{3}{4}BD, \quad BN = \frac{5}{4}BD.$$

$$\therefore \angle CDN = \angle BCD,$$

$$\therefore CN = DN,$$

$$\therefore BC = DN + BN = \frac{3}{4}BD + \frac{5}{4}BD = 10, \text{ 解得 } BD = 5,$$

$$\therefore MD = BM - BD = 8 - 5 = 3,$$

$$\therefore CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = 3\sqrt{5}.$$

综上, CD 的长为 $\frac{15}{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{2 \tan 60^\circ}{\cot 30^\circ - 2 \sin 30^\circ} + \cos^2 45^\circ$

【答案】 $\frac{7+2\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角三角函数值的混合运算, 先计算特殊角三角函数值, 再根据二次根式的相关运算法则求解即可.

【详解】 解: $\frac{2 \tan 60^\circ}{\cot 30^\circ - 2 \sin 30^\circ} + \cos^2 45^\circ$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{3}}{3-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{7+2\sqrt{3}}{2}.$$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, -1)$ 、 $B(0, -4)$

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 若将该抛物线向上平移 $m(m > 0)$ 个单位长度，使得平移后的抛物线与 x 轴只有一个公共点，求 m 的值.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 4$

(2) 5

【解析】

【分析】本题考查了待定系数法求二次函数的表达式，二次函数的平移，解决本题的关键是掌握待定系数法求解解析式和函数的图象特征及平移规律.

(1) 直接将点 $A(3, -1)$ 、 $B(0, -4)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，解得 b 、 c 的值即可求得表达式；

(2) 求得抛物线的顶点，再判断顶点经过怎样的平移能到 x 轴上即可.

【小问 1 详解】

解：将点 $A(3, -1)$ 、 $B(0, -4)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，

$$\text{得} \begin{cases} 3^2 + 3b + c = -1 \\ c = -4 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式 $y = x^2 - 2x - 4$.

【小问 2 详解】

解： $\because y = x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$ ，

$\therefore$ 该抛物线的顶点为 $(1, -5)$.

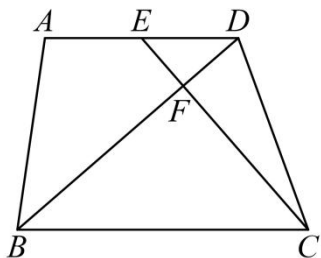
$\because$ 要使抛物线与 x 轴只有一个公共点，即要求顶点在 x 轴上，

$\therefore$ 顶点纵坐标应为 0.

∴ 将该抛物线向上平移 5 个单位后, 所得抛物线与 x 轴只有一个公共点.

∴ m 的值是 5.

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$, 点 E 是边 AD 的中点, 连接 CE 交对角线 BD 于点 F .



(1) 当 $BD = 6$ 时, 求 DF 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BF}$.

【答案】(1) $DF = \frac{3}{2}$

(2) $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】本题主要考查相似三角形的判定与性质、向量的线性运算, 涉及相似三角形的对应边成比例、向量的分解与数乘等知识点.

(1) 通过证明三角形相似, 利用相似比结合已知线段长度求解;

(2) 先将对角线向量用已知向量表示, 再结合相似比得到目标向量的表达式.

【小问 1 详解】

解: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BCF$,

$\because$ 点 E 是 AD 的中点, 且 $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}BC$, 即 $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore DF = \frac{1}{4}BD = \frac{3}{2}$;

【小问 2 详解】

解: $\because AD \parallel BC$ 且 $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}, \text{ 且 } \overrightarrow{BA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\text{由 (1) 知 } \frac{DF}{BF} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } BF = \frac{3}{4}BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

22. 长兴岛风电基地的巨型风电机将源源不断的清洁风能转化为电能, 实现海岛能源的绿色转型(如图1). 某校初三数学兴趣小组在完成解直角三角形应用知识的学习后, 围绕“风叶长度的实地测算”这一课题开展数学实践活动, 已知三片风叶 OA 、 OB 、 OC 两两所成的角为 120° , 在实地测量中(如图2), 当其中一片风叶 OC 与塔架 OD 叠合时(即 O 、 C 、 D 在同一直线上), 在与塔底 D 水平距离为 200 米的 E 处, 测得塔架顶部 O 的仰角为 37° , 风叶 OA 的端点 A 的仰角为 59° , 点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 O 在同一平面内. (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\tan 59^\circ \approx 1.7$, $\sqrt{3} \approx 1.7$.)



图1

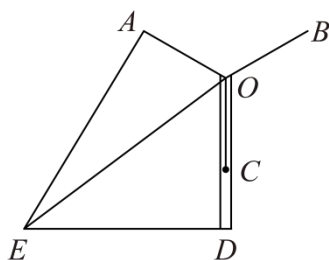


图2

- (1) 求塔架 OD 的长度;
- (2) 求风叶 OA 的长度. (精确到1米)

【答案】 (1) 150 米

(2) 98 米

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用, 矩形的判定与性质, 含 30° 角的直角三角形性质, 掌握方程思想是解题关键.

- (1) 在 $\text{Rt } OED$ 中, 利用 $\tan 37^\circ$ 和 $ED = 200\text{m}$, 计算出 OD ;
- (2) 设 $OA = x$, 作辅助线构造矩形 $ODHG$, 利用 $\angle AOC = 120^\circ$ 推出 $\angle AOG = 30^\circ$, 用 x 表示 AH 和 EH 的长度, 再根据 $\tan 59^\circ$ 列方程求解, 得到 OA 长度.

【小问 1 详解】

解：根据题意，可知 $\angle ODE = 90^\circ$ ， $ED = 200\text{m}$ ， $\angle OED = 37^\circ$ ，

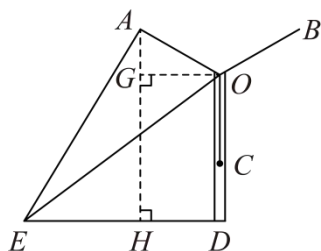
$$\therefore \tan \angle OED = \frac{OD}{ED} = \frac{OD}{200} = 0.75,$$

$$\therefore OD = 200 \times 0.75 = 150 \text{ 米}.$$

答：塔架 OD 的长为 150 米.

【小问 2 详解】

解：如图，过点 A 作 $AH \perp ED$ 于点 H ，过点 O 作 $OG \perp AH$ 于点 G ，



设风叶 OA 的长度为 $x\text{m}$ ，

$$\therefore \angle OGH = \angle GHD = \angle ODH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ODHG$ 为矩形，

$$\therefore \angle GOD = 90^\circ, \quad OD = GH = 150\text{m},$$

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOG = 30^\circ,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}x = 0.5x, \quad OG = HD = OA \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x \approx 0.85x,$$

$$\therefore AH = AG + GH = (0.5x + 150)\text{m}, \quad EH = ED - HD = (200 - 0.85x)\text{m},$$

$$\therefore \angle AED = 59^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AED = \frac{AH}{EH} \approx 1.7,$$

$$\therefore \frac{0.5x + 150}{200 - 0.85x} \approx 1.7,$$

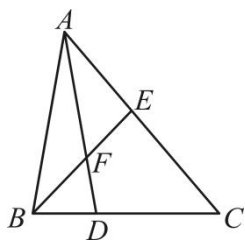
$$\therefore 0.5x + 150 \approx 340 - 1.445x, \text{ 即 } 0.5x + 1.445x \approx 340 - 150,$$

解得 $x \approx 97.7 \approx 98$ 米.

答：风叶 OA 的长为 98 米.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上， $AB = AD$ ， AD 与 BE 交于点 F ，且

$$BC^2 = AC \cdot EC.$$



(1) 求证: $\angle ADB = \angle BEC$;

(2) 如果 $AB = BC$, 求证: $AE \cdot AD = AF \cdot BE$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 通过对已知条件 $BC^2 = AC \cdot EC$ 变形得到比例式, 结合公共角 $\angle C$ 证明 $\triangle BCA \sim \triangle ECB$, 利用相似三角形对应角相等及等腰三角形 $AB = AD$ 的性质, 推导得出 $\angle ADB = \angle BEC$;

(2) 先利用第 (1) 问的相似结论得到角相等, 结合等腰三角形 $AB = BC$ 的性质推导出角相等, 再通过三角形外角性质与角的代换, 证明新的相似三角形 $\triangle AEF \sim \triangle BEA$, 最终利用相似三角形对应边成比例完成等积式的证明.

【小问 1 详解】

证明: $\because BC^2 = AC \cdot EC$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{EC}{BC}.$$

又 $\because \angle C = \angle C$,

$$\therefore \triangle BCA \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BEC.$$

又 $\because AB = AD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = \angle BEC, \text{ 即 } \angle ADB = \angle BEC;$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 知 $\triangle BCA \sim \triangle ECB$,

$$\therefore \angle BAC = \angle EBC.$$

$\because AB = BC$,

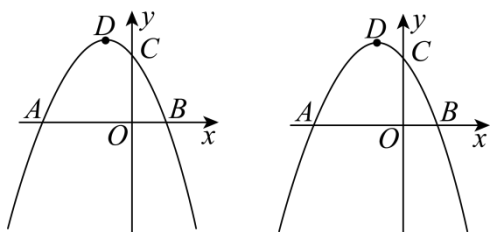
$$\therefore \angle BAC = \angle C,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle C.$$

$$\begin{aligned}
&\because AB = AD, \\
&\therefore \angle ABD = \angle ADB. \\
&\because \angle ABD = \angle ABE + \angle EBC, \quad \angle ADB = \angle FAE + \angle C, \\
&\therefore \angle ABE = \angle FAE. \\
&\text{又} \because \angle AEF = \angle BEA, \\
&\therefore \triangle AEF \sim \triangle BEA, \\
&\therefore \frac{AF}{BA} = \frac{AE}{BE}. \\
&\because AB = AD, \\
&\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{BE}, \\
&\therefore AE \cdot AD = AF \cdot BE.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质．在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用．如果两个三角形相似，那么它们的对应角相等，对应边成比例．

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 A 和 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，抛物线的顶点为 D ．



备用图

- (1) 求点 A 和点 B 的坐标；
- (2) 若点 E 与点 C 关于抛物线的对称轴对称，连接 AE, AC ，若 AC 平分 $\angle EAO$ ，求抛物线的表达式；
- (3) 若点 P 是抛物线第四象限上一动点，连接 AD, AC, DP, CP ，线段 DP 与线段 AC 交于点 F ，与 x 轴交于点 G ，当 $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP}$ 时，求 $\frac{DG}{GP}$ 的值．

【答案】 (1) $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$;

$$(2) y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3};$$

$$(3) \frac{4}{5}$$

【解析】

【分析】本题综合考查二次函数图象与几何性质，涉及一元二次方程解法、等腰三角形判定、三角形面积转化、相似三角形判定与性质等，融合代数运算与几何推理.

(1) 令 $y=0$ ，得 $ax^2+2ax-3a=0$ ，消去 a 因式分解得 $(x+3)(x-1)=0$ ，结合点 A 在 B 左侧，得 $A(-3,0)$ 、 $B(1,0)$ ；

(2) 将抛物线化为顶点式得对称轴 $x=-1$ ，令 $x=0$ 得 $C(0,-3a)$ ， E 与 C 关于 $x=-1$ 对称，故 $E(-2,-3a)$ ，由 $EC \parallel x$ 轴得 $\angle ECA = \angle CAO$ ，又 AC 平分 $\angle EAO$ ，故 $\angle EAC = \angle ECA$ ，即 $AE = EC$ ，用勾股定理列出方程求 a 即可；

(3) 由 $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP}$ ，得 $S_{\triangle APD} = S_{\triangle APC}$ ，因两三角形共边 AP ，故 $CD \parallel AP$ ，求得直线 AP 方程 $y = ax + 3a$ ，联立抛物线方程解得 $P(2, 5a)$ ，过 D 、 P 作 x 轴垂线得 $DM \parallel PN$ ， $\triangle DMG \sim \triangle PNG$ ，由相似比得

$$\frac{DG}{GP} = \frac{DM}{PN}.$$

【小问 1 详解】

解：令 $y=0$ ，则 $ax^2+2ax-3a=0$ ，

$\because a \neq 0$ ，两边除以 a 得 $x^2+2x-3=0$ ，

因式分解得 $(x+3)(x-1)=0$ ，

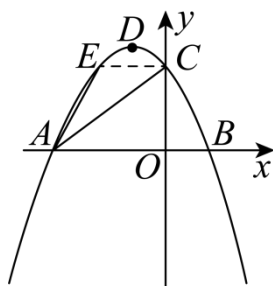
解得 $x=-3$ 或 $x=1$ ，

$\because$ 点 A 在点 B 左侧，

$\therefore A(-3,0)$ ， $B(1,0)$ ；

【小问 2 详解】

解：如图，连接 CE 。



$$\because y = ax^2 + 2ax - 3a = a(x+1)^2 - 4a,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x = -1$,

令 $x = 0$, 得 $y = -3a$, 故 $C(0, -3a)$,

$\therefore$ 点 E 与 C 关于 $x = -1$ 对称,

$\therefore E(-2, -3a)$,

$\therefore EC^2 = 4$, $AE^2 = (-2+3)^2 + (-3a-0)^2 = 1+9a^2$.

$\therefore EC \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle ECA = \angle CAO$.

$\therefore AC$ 平分 $\angle EAO$,

$\therefore \angle EAC = \angle CAO$,

$\therefore \angle EAC = \angle ECA$,

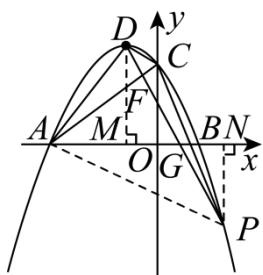
$\therefore AE = EC$,

$\therefore 1+9a^2 = 4$, 解得 $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍去正值),

故抛物线的表达式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$;

【小问 3 详解】

解: 由 (1) (2) 知 $A(-3, 0)$, $D(-1, -4a)$, $C(0, -3a)$, 如图, 过点 D 作 $DM \perp x$ 轴, 过点 P 作 $PN \perp x$ 轴, 连接 AP .



设直线 CD 的方程为 $y = kx - 3a$,

将 $D(-1, -4a)$ 代入得: $-4a = -k - 3a$, 解得 $k = a$.

$\therefore S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFP}$,

$\therefore S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AFP} = S_{\triangle CFP} + S_{\triangle AFP}$, 即 $S_{\triangle APD} = S_{\triangle APC}$,

$\therefore \triangle APD$ 与 $\triangle APC$ 有公共边 AP ，面积相等，

$\therefore$ 点 D 、 C 到直线 AP 的距离相等，故 $CD \parallel AP$ ，

设直线 AP 的方程为 $y = ax + n$ ，

将 $A(-3, 0)$ 代入得： $0 = -3a + n$ ，解得 $n = 3a$ ，

所以直线 AP 的方程为 $y = ax + 3a$ 。

$$\text{联立} \begin{cases} y = ax^2 + 2ax - 3a \\ y = ax + 3a \end{cases}, \text{ 得 } ax^2 + 2ax - 3a = a(x + 3),$$

整理得 $x^2 + x - 6 = 0$ ，解得 $x = -3$ (对应点 A) 或 $x = 2$ ，

将 $x = 2$ 代入 $y = ax + 3a$ 得 $y = 5a$ ，故 $P(2, 5a)$ ，

$\therefore DM \perp x$ 轴， $PN \perp x$ 轴，

$\therefore DM \parallel PN$ ，

$\therefore \triangle DMG \sim \triangle PNG$ ，

$$\therefore \frac{DG}{GP} = \frac{DM}{PN} = \frac{-4a}{-5a} = \frac{4}{5}.$$

【点睛】 本题核心是数形结合与转化思想，(1) 侧重函数与方程转化，(2) 巧用角与线段关系转化，(3) 通过面积转化推导平行关系，最终利用相似求比值，需注意 $a < 0$ 的符号细节。

25. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $\tan B = \frac{3}{4}$ ，点 E 是 AB 边上的一点，将 $\triangle ABC$ 沿着过点 E 的直线翻折，点 A 落在 BC 边上，记作点 D ，折痕所在的直线与射线 AC 交于点 F ，过点 D 作 $DG \perp BC$ ，交射线 BA 于点 G 。

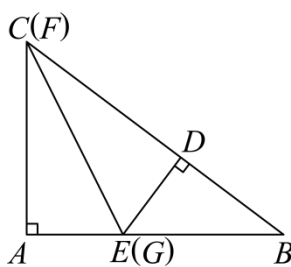


图1

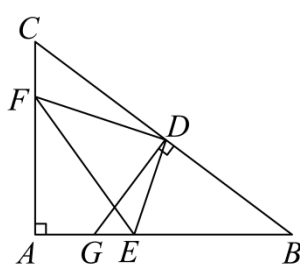
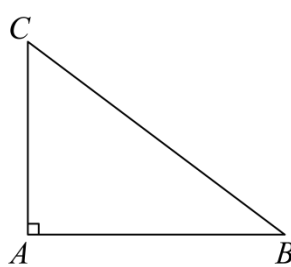


图2



备用图

(1) 如图 1，当点 F 和点 C 重合时，求 AE 的长；

(2) 如图 2，当点 F 在边 AC 上时，设 $BD = x$ ， $\tan \angle AFE = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域；

(3) 延长 DG ，交 CA 的延长线于点 H ，当 $\triangle DFH$ 是以 DH 为腰的等腰三角形时，求 EG 的长。

【答案】 (1) 3

$$(2) y = \frac{3x}{4(10-x)}, \text{ 定义域为 } 4 \leq x \leq 8$$

$$(3) \frac{14}{13} \text{ 或 } \frac{10-2\sqrt{10}}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 首先在 $Rt\triangle ABC$ 中, 由 $\angle A = 90^\circ$ 、 $AB = 8$ 和 $\tan B = \frac{3}{4}$, 根据三角函数定义得 $AC = \frac{3}{4}AB = 6$, 再通过勾股定理算出 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$. 因 $\triangle ABC$ 沿 CE 翻折后 A 与 D 重合, 利用翻折性质可得 $AC = DC = 6$ 、 $AE = DE$ 、 $\angle CDE = 90^\circ$, 进而推出 $\angle EDB = 90^\circ$ 且 $BD = BC - DC = 4$. 设 $AE = x$, 则 $DE = x$ 、 $EB = 8 - x$, 在 $Rt\triangle DEB$ 中, 由勾股定理列方程 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$, 求解得 $x = 3$, 即 $AE = 3$;

(2) 由翻折性质得 $AE = DE$ 、 $AF = DF$ 、 $\angle EDF = 90^\circ$, 结合 $DG \perp BC$ 得 $\angle GDB = 90^\circ$, 通过“同角的余角相等”推出 $\angle DGB = \angle C$; 再由角的和差关系得 $\angle CDF = \angle EDG$, 进而判定 $\triangle DGE \sim \triangle DCF$, 得到 $\frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DC}$. 在 $Rt\triangle BDG$ 中, 由 $\tan B = \frac{3}{4}$ 和 $BD = x$ 得 $DG = \frac{3x}{4}$, 又 $DC = 10 - x$, 而 $\tan \angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF}$, 故 $y = \frac{DG}{DC} = \frac{3x}{4(10-x)}$. 结合 F 在 AC 上的边界条件, 当 F 与 C 重合时 $x = 4$, 当 E 与 B 重合时 $x = 8$, 确定定义域为 $4 \leq x \leq 8$;

(3) 设 $BD = x$, 先由 $\triangle ABC \sim \triangle GDB$, 根据相似得 $DG = \frac{3x}{4}$ 、 $BG = \frac{5x}{4}$, 再分两种情况讨论等腰 $\triangle DFH$:

①当 F 在 AC 延长线上时, 因 $\angle FDH > 90^\circ$, 故 $DH = DF$, 通过角的等量代换得 $\angle DEB = \angle B$, 即 $DE = BD$, 作 $EK \perp BC$ 得 $BK = \frac{4}{5}x$, 结合 $BK = \frac{1}{2}(8 - x)$ 列方程解得 $x = \frac{40}{13}$, 进而 $EG = 8 - x - \frac{5x}{4} = \frac{14}{13}$;

②当 F 在线段 AC 上时, 因 $\angle HFD > \angle H$, 故 $DH = FH$, 通过角的转化得 $\angle BED = \angle BDE$, 即 $BD = BE$, 由勾股定理得 $AE = DE = \frac{\sqrt{10}}{5}x$, 结合 $AB = AE + BE = 8$ 列方程解得 $x = \frac{40 - 8\sqrt{10}}{3}$, 进而 $EG = \frac{5x}{4} - x = \frac{10 - 2\sqrt{10}}{3}$.

【小问 1 详解】

解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 8$, $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore AC = \frac{3}{4}AB = 6,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10.$$

$\therefore \triangle CAE$ 沿着 CE 折叠得到 $\triangle CDE$,

$\therefore AE = DE, AC = DC = 6, \angle CDE = \angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle EDB = 90^\circ, BD = BC - DC = 10 - 6 = 4$.

设 $AE = x$, 则 $DE = x, EB = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中, 由勾股定理得 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$, 解得 $x = 3$, 故 $AE = 3$;

【小问 2 详解】

解: 由翻折性质知 $AE = DE, AF = DF, \angle EDF = \angle A = 90^\circ$.

$\because DG \perp BC, \therefore \angle GDB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DGB + \angle B = 90^\circ, \angle C + \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle DGB = \angle C$.

$\because \angle EDF = \angle EDG + \angle FDG = 90^\circ, \angle CDG = \angle CDF + \angle FDG = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDF = \angle EDG$.

$\therefore \triangle DGE \sim \triangle DCF$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DC}.$$

在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, $\tan B = \frac{3}{4}, BD = x$,

$$\therefore DG = BD \cdot \tan B = \frac{3x}{4},$$

$$\text{又 } DC = BC - BD = 10 - x, y = \tan \angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DC},$$

$$\therefore y = \frac{DG}{DC} = \frac{\frac{3x}{4}}{10 - x} = \frac{3x}{4(10 - x)}.$$

当点 F 在 AC 上时, 由 (1), 当 F 与 C 重合时 $DB = 4, \therefore x \geq 4$,

当点 E 与点 B 重合时, $BD = AB = 8, \therefore x \leq 8$,

$\therefore$ 定义域是 $4 \leq x \leq 8$.

综上, y 关于 x 的函数解析式是 $y = \frac{3x}{4(10 - x)}$, 定义域是 $4 \leq x \leq 8$.

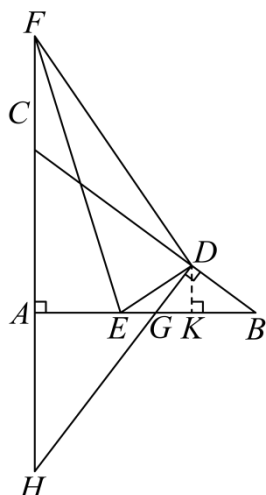
【小问 3 详解】

设 $BD = x$, 易得 $\triangle ABC \sim \triangle DBG$,

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BG} = \frac{AC}{GD}, \text{ 即 } \frac{6}{GD} = \frac{10}{GB} = \frac{8}{x},$$

$$\therefore DG = \frac{3x}{4}, \quad BG = \frac{5x}{4}.$$

①如图，点 F 在 AC 的延长线上时，



$$\because \angle FDH > \angle FDE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 只能 $DH = DF$ ，此时 $\angle H = \angle CFD$ 。

同 (2) 得到 $\angle DGB = \angle ACB$ ， $\angle CDF = \angle EDG$ ，

$$\therefore \angle DGB - \angle EDG = \angle ACB - \angle CDF, \text{ 即 } \angle DEB = \angle CFD.$$

又 $\because \angle H = \angle B$ ，

$$\therefore \angle DEB = \angle B,$$

$\therefore DE = BD = x$ ， $\triangle BED$ 是等腰三角形，

$$\therefore BK = EK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}(8-x).$$

在 $\triangle BED$ 中作 $DK \perp BC$ 于 K ，则 $DK \parallel AC$ ，

$$\therefore \frac{BK}{AB} = \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } \frac{BK}{8} = \frac{BD}{10},$$

$$\therefore BK = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}x,$$

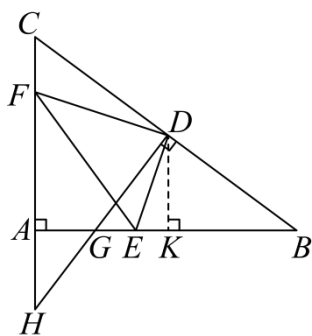
$$\text{解方程 } \frac{4}{5}x = \frac{1}{2}(8-x), \text{ 得 } x = \frac{40}{13}.$$

$$\text{当 } x = \frac{40}{13}, \quad EG = BE - BG = 8 - x - \frac{5x}{4} = \frac{14}{13};$$

②如图，点 F 在线段 AC 上时，

$$\because \angle HFD = \angle C + \angle CDF > \angle H,$$

$\therefore$ 只能 $DH = FH$ ，此时 $\angle HFD = \angle HDF$ ，



$$\because \angle CDF = \angle EDG, \quad \angle CDH = \angle BDH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDH - \angle CDF = \angle BDH - \angle EDG, \text{ 即 } \angle HDF = \angle EDB,$$

$$\therefore \angle HFD = \angle HDF = \angle EDB.$$

$$\because \angle DEB = \angle GDE + \angle DGB, \quad \angle DGB = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CDF + \angle ACB = \angle HFD,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BDE, \quad BD = BE.$$

$$\because BK = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}x, \quad DK = \frac{3}{5}BD = \frac{3}{5}x,$$

$$\therefore EK = BE - BK = \frac{1}{5}x,$$

$$\therefore AE = DE = \sqrt{EK^2 + DK^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}x,$$

$$\because AB = AE + BE = 8,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{10}}{5}x + x = 8, \text{ 解得 } x = \frac{40 - 8\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore EG = BG - BE = \frac{5}{4}x - x = \frac{1}{4}x = \frac{10 - 2\sqrt{10}}{3}.$$

【点睛】 本题以直角三角形翻折为背景，主要考查直角三角形的性质、翻折的性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的分类讨论，以及函数解析式的构建与定义域求解，重点考查几何图形中边与角的等量转化能力和分类讨论思想的应用。