

上海市宝山区 2025-2026 学年九年级上学期 1 月期末数学试题

考生注意：

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上. 】

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\cos A$ 等于 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】首先运用勾股定理求出斜边的长度, 再利用锐角三角函数的定义求解.

【详解】解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$,

$\therefore AB = 5$.

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}.$$

故选 C.

【点睛】本题主要考查了锐角三角函数的定义: 在直角三角形中, 锐角的余弦为邻边比斜边.

2. 如图, 用放大镜观察一个三角形, 下列说法错误的是 ()



- A. 三角形各角的度数扩大 B. 三角形的各边的长度扩大
C. 三角形的周长扩大 D. 三角形的面积扩大

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了图形的放大, 三角形放大时, 各角的度数不变, 各边的长度变大, 则周长和面积

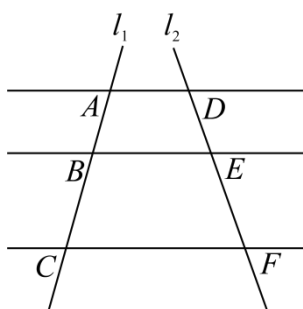
也变大，据此可得答案.

【详解】解：用放大镜观察一个三角形，看到的三角形的各边的长度扩大，各角的度数不变，则三角形的周长扩大，面积也扩大，

∴只有 A 选项的说法错误，

故选：A.

3. 如图， $AD \parallel BE \parallel CF$ ，直线 l_1 、 l_2 与这三条平行线分别交于点 A 、 B 、 C 和点 D 、 E 、 F ，则下列结论不正确的是（ ）



- A. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ B. $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$ C. $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ D. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查平行线分线段成比例，熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题的关键.
直接利用平行线分线段成比例定理得出结论.

【详解】解：∵ $AD \parallel BE \parallel CF$ ，
∴ $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ ， $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ，
∴ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ，

故 A、C、D 正确，不符合题意；

而 B 选项结论不能证明，故错误，符合题意，

故选：B.

4. 下列关于向量的说法中，正确的是（ ）

- A. 如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $k = 0$ B. 如果 $\vec{a} = -3\vec{b}$ （ $\vec{b}$ 为非零向量），那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $\vec{e} = 1$ D. 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互为相反向量，那么 $\vec{a} + \vec{b} = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查向量的基本概念，包括零向量、单位向量、平行向量和相反向量，若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则 k 可为任意数，据此可判断 A；根据平行向量的定义可判断 B；单位向量的模为 1，据此可判断 C；根据相反向量的定义可判断 D.

【详解】解：A、若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则 k 可为任意数，不一定有 $k = 0$ ，原说法错误，不符合题意；

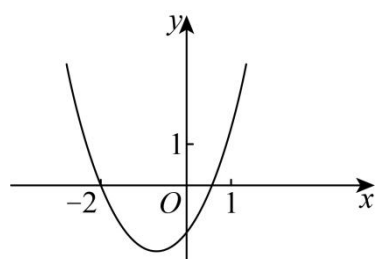
B、如果 $\vec{a} = -3\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量)，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，原说法正确，符合题意；

C、如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $|\vec{e}| = 1$ ，原说法错误，不符合题意；

D、如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互为相反向量，那么 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ，原说法错误，不符合题意；

故选：B.

5. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示，那么下列各式中，成立的是 ()



- A. $a < 0$ B. $b < 0$ C. $a + b + c < 0$ D. $a - b + c < 0$.

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象与系数的关系及根据二次函数的图象判断式子符号，根据对称轴和函数图像判断 a 、 b 、 c 的符号是解题的关键.

由抛物线的开口方向判断 a 的符号，由 a 的符号结合对称轴判断 b 的符号，由图可知，当 $x = 1$ 时， $y > 0$ ，即可判断 $a + b + c$ 的符号，当 $x = -1$ 时， $y < 0$ ，即可判断 $a - b + c$ 的符号.

【详解】解：A、 $\because$ 抛物线开口向上，

$\therefore a > 0$ ，

$\therefore$ A 错误，该选项不符合题意；

B、 $\because a > 0$ ，对称轴位于 y 轴左侧，

$\therefore b > 0$ ，

$\therefore$ B 错误，该选项不符合题意；

C、 $\because$ 由图可知，当 $x = 1$ 时， $y > 0$ ，

$$\therefore a+b+c>0,$$

$\therefore$ C 错误，该选项不符合题意；

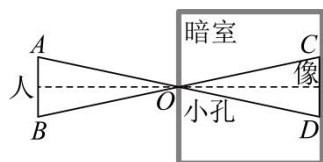
D、 $\therefore$ 由图可知，当 $x=-1$ 时， $y<0$ ，

$$\therefore a-b+c<0,$$

$\therefore$ D 正确，该选项符合题意.

故选：D.

6. 我国古书《墨经》中记载了世界上最早的“小孔成像”的现象. 墨子曾进行如下实验：在暗室的墙上开一个小孔，一人立于墙前，当阳光照射时，屋内对面墙壁上会呈现一个倒立的人像. 已知初始状态下，小孔 O 到人 AB 的距离、小孔 O 到所成像 CD 的距离均为 6 米，要使像 CD 的长度变为原来的 1.5 倍，下列操作正确的是（ ）



A. 人向暗室后退 2 米

B. 人向暗室前进 2 米

C. 人向暗室后退 4 米

D. 人向暗室前进 4 米

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的应用，根据题意可得 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，则可得到小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= AB:CD$ ，可求出操作前 $AB:CD=1:1$ ，操作后小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= AB:CD=2:3$ ，据此逐一判断即可.

【详解】解：由题意得， $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，

$\therefore$ 小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= AB:CD$ ，

$\therefore$ 操作前小孔 O 到人 AB 的距离、小孔 O 到所成像 CD 的距离均为 6 米，

$\therefore$ 操作前 $AB:CD=1:1$ ；

$\therefore$ 操作后像 CD 的长度变为原来的 1.5 倍，

$\therefore$ 操作后小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= AB:CD=1:1.5=2:3$ ，

当人向暗室后退 2 米时，小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= (6+2):6=4:3$ ，不满足题意，故 A 不符合题意；

当人向暗室前进 2 米时，小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= (6-2):6=2:3$ ，满足题

意，故 B 符合题意；

当人向暗室后退 4 米时，小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= (6+4):6 = 5:3$ ，不满足题意，故 C 不符合题意；

当人向暗室前进 4 米时，小孔 O 到人 AB 的距离：小孔 O 到所成像 CD 的距离 $= (6-4):6 = 1:3$ ，不满足题意，故 D 不符合题意；

故选：B.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上，超出答题区域书写的答案无效】

7. 计算： $2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3\vec{b} =$ _____.

【答案】 $2\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的线性运算，需先运用数乘的分配律去括号，再合并同类向量.

【详解】 解： 原式 $= 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3\vec{b} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-4\vec{b} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} - \vec{b}$.

故答案为： $2\vec{a} - \vec{b}$.

8. 如果 $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ 那么 $\frac{x+y}{y} =$ _____

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】 直接用同一未知数表示出 x , y 的值，进而得出答案.

【详解】 解： $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$,

$\therefore$ 设 $x=3a$, 则 $y=5a$, ($a \neq 0$)

那么 $\frac{x+y}{y} = \frac{3a+5a}{5a} = \frac{8}{5}$

故答案为： $\frac{8}{5}$.

【点睛】 此题主要考查了比例式的性质，正确用同一未知数表示各数是解题关键.

9. 已知抛物线 $y = (m-1)x^2 + 3x - 1$ 开口向下，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象性质，抛物线的开口方向由二次项系数决定：当二次项系数大于 0 时，抛物线开口向上；当二次项系数小于 0 时，抛物线开口向下.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = (m-1)x^2 + 3x - 1$ 开口向下，

$\therefore$ 二次项系数 $m-1 < 0$ ，解得 $m < 1$ ，

故答案为： $m < 1$.

10. 已知线段 $a = 3, b = 5$ ，如果线段 c 是线段 a 和 b 的比例中项，那么线段 c 的长为_____.

【答案】 $\sqrt{15}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了成比例线段，根据比例中项的定义得到 $c^2 = ab$ ，代入已知值计算即可.

【详解】 解： $\because$ 线段 c 是线段 a 和 b 的比例中项，

$\therefore c^2 = a \cdot b = 3 \times 5 = 15$ ，

解得 $c = \sqrt{15}$ 或 $c = -\sqrt{15}$ （舍去）.

故答案为： $\sqrt{15}$.

11. 如果 $A(-1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ 是抛物线 $y = (x-1)^2 + 1$ 图像上的两点，那么 y_1 _____ y_2 .（填“>”、“<”或“=”）

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的性质，抛物线 $y = (x-1)^2 + 1$ 开口向上，对称轴为 $x = 1$ ，抛物线上的点到对称轴的距离越远，对应的函数值越大.

【详解】 解：点 $A(-1, y_1)$ 到对称轴 $x = 1$ 的距离为 $|-1-1| = 2$ ，点 $B(2, y_2)$ 到对称轴 $x = 1$ 的距离为 $|2-1| = 1$.

$\because$ 抛物线开口向上，且 $2 > 1$ ，

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为：>.

12. 已知线段 MN 的长为 4，点 P 是线段 MN 的黄金分割点，那么较长线段 MP 的长是_____.

【答案】 $2\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的概念得到 $MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN$ ，把 $MN = 4$ 代入计算即可.

【详解】 解： $\because$ 线段 MN 的长为 4，点 P 是线段 MN 的黄金分割点， $MP > NP$ ，

$$\therefore MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5}-2,$$

故答案为： $2\sqrt{5}-2$.

【点睛】 本题考查了黄金分割的概念，理解黄金分割点的概念是解题的关键.

13. 如图，某滑雪爱好者沿着坡比为 1:2.4 的斜坡笔直滑下 52 米，那么他下降的高度是_____米.



【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用中的坡度坡比问题，坡比即为斜坡倾角的正切值($\tan\theta$)，结合勾股定理或直角三角形三边比例即可求解.

【详解】 解： 设斜坡的倾角为 θ ，则 $\tan\theta = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$ ，

在直角三角形中，设垂直高度 $h = 5k$ ，水平距离为 $12k(k > 0)$ ，

由勾股定理得斜边为 $\sqrt{(5k)^2 + (12k)^2} = 13k$ ，

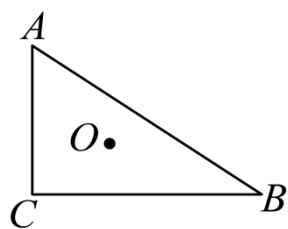
$$\therefore \sin\theta = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}.$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{h}{52},$$

$$\therefore h = 52 \times \frac{5}{13} = 20$$

故答案为： 20 .

14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，如果 $AB = 10$ ，那么点 C 与点 O 的距离为_____.



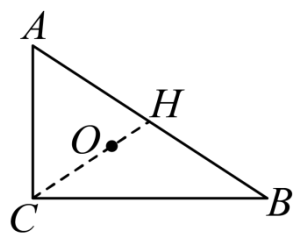
【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形重心的性质，直角三角形斜边中线的性质，解题的关键是掌握三角形的重心的定义及性质.

连接 CO 并延长交 AB 于点 H ，根据重心得 H 为 AB 中点， $CO = 2OH$ ，再由直角三角形斜边中线的性质得到 $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ，即可求解.

【详解】 解：如图，连接 CO 并延长交 AB 于点 H ，



$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore H$ 为 AB 中点， $CO = 2OH$ ，

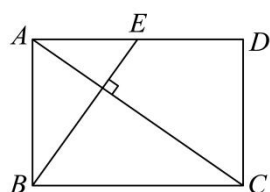
$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore CH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ，

$\therefore CO = \frac{2}{3}CH = \frac{10}{3}$ ，

故答案为： $\frac{10}{3}$.

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2\sqrt{2}$ ， E 是边 AD 的中点，连接 BE ， AC ，如果 $BE \perp AC$ ，那么 BE 的长为_____.

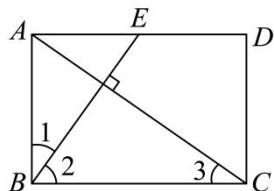


【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定及性质、勾股定理等，证明 $\triangle EAB \sim \triangle ABC$ ，可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ，据此即可求得答案.

【详解】 解：根据题意可知 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ， $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$ ， $\angle EAB = \angle ABC = 90^\circ$ ，



设 $BC = 2x$ ，则 $AE = x$ ．

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$$\therefore \triangle EAB \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

$$\therefore 2x^2 = AB^2.$$

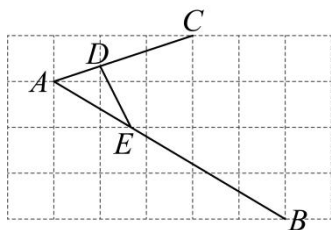
$$\therefore x = 2.$$

$$\therefore AE = 2.$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 2\sqrt{3}.$$

故答案为： $2\sqrt{3}$.

16. 如图所示的正方形网格中，每个小正方形的边长均为 1，点 A 、 B 、 C 都在网格小正方形的顶点上. D 、 E 是线段 AC 、 AB 与小正方形边的交点. 那么 DE 的长为_____.



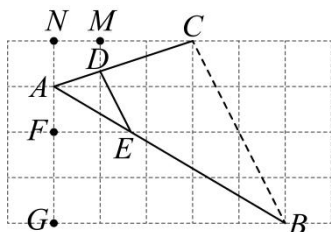
【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，平行线分线段成比例，相似三角形的判定与性质，解题的关键是掌握相关知识. 连接 BC ，在格点上取 F 、 G 、 M 、 N ，使得 $DM \parallel AN$ ， $EF \parallel BG$ ，得到 $\frac{AD}{CD} = \frac{MN}{CM} = \frac{1}{2}$ ，

$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{GF} = \frac{1}{2}$, 推出 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$, 证明 $\triangle DAE \sim \triangle CAB$, 得到 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, 根据勾股定理求出 BC , 即可求解.

【详解】解: 如图, 连接 BC , 在格点取 F 、 G 、 M 、 N , 使得 $DM \parallel AN$, $EF \parallel BG$,



由图可知 $MN=1$, $CM=2$, $AF=1$, $FG=2$,

$\because DM \parallel AN$, $EF \parallel BG$,

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{MN}{CM} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{GF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3},$$

$\therefore \angle DAE = \angle CAB$,

$\therefore \triangle DAE \sim \triangle CAB$,

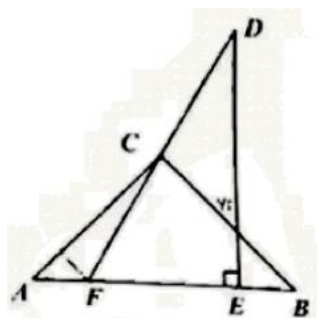
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\because BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}BC = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

17. 将一副直角三角板如图放置, 已知 $\angle ACB = \angle DEF = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, $AB = DE$, 点 C 在边 DF 上, 点 E , F 在边 AB 上, 如果 $EF = 2$, 那么 AF 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，解 $\text{Rt}\triangle DEF$ 可得 $AB = DE = 2\sqrt{3}$ ，解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 得到 $AC = \sqrt{6}$ ，解 $\text{Rt}\triangle ACH$ 得到 AH ， CH 的长，再解 $\text{Rt}\triangle CHF$ 求出 HF 的长即可得到答案.

【详解】 解：如图所示，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DEF \text{ 中, } DE = \frac{EF}{\tan D} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = DE = 2\sqrt{3};$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = AB \cdot \cos A = 2\sqrt{3} \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACH \text{ 中, } CH = AC \cdot \sin A = \sqrt{6} \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3},$$

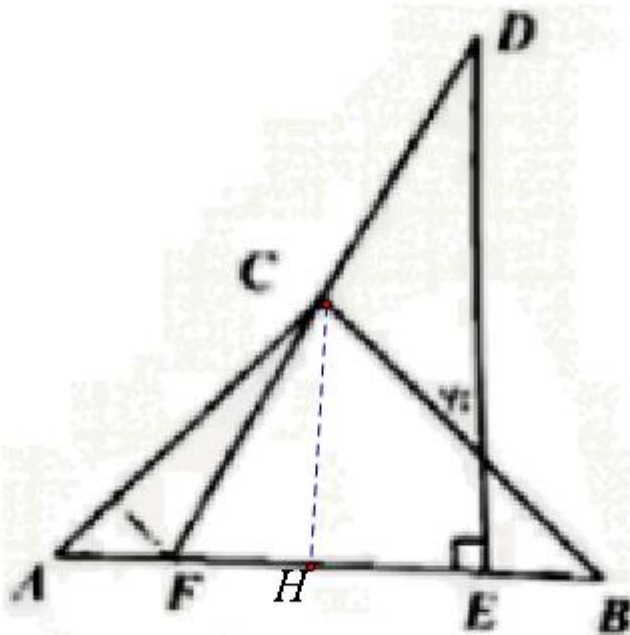
$$AH = AC \cdot \cos A = \sqrt{6} \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3};$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CHF \text{ 中, } \angle CFH = 90^\circ - \angle D = 60^\circ,$$

$$\therefore FH = \frac{CH}{\tan \angle CFH} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1,$$

$$\therefore AF = AH - HF = \sqrt{3} - 1,$$

故答案为： $\sqrt{3}-1$.



18. 定义：有两个内角的差为 90° 的三角形叫做“差直角三角形”，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B > 90^\circ$ ， $\tan C = \frac{3}{4}$ ， $BC = 4$ ，如果 $\triangle ABC$ 是“差直角三角形”，那么 AB 的长为_____.

【答案】 $\frac{60}{7}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

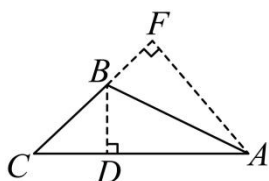
【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形，熟练掌握新定义是解题的关键．分 $\angle B - \angle A = 90^\circ$ 和 $\angle B - \angle C = 90^\circ$ 两种情况进行讨论求解即可．

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 是“差直角三角形”，且 $\angle B > 90^\circ$ ，

$\therefore \angle B - \angle A = 90^\circ$ 或 $\angle B - \angle C = 90^\circ$ ，

①当 $\angle CBA - \angle BAC = 90^\circ$ 时，则 $\angle ABC = \angle BAC + 90^\circ$ ，过点 A 作 $AF \perp CB$ 交 CB 的延长线于点 F ，作 $BD \perp AC$ 于点 D ，



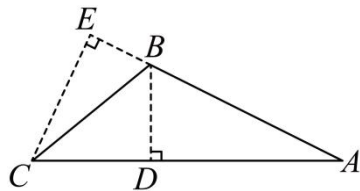
$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle BAC + 90^\circ + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle C + 2\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
&\because AF \perp BC, \\
&\therefore \angle C + \angle CAF = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CAF = 2\angle BAC, \\
&\therefore \angle BAD = \angle BAF, \\
&\therefore AB \text{ 平分 } \angle CAF, \\
&\because BD \perp AC, AF \perp CF, \\
&\therefore BD = BF, \\
&\text{又 } \because AB = AB, \\
&\therefore \triangle ABD \cong \triangle AFB \text{ (直角三角形全等的判定定理)}, \\
&\therefore AD = AF, \\
&\because \tan C = \frac{BD}{CD} = \frac{AF}{CF} = \frac{3}{4}, \\
&\therefore \text{设 } BD = BF = 3x, \quad CD = 4x, \\
&\therefore BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 5x = 4, \\
&\therefore x = \frac{4}{5}, \\
&\therefore BD = BF = \frac{12}{5}, \quad CD = \frac{16}{5} \\
&\therefore CF = BC + BF = \frac{32}{5}, \\
&\therefore AF = \frac{24}{5}, \\
&\therefore AD = AF = \frac{24}{5}, \\
&\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5};
\end{aligned}$$

当 $\angle ABC - \angle ACB = 90^\circ$ 时, 如图, 作 $BD \perp AC, CE \perp AB$,



$$\begin{aligned}
&\text{同理, } \angle DCB = \angle ECB, \quad BD = BE = \frac{12}{5}, \quad CE = CD = \frac{16}{5}, \\
&\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot CE,
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{12}{5}AC = \frac{16}{5}AB,$$

$$\therefore AC = \frac{4}{3}AB,$$

$$\text{设 } AB = a, \text{ 则 } AD = AC - CD = \frac{4}{3}a - \frac{16}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, 由勾股定理, 得 $BD^2 + AD^2 = AB^2$,

$$\therefore \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}a - \frac{16}{5}\right)^2 = a^2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{12}{5} \text{ (舍去) 或 } a = \frac{60}{7};$$

$$\text{故 } AB = \frac{60}{7};$$

$$\text{综上: } AB = \frac{60}{7} \text{ 或 } \frac{12\sqrt{5}}{5};$$

$$\text{故答案为: } \frac{60}{7} \text{ 或 } \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } |\cos 60^\circ - \tan 60^\circ| - \frac{4 \sin 30^\circ}{3 \tan 30^\circ - \cot 45^\circ}.$$

【答案】

$$-\frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了绝对值的性质和特殊角的三角函数值, 解题的关键是熟练掌握绝对值的性质和特殊角的三角函数值. 先牢记特殊角的三角函数值代入表达式, 再按“绝对值化简分母有理化整式加减运算”的顺序逐步计算, 最终得出结果.

$$\text{【详解】 解: } |\cos 60^\circ - \tan 60^\circ| - \frac{4 \sin 30^\circ}{3 \tan 30^\circ - \cot 45^\circ}$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \sqrt{3} \right| - \frac{4 \times \frac{1}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\
&= \sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \\
&= \sqrt{3} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} - 1 \\
&= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

20. 将抛物线 $y = -x^2$ 平移，使平移后的抛物线经过点 $A(0, -10)$ ， $B(8, -10)$ 。

(1) 求平移后的抛物线的表达式；

(2) 说明由抛物线 $y = -x^2$ 如何平移得到新抛物线。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 8x - 10$

(2) 向右平移 4 个单位，向上平移 6 个单位

【解析】

【分析】 本题考查了用待定系数法求二次函数解析式及二次函数图象的平移，利用抛物线平移后二次项系数不变设出表达式及准确掌握平移方法是解题的关键。

(1) 根据抛物线平移后二次项系数不变的性质，设平移后的表达式为 $y = -x^2 + bx + c$ ，代入点 $A(0, -10)$ ， $B(8, -10)$ ，通过待定系数法求出未知系数，即可得到平移后的抛物线解析式；

(2) 将平移后的抛物线解析式化为顶点式，对比原抛物线与新抛物线的顶点坐标，根据顶点坐标的变化确定平移的方向与距离即可。

【小问 1 详解】

解：设平移后的抛物线的表达式为 $y = -x^2 + bx + c$ ，把点 $A(0, -10)$ ， $B(8, -10)$ 代入解析式得

$$\begin{cases} c = -10 \\ -8^2 + 8b + c = -10 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 8 \\ c = -10 \end{cases}$$

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式 $y = -x^2 + 8x - 10$ ；

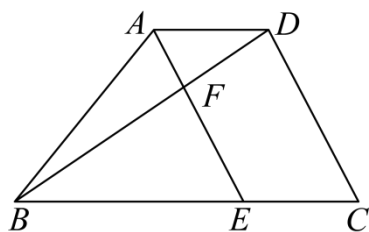
【小问 2 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2$ 顶点为 $(0, 0)$

平移后的抛物线的表达式 $y = -x^2 + 8x - 10 = -(x - 4)^2 + 6$, 顶点为 $(4, 6)$,

$\therefore$ 平移方式为: 向右平移 4 个单位, 向上平移 6 个单位.

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 3$, $BC = 9$, 连接 BD , 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 、 BD 于点 E 、 F .



(1) 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{AB}$;

(2) 已知 $\angle BDC = 90^\circ$, $\cos C = \frac{2}{3}$, 求 $\tan \angle ABD$ 的值.

【答案】(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了向量的线性运算, 解直角三角形, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理等知识点.

(1) 先表示出 $\overrightarrow{AD}$, 再由四边形法则求解即可;

(2) 先解 $\text{Rt}\triangle BDC$ 求出 CD, BD , 然后证明四边形 $ADCE$ 为平行四边形, 再由 $\triangle ADF \sim \triangle EBF$ 求出 AF, BF , 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because AD \parallel BC$, $AD = 3$, $BC = 9$,

$\therefore BC = 3AD$,

$\therefore \overrightarrow{BC} = \vec{a}$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{a}$,

$\therefore \overrightarrow{DC} = \vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$;

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \angle BDC = 90^\circ, \quad \cos C = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CD = BC \cos C = 9 \times \frac{2}{3} = 6,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\because AE \parallel CD, \quad \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ$$

$$\because AD \parallel BC \quad AE \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = EC = 3, \quad AE = CD = 6,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 9 - 3 = 6$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{BF} = \frac{AD}{BE},$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{BF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AF = \frac{1}{3} AE = 2, \quad BF = \frac{2}{3} BD = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AF}{BF} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

22. 某辆自行车（图 1）放置地面（水平面）时，侧面示意图如图 2 所示，已知座椅 EF 、上管 AC 都平行于地面，下管 BC 的长为 50cm，后叉脚 AG 的长为 40cm，上下管的夹角 $\angle ACB$ 为 53° ，座管 AB 与上管 AC 的夹角 $\angle CAB$ 为 64° 、与后叉脚 AG 的夹角 $\angle BAG$ 为 56° ，车座顶端 D 到牙盘中心 B 的距离 DB 为 110cm，车轮半径均为 30cm。（参考数据： $\sin 53^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.60$ ， $\cot 53^\circ \approx 0.75$ ， $\sin 64^\circ \approx 0.90$ ， $\cos 64^\circ \approx 0.44$ ， $\tan 64^\circ \approx 2.05$ ， $\sqrt{3} \approx 1.7$ ）



图1

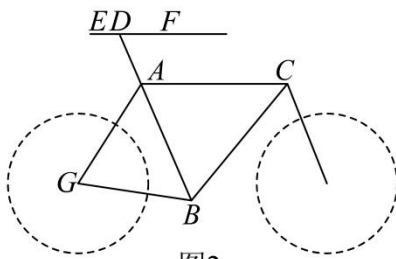


图2

- (1) 求座管 AB 的长: (精确到 0.1cm)
- (2) 求座椅 EF 到地面的距离. (精确到 1cm)

【答案】 (1) $AB = 44.4\text{cm}$

(2) 座椅 EF 到地面的距离为 123cm

【解析】

【分析】 本题主要考查解直角三角形的应用，解题的关键是理解题意构建直角三角形并熟练掌握三角函数的定义.

(1) 过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，先求出 BH ，再根据 $AB = \frac{BH}{\sin 64^\circ}$ 求解即可；

(2) 过点 G 作 $GM \parallel AC$ ，过点 A 作 $AN \perp GM$ 于点 N ，延长 NA 交 EF 于点 P ，得到 $GM \parallel AC \parallel EF$ ，且都平行于地面，推出 $AP \perp EF$ ， $\angle PDA = \angle CAB = 64^\circ$ ， $\angle GAC + \angle AGN = 180^\circ$ ，得到 $\angle AGN = 60^\circ$ ，求出 $AD = 65.6\text{cm}$ ，根据三角函数求出 AP 、 AN ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，

$\because \angle ACB = 53^\circ$ ， $BC = 50\text{cm}$ ，

$\therefore BH = BC \cdot \sin 53^\circ = 50 \times 0.8 = 40\text{cm}$ ，

$\because \angle CAB = 64^\circ$ ，

$\therefore AB = \frac{BH}{\sin 64^\circ} = \frac{40}{0.9} \approx 44.4\text{cm}$ ；

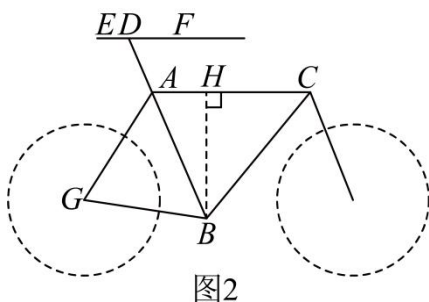


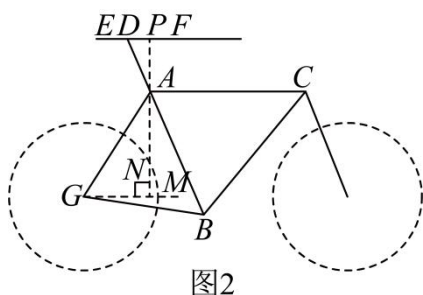
图2

【小问 2 详解】

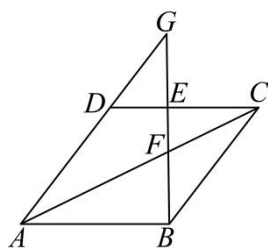
如图，过点 G 作 $GM \parallel AC$ ，过点 A 作 $AN \perp GM$ 于点 N ，延长 NA 交 EF 于点 P ，

$\because$ 座椅 EF 、上管 AC 都平行于地面，

$\therefore GM \parallel AC \parallel EF$ ，且都平行于地面，
 $\therefore AP \perp EF$ ， $\angle PDA = \angle CAB = 64^\circ$ ， $\angle GAC + \angle AGN = 180^\circ$ ，
 $\because BD = 110\text{cm}$ ， $AB = 44.4\text{cm}$ ，
 $\therefore AD = BD - AB = 110 - 44.4 = 65.6\text{cm}$ ，
 $\therefore AP = AD \cdot \sin 64^\circ = 65.6 \times 0.9 = 59.04\text{cm}$ ，
 $\because \angle CAB = 64^\circ$ ， $\angle BAG = 56^\circ$ ，
 $\therefore \angle GAC = \angle CAB + \angle BAG = 64^\circ + 56^\circ = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle AGN = 180^\circ - \angle GAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，
 $\because AG = 40\text{cm}$ ，
 $\therefore AN = AG \cdot \sin 60^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 34\text{cm}$ ，
 $\because$ 车轮半径均为 30cm ，
 $\therefore$ 座椅 EF 到地面的距离为 $AP + AN + 30 = 59.04 + 34 + 30 \approx 123\text{cm}$ 。



23. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， E 是 CD 上一点，联结 BE 并延长交 AD 的延长线于点 G ，交 AC 于点 F 。



(1) 求证： $BE \cdot BF = BG \cdot EF$ ；

(2) 若 E 是 CD 的中点，且 $AF \cdot CF = 2BF^2$ ，求证： $BE \perp CD$ 。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，三线合一一定理，熟知菱形的性质和相似三角形的性质与判定定理是解题的关键。

(1) 证明 $\triangle GAB \sim \triangle BCE$ 得到 $\frac{BE}{BG} = \frac{CE}{AB}$, 证明 $\triangle ABF \sim \triangle CEF$, 得到 $\frac{CE}{AB} = \frac{EF}{BF}$, 则可得到 $\frac{BE}{BG} = \frac{EF}{BF}$, 据此可证明结论;

(2) 连接 DF , 证明 $\triangle CFD \cong \triangle CFB$ (SAS), 得到 $DF = BF$, 由相似三角形的性质得到 $\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{CE} = 2$,

则 $AF = 2CF$, 则可证明 $CF = BF$, 即 $CF = DF$, 再由三线合一定理可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle BCD = \angle BAD$,

$\therefore \angle G = \angle EBC$,

$\therefore \triangle GAB \sim \triangle BCE$,

$\therefore \frac{BE}{BG} = \frac{CE}{AB}$;

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CEF$,

$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{EF}{BF}$,

$\therefore \frac{BE}{BG} = \frac{EF}{BF}$,

$\therefore BE \cdot BF = BG \cdot EF$;

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 连接 DF ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore \angle ACD = \angle ACB, AB = CD = BC$,

又 $\because CF = CF$,

$\therefore \triangle CFD \cong \triangle CFB$ (SAS),

$\therefore DF = BF$,

$\because E$ 是 CD 的中点,

$\therefore CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$,

由 (1) 得 $\triangle ABF \sim \triangle CEF$,

$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{AB}{CE} = 2$,

$$\therefore AF = 2CF,$$

$$\therefore AF \cdot CF = 2BF^2,$$

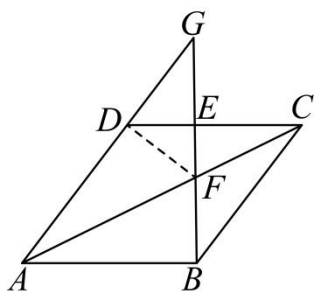
$$\therefore 2CF \cdot CF = 2BF^2,$$

$$\therefore CF = BF \text{ 或 } CF = -BF \text{ (舍去),}$$

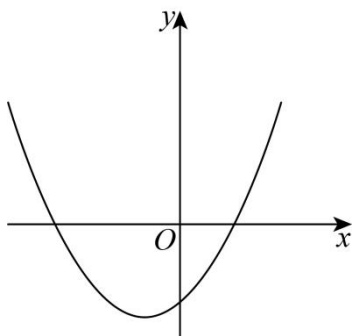
$$\therefore CF = DF,$$

又 $\because E$ 是 CD 的中点,

$$\therefore EF \perp CD, \text{ 即 } BE \perp CD.$$



24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 C_1 绕其顶点旋转 180° 后再适当平移得到抛物线 C_2 , 如果抛物线 C_2 经过抛物线 C_1 的顶点, 那么称抛物线 C_2 是抛物线 C_1 的“子抛物线”. 已知抛物线 $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$, 顶点为 D .



(1) 求抛物线 C_1 的表达式和点 D 的坐标;

(2) 如果抛物线 C_2 是 C_1 的“子抛物线”, 且 C_2 经过原点, 顶点为 E .

①求证: 抛物线 C_1 也是抛物线 C_2 的“子抛物线”;

②设直线 $x = k$ 与抛物线 C_1 、 C_2 分别交于点 M 、 N , 是否存在 k , 使得四边形 $DMEN$ 是平行四边形? 如果存在, 试求 k 的值; 如果不存在, 试说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$; $(-1, -3)$

(2) ①见解析; ② $k = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了求二次函数解析式，二次函数与平行四边形综合，二次函数的图象与性质，熟知二次函数的相关知识是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) ①抛物线绕其顶点旋转 180° 后所得的抛物线的顶点坐标与原抛物线的顶点坐标相同，但是开口方向与原抛物线相反，据此可设抛物线 C_2 的表达式为 $y = -\frac{1}{3}(x+1+m)^2 - 3+n$ ，再根据“子抛物线”的定义和抛物线 C_2 经过原点求出抛物线 C_2 的解析式，进而求出点 E 的坐标，再求出抛物线 C_2 绕其顶点旋转 180° 后所得的抛物线解析式，证明点 E 在抛物线 C_1 ，且抛物线 C_1 能由抛物线 C_2 绕其顶点旋转 180° 后所得的抛物线平移得到即可证明结论; ②根据平行四边形两条对角线的中点坐标相同列式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{3} \times 2^2 + 2b + c = 0 \\ \frac{1}{3} \times (-4)^2 - 4b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的表达式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 3$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-1, -3)$;

【小问 2 详解】

解: ①将抛物线 C_1 绕其顶点旋转 180° 后得到的抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{3}(x+1)^2 - 3$,

设抛物线 C_2 的表达式为 $y = -\frac{1}{3}(x+1+m)^2 - 3+n$

$\therefore$ 抛物线 C_2 是 C_1 的“子抛物线”，

∴ 抛物线 C_2 经过点 $(-1, -3)$,

又∵ 抛物线 C_2 经过原点,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{3}(0+1+m)^2 - 3 + n = 0 \\ -\frac{1}{3}(-1+1+m)^2 - 3 + n = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = -5 \\ n = \frac{25}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2 \text{ 的表达式为 } y = -\frac{1}{3}(x+1-5)^2 - 3 + \frac{25}{3} = -\frac{1}{3}(x-4)^2 + \frac{16}{3},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } \left(4, \frac{16}{3}\right), \text{ 抛物线 } C_2 \text{ 绕其顶点旋转 } 180^\circ \text{ 后得到的抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{3}(x-4)^2 + \frac{16}{3},$$

$$\text{在 } y = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 3 \text{ 中, 当 } x = 4 \text{ 时, } y = \frac{1}{3}(4+1)^2 - 3 = \frac{16}{3},$$

∴ 点 E 在抛物线 C_1 上, 即抛物线 C_2 的顶点在抛物线 C_1 上,

又∵ 抛物线 $y = \frac{1}{3}(x-4)^2 + \frac{16}{3}$ 向左平移 5 个单位长度, 向下平移 $\frac{25}{3}$ 个单位长度可得到抛物线 C_1 ,

∴ 抛物线 C_1 也是抛物线 C_2 的“子抛物线”;

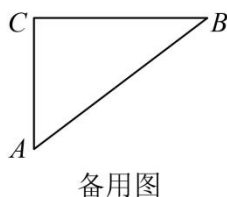
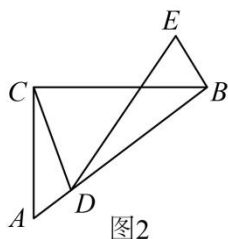
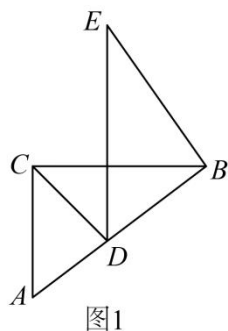
②∵ 四边形 $DMEN$ 是平行四边形,

∴ 由平行四边形两条对角线的中点坐标相同可得 $x_D + x_E = x_M + x_N$,

$$\therefore -1 + 4 = k + k,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{2}.$$

25. 如图, 已知 $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, D 是边 AB 上一点 (不与点 A, B 重合), $BE \perp AB$, 且 $\angle CDE = \angle A$.



(1) 当 $DE \parallel AC$ 时, BE 的长;

(2) 当点 D 在边 AB 上运动时, $\frac{CD}{DE}$ 的值是否保持不变, 如果不变, 试求出这个不变的值; 如果会发生变化, 试说明理由;

(3) 当直线 DE 与直线 AC 相交时, 记交点为点 F , 如果 CDF 是等腰三角形, 求 EF 的长.

【答案】(1) $\frac{10}{3}$

(2) $\frac{CD}{DE}$ 的值保持不变, 为定值 $\frac{3}{5}$, 理由见解析

(3) $\frac{32\sqrt{5}}{11}$

【解析】

【分析】(1) 解直角三角形得到 $\tan A = \frac{4}{3}$, $AB = 5$, 可证明 $\angle DCA = \angle CDE$, $\angle BDE = \angle A$, 得到 $\tan \angle BDE = \tan A = \frac{4}{3}$; 再证明 $\angle DCB = \angle DBC$, 得到 $AD = CD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$, 再解直角三角形即可得到答案;

(2) 连接 CE , 证明 $\angle CDE = \angle EBC$, 则 B, D, C, E 四点共圆, 求出 $\angle DCE = 90^\circ$, 则 $\frac{CD}{DE} = \cos \angle CDE = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$;

(3) 当点 F 在点 A 下方时, 过点 D 作 $DH \perp AC$ 于点 H , 连接 CE , 可证明 $\angle CDF = 180^\circ - \angle CDE > 90^\circ$, 则当 CDF 是等腰三角形时, 只存在 $DC = DF$ 这种情况, 证明 $\angle ADF = \angle AFD$, 得到 $AD = AF$; 解直角三角形得到 $\tan \angle DAH = \frac{DH}{AH} = \frac{4}{3}$, $\cos \angle DAH = \frac{AH}{AD} = \frac{3}{5}$, 设 $AH = 3x$, $DH = 4x$, $AD = AF = 5x$, 则可推出 $AC = AH + CH = 11x = 3$, 解得 $x = \frac{3}{11}$, 利用勾股定理求出 CD 的长, 进而求出 DE 的长即可得到答案; 当点 F 在点 C 上方时, 连接 CE , 可证明 $\angle FCD > 90^\circ$, 则当 CDF 是等腰三角形时, 只存在 $CF = CD$ 这种情况, 可证明 $\angle CEF > 90^\circ$, 则 $CF > CE > CD$ (大角对大边), 故此种情况不成立.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$,

$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$, $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$, $\angle DCA + \angle DCB = 90^\circ$,

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$;

$\because AC \parallel DE$,

$\therefore \angle DCA = \angle CDE$, $\angle BDE = \angle A$,

$$\therefore \tan \angle BDE = \tan A = \frac{4}{3};$$

$$\because \angle CDE = \angle A,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle A,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC,$$

$$\therefore AD = CD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2},$$

$$\because BE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \frac{BE}{BD} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BE = \frac{4}{3}BD = \frac{10}{3};$$

【小问 2 详解】

解: $\frac{CD}{DE}$ 的值保持不变, 为定值 $\frac{3}{5}$, 理由如下:

如图所示, 连接 CE ,

$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because BE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle A,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle CDE,$$

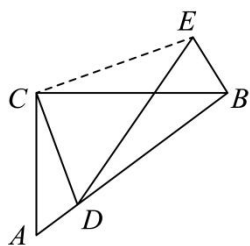
$$\therefore \angle CDE = \angle EBC,$$

$$\therefore B、D、C、E \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \cos \angle CDE = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

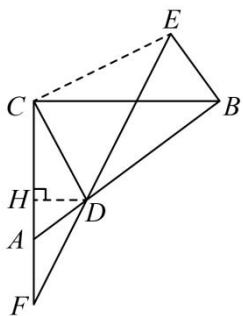
$$\therefore \frac{CD}{DE} \text{ 的值保持不变, 为定值 } \frac{3}{5};$$



【小问 3 详解】

解：如图所示，当点 F 在点 A 下方时，

如图所示，过点 D 作 $DH \perp AC$ 于点 H ，连接 CE ，



$$\because \angle CDE = \angle A < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = 180^\circ - \angle CDE > 90^\circ,$$

$\therefore$ 当 $\triangle CDF$ 是等腰三角形时，只存在 $DC = DF$ 这种情况，

$$\therefore \angle DCF = \angle DFC;$$

$$\because DH \perp AC,$$

$$\therefore CH = FH = \frac{1}{2}CF;$$

$$\because \angle CDB = \angle CDE + \angle BDE = \angle CAB + \angle ACD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ACD,$$

$$\text{又} \because \angle BDE = \angle ADF,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AFD,$$

$$\therefore AD = AF;$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADH \text{ 中, } \tan \angle DAH = \frac{DH}{AH} = \frac{4}{3}, \cos \angle DAH = \frac{AH}{AD} = \frac{3}{5},$$

$$\text{设 } AH = 3x, DH = 4x, AD = AF = 5x,$$

$$\therefore CH = FH = AF + AH = 8x,$$

$$\therefore AC = AH + CH = 11x = 3,$$

$$\therefore x = \frac{3}{11},$$

$$\therefore CD = \sqrt{DH^2 + CH^2} = \sqrt{(4x)^2 + (8x)^2} = 4\sqrt{5}x = \frac{12\sqrt{5}}{11},$$

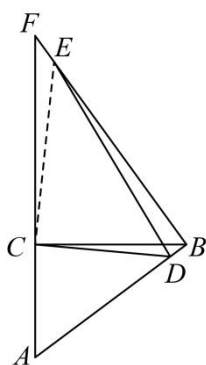
$$\therefore DF = CD = \frac{12\sqrt{5}}{11},$$

$$\text{由 (2) 得 } \frac{CD}{DE} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{5}{3}CD = \frac{20\sqrt{5}}{11},$$

$$\therefore EF = DE + DF = \frac{32\sqrt{5}}{11};$$

如图所示, 当点 F 在点 C 上方时, 连接 CE ,



$$\angle FCD = \angle BCF + \angle BCD = 180^\circ - \angle ACB + \angle BCD = 90^\circ + \angle BCD > 90^\circ,$$

$\therefore$ 当 CDF 是等腰三角形时, 只存在 $CF = CD$ 这种情况,

$$\because \angle CDE = \angle A, \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle CDE = \frac{CE}{CD} = \tan A = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CE > CD,$$

$$\because \angle CED < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = 180^\circ - \angle CED > 90^\circ,$$

$$\therefore CF > CE > CD \quad (\text{大角对大边}),$$

$\therefore$ 此种情况不成立;

综上所述, EF 的长为 $\frac{32\sqrt{5}}{11}$.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形, 勾股定理, 等腰三角形的性质与判定, 四点共圆, 利用分类讨论的思想求解是解题的关键.

