

2024 学年第一学期九年级数学练习

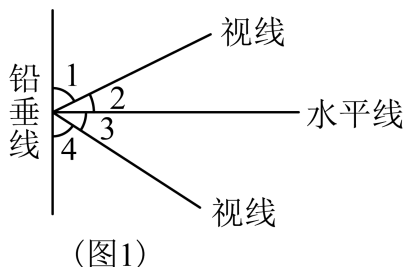
(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1. 在测量过程中, 常常会遇到仰角和俯角, 图中是俯角的角是 ()



- A. $\angle 1$ B. $\angle 2$ C. $\angle 3$ D. $\angle 4$

【答案】C

【解析】

【分析】根据俯角的定义解答即可. 本题考查了仰角, 俯角, 熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解: 根据题意, 得是俯角的是 $\angle 3$.

故选: C.

2. 下列多项式中, 是完全平方式的为 ()

- A. $x^2 - x + \frac{1}{4}$ B. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ C. $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ D. $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用配方法分别转化为完全平方式的形式即可求解.

【详解】A 选项 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, 故正确

B 选项 $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}$, 故错误

C 选项 $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{16}\right)^2 - \frac{65}{256}$, 故错误

D 选项 $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{16}\right)^2 + \frac{63}{256}$, 故错误

故选: A

【点睛】 本题考查配方法的运用, 熟练添加常数项, 即一次项系数一半的平方是解决问题的关键, 添加之后要注意再减去添加的常数项, 进行等价转化.

3. 已知函数 $y = kx + b$, 其中常数 $k > 0$ 、 $b > 0$, 那么这个函数的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】

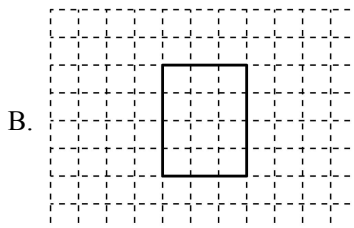
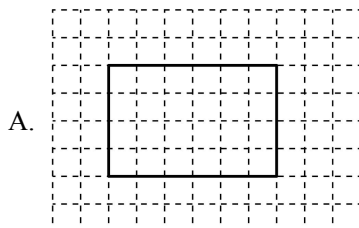
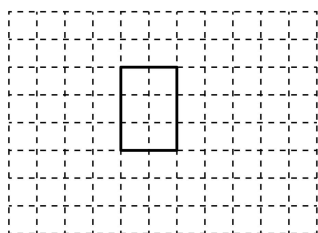
【分析】 本题考查了一次函数的性质, 由一次函数的解析式得出其图象经过一、二、三象限, 不经过第四象限, 从而得解, 熟练掌握一次函数的性质是解此题的关键.

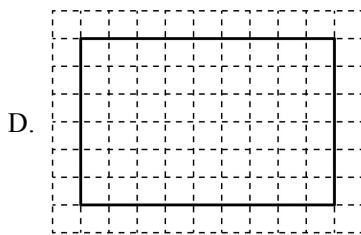
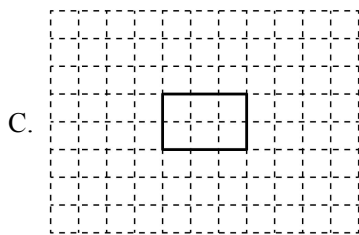
【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$, 其中常数 $k > 0$ 、 $b > 0$,

$\therefore$ 其图象经过一、二、三象限, 不经过第四象限,

故选: D.

4. 下列哪个选项中的矩形与图中的矩形不是相似形 ()





【答案】 B

【解析】

【分析】 根据相似多边形的定义，对应边成比例且对应角相等的两个多边形相似，解答即可．

本题考查了多边形的相似，熟练掌握定义是解题的关键．

【详解】 解： $\because$ 原始矩形的长与宽的比值为 $\frac{3}{2}$ ，且四个角都是直角，

A 中矩形的长与宽的比值为 $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ，且四个角都是直角，与原始矩形相似，

此选项不符合题意；

B 中矩形的长与宽的比值为 $\frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}$ ，且四个角都是直角，与原始矩形不相似，

此选项符合题意；

C 中矩形的长与宽的比值为 $\frac{3}{2}$ ，且四个角都是直角，与原始矩形相似，

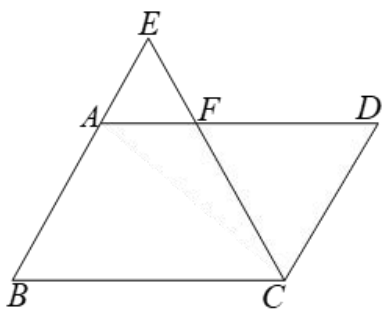
此选项不符合题意；

D 中矩形的长与宽的比值为 $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ，且四个角都是直角，与原始矩形相似，

此选项不符合题意；

故选： B.

5. 如图, E 是平行四边形 ABCD 的 BA 边的延长线上的一点, CE 交 AD 于点 F, 下列各式中, 错误的是().



A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{BC}$

B. $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{DF}$

C. $\frac{AE}{AB} = \frac{FE}{FC}$

D. $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BC}$

【答案】 A

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$, $AB=CD$; $AD \parallel BC$, 再根据平行线分线段成比例得到

$\frac{AE}{CD} = \frac{AF}{DF} = \frac{EF}{FC}$, 用 AB 等量代换 CD , 得到 $\frac{AE}{CD} = \frac{AF}{DF} = \frac{EF}{FC}$; 再利用 $AF \parallel BC$, 根据平行线分线段成比例得 $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BC}$, 由此可判断 A 选项中的比例是错误的.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB=CD$; $AD \parallel BC$,

$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AF}{DF} = \frac{EF}{FC}$, 而 $AB=CD$,

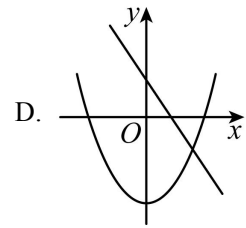
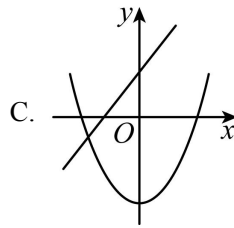
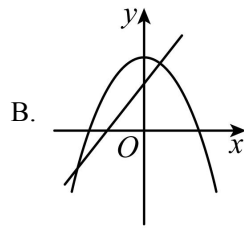
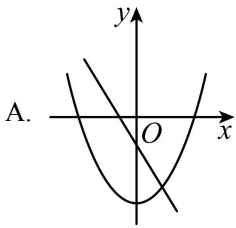
$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{DF} = \frac{EF}{FC}$;

又 $\because AF \parallel BC$,

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BC}$.

故选 A.

6. 在同一坐标系中, 一次函数 $y = ax + b^2$ 与二次函数 $y = x^2 - a$ 的图象可能是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】对 a 、 b 的符号分类讨论即可确定正确的选项.

【详解】当 $a > 0$ 时, 一次函数 $y = ax + b^2$ 经过一、二、三象限, 二次函数 $y = x^2 - a$ 开口向上, 顶点在 y 轴的负半轴, B 不符合, C 符合要求;

当 $a < 0$ 时, 一次函数 $y = ax + b^2$ 经过一、二、四象限, 二次函数 $y = x^2 - a$ 开口向上, 顶点在 y 轴的正半轴, A、D 选项均不符合;

故选: C.

【点睛】本题考查了二次函数的图象及一次函数的图象的知识, 解题的关键是能够对系数的符号进行分类讨论, 难度较小.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$, 那么 $\frac{x+y}{y} =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 根据 $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ 可得 $y = 3x$, 代入原式即可求解.

【详解】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$,

$\therefore y = 3x$,

那么 $\frac{x+y}{y} = \frac{x+3x}{3x} = \frac{4}{3}$.

故答案为: $\frac{4}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了比例的性质, 根据比例式用同一个未知数得出 x, y 的值或者用其中一个未知数表示另一个未知数进而求解是解题关键.

8. 函数 $y = \frac{x}{x+2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq -2$

【解析】

【分析】 本题考查了分式有意义的条件、求函数的定义域, 根据分式有意义的条件得出 $x+2 \neq 0$, 求解即可.

【详解】 解: 要使分式 $\frac{x}{x+2}$ 有意义, 则分母 $x+2 \neq 0$,

即 $x \neq -2$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{x}{x+2}$ 的定义域是 $x \neq -2$,

故答案为: $x \neq -2$.

9. 已知一个斜坡的坡角为 α , 坡度为 $1:2$, 那么 $\cos \alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用—坡度、坡角问题，由题意可设斜坡的垂直高度为 k ，则水平宽度为 $2k$ ($k > 0$)，由勾股定理可得斜坡长度，再由余弦的定义求解即可。

【详解】 解： $\because$ 坡度 $i = \tan \alpha = 1:2$ ，

$\therefore$ 设斜坡的垂直高度为 k ，则水平宽度为 $2k$ ($k > 0$)，

$\therefore$ 由勾股定理可得斜坡长度为 $\sqrt{(k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{5}k$ ，

$$\therefore \cos \alpha = \frac{2k}{\sqrt{5}k} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

10. 已知正比例函数 $y = (m-3)x$ ，如果 y 的值随着 x 的增大而增大，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 3$

【解析】

【分析】 根据正比例函数 y 的值随着 x 的增大而增大，得出 $m-3 > 0$ ，即可求出 m 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 $y = (m-3)x$ ， y 的值随着 x 的增大而增大，

$\therefore m-3 > 0$ ，

解得： $m > 3$.

故答案为： $m > 3$.

【点睛】 本题主要考查了正比例函数的性质，解题的关键是熟练掌握正比例函数的性质，正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$)，当 $k > 0$ 时， y 的值随着 x 的增大而增大，当 $k < 0$ 时， y 的值随着 x 的增大而减小.

11. 已知 $\vec{e}$ 是单位向量，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相反，且长度为 4，那么 $\vec{a}$ 用 $\vec{e}$ 表示是_____.

【答案】 $-4\vec{e}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数与向量相乘，熟练掌握向量的定义、表示方法及运算法则是解题的关键. 根据向量的表示方法进行解答即可.

【详解】 解： $\because$ $\vec{a}$ 的长度为 4，向量 $\vec{e}$ 是单位向量，

$$\therefore |\vec{a}| = 4|\vec{e}|,$$

又 $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相反,

$$\therefore \vec{a} = -4\vec{e},$$

故答案为: $-4\vec{e}$.

12. 在平面直角坐标系的第一象限内有一点 P , $OP=10$, 射线 OP 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 如果 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 那么点 P 坐标为_____.

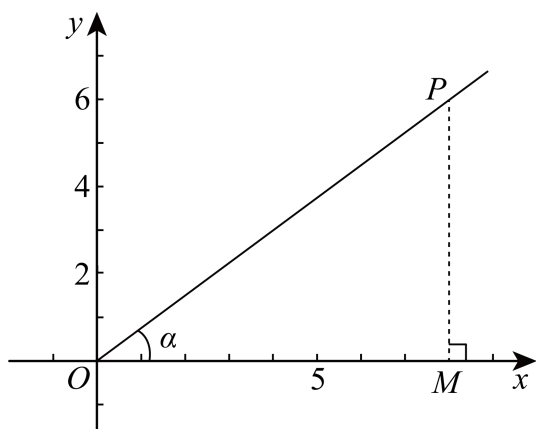
【答案】(8,6)

【解析】

【分析】过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 利用三角函数的定义, 勾股定理, 点的坐标的意义解答.

本题考查了正弦函数的应用, 勾股定理, 坐标的确定, 熟练掌握正弦函数, 勾股定理是解题的关键.

【详解】解: 如图, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ,



$$\because \sin \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{3}{5}, \quad OP = 10,$$

$$\therefore PM = 10 \times \frac{3}{5} = 6,$$

$$\therefore OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8,$$

$$\therefore \text{点 } P(8, 6).$$

故答案为: (8,6).

13. 如果点 M 把线段 AB 分割成 AM 和 MB 两段($AM > MB$), 其中 AM 是 AB 与 MB 的比例中项, 那么 $MB:AM$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】根据黄金分割点的定义即点把线段分成两条线段，较长线段是较短线段和全长线段的比例中项，这个点就是线段的黄金分割点，列式判断即可.

本题考查了一元二次方程的实际应用及黄金分割点的定义，熟练掌握黄金分割是解题的关键.

【详解】解：根据题意， $AM = x$ ，则 $BM = AB - x$ ，

$\therefore AM$ 是 AB 与 MB 的比例中项，

$$\therefore x^2 = AB \cdot (AB - x),$$

整理，得 $x^2 + AB \cdot x - AB^2 = 0$

$$\text{解得 } x = \frac{-AB \pm \sqrt{5}AB}{2}$$

$$\therefore x = \frac{(-1 + \sqrt{5})AB}{2}, \quad x = \frac{(-1 - \sqrt{5})AB}{2} \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore BM = AB - \frac{(-1 + \sqrt{5})AB}{2} = \frac{(3 - \sqrt{5})AB}{2},$$

$$\therefore \frac{BM}{AM} = \frac{(3 - \sqrt{5})AB}{2} \div \frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

14. 一个边长为 10 厘米的正方形，如果它的边长减少 x 厘米 ($0 < x < 10$)，则正方形的面积随之减少 y 平方厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.

【答案】 $y = -x^2 + 20x$

【解析】

【分析】本题考查了由实际问题列出二次函数，先计算出原正方形的面积，再计算出边长减少后的正方形的面积，作差即可得解.

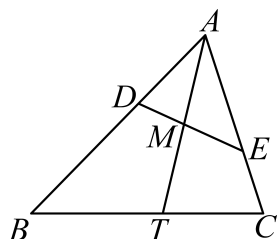
【详解】解：原正方形面积为 $10 \times 10 = 100$ (平方厘米)，

边长减少 x 厘米后，新正方形边长为 $(10 - x)$ 厘米，面积为 $(10 - x)^2$ 平方厘米，

则 $y = 100 - (10 - x)^2 = -x^2 + 20x$,

故答案为: $y = -x^2 + 20x$.

15. 如图, 点 M 是 ABC 的角平分线 AT 的中点, 点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 边上, 线段 DE 过点 M , 且 $\angle ADE = \angle C$, 那么 ADE 和 ABC 的面积比是_____.



【答案】 1:4

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质, 先证 $DAM \sim CAT$, 推出 $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AT} = \frac{1}{2}$, 再证

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB, \text{ 则 } \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

【详解】 解: $\because$ 点 M 是 AT 的中点,

$$\therefore AT = 2AM,$$

$\because AT$ 是 ABC 的角平分线,

$$\therefore \angle DAM = \angle CAT,$$

又 $\because \angle ADE = \angle C$, 即 $\angle ADM = \angle ACT$,

$$\therefore DAM \sim CAT,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AT} = \frac{1}{2};$$

$\because \angle ADE = \angle C$, $\angle DAE = \angle CAB$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$\therefore ADE$ 和 ABC 的面积比是 1:4,

故答案为: 1:4.

16. 等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, BD 、 CE 分别是边 AC 、 AB 上的中线, 且 $BD \perp CE$, 那么

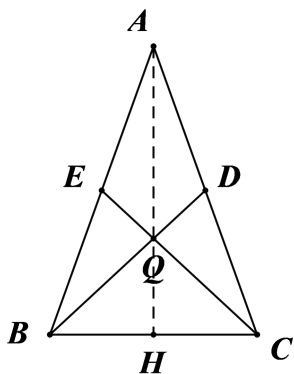
$$\tan \angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】3

【解析】

【分析】设 BD 与 CE 交于 Q ，连接 AQ 并延长交 BC 于点 H ，由题意得，点 Q 为 ABC 的重心，则 H 为 BC 中点， $AQ = 2QH$ ，则 $\triangle QBH$ 为等腰直角三角形，设 $QH = m$ ，则 $BH = m, AQ = 2m$ ，即可求解.

【详解】解：设 BD 与 CE 交于 Q ，连接 AQ 并延长交 BC 于点 H ，



由题意得，点 Q 为 ABC 的重心，

$\therefore H$ 为 BC 中点， $AQ = 2QH$

$\because AB = AC$ ，

$\therefore AH \perp BC$ ，

$\because BD \perp CE$ ， H 为 BC 中点

$\therefore QH = HB = HC = \frac{1}{2}BC$ ，

$\because AH \perp BC$ ，

$\therefore \triangle QBH$ 为等腰直角三角形，

$\therefore$ 设 $QH = m$ ，则 $BH = m, AQ = 2m$ ，

$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AH}{BH} = \frac{3m}{m} = 3$ ，

故答案为：3.

【点睛】 本题考查了求一个角的正切值，等腰三角形的性质，重心的性质，直角三角形的性质等知识，熟练掌握知识点是解题的关键.

17. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过点 $A(0, m), B(2, -m), C(-2, n), D(-6, -m)$ ，其中 m, n 为常数，那么 $\frac{m}{n}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 根据 $A(0, m), B(2, -m), C(-2, n), D(-6, -m)$ 得抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2-6}{2} = -2$ ， $c = m$ ，抛物线变形为 $y = ax^2 + 4ax + m$ ，把 $B(2, -m)$ 代入 $y = ax^2 + 4ax + m$ 得 $m = -6a$ ；把 $C(-2, n)$ 代入 $y = ax^2 + 4ax - 6a$ ，得到 $n = -10a$ ，解答即可.

本题考查了抛物线的对称轴的意义，图象于点的关系，对称点坐标与对称轴的关系，熟练掌握抛物线的性质是解题的关键.

【详解】 解： $\because A(0, m), B(2, -m), C(-2, n), D(-6, -m)$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象上的点，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2-6}{2} = -2$ ， $c = m$ ，

$\therefore b = 4a$ ，

$\therefore$ 抛物线变形为 $y = ax^2 + 4ax + m$ ，

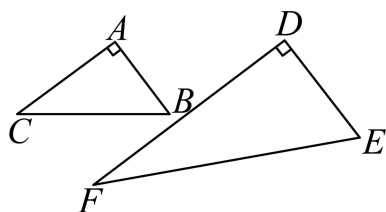
把 $B(2, -m)$ 代入 $y = ax^2 + 4ax + m$ 得 $m = -6a$ ；

把 $C(-2, n)$ 代入 $y = ax^2 + 4ax - 6a$ ，得 $n = -10a$ ，

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{-6a}{-10a} = \frac{3}{5}$.

故答案为： $\frac{3}{5}$.

18. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $AB = 3, AC = 4, DE = 4, DF = 8$ ，点 M 在边 BC 上，点 N 在边 EF 上， AM 分割 $\triangle ABC$ 所得的两个三角形分别与 DN 分割 $\triangle DEF$ 所得的两个三角形相似，那么线段 DN 的长是_____.



【答案】 4 或 $\frac{40}{11}$

【解析】

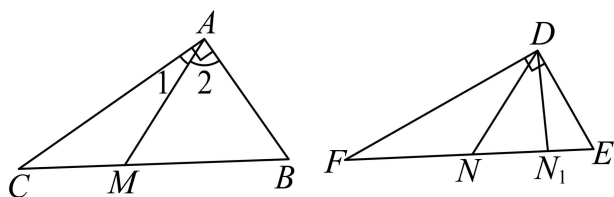
【分析】 本题主要考查相似三角形的判定，牢记相似三角形判定方法是解题关键，分两种情况讨论分别根据相似三角形性质分别求解即可.

【详解】 解: $\because \angle BAC = \angle EDF = 90^\circ, AB = 3, AC = 4, DE = 4, DF = 8,$

$$\therefore \tan \angle C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}, \tan \angle F = \frac{DE}{DF} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 5,$$

$$\therefore \angle C \neq \angle F,$$

如图, AM 分 $\triangle ABC$ 的两个三角形与 DN 分 $\triangle DEF$ 的两个三角形相似,



当 $\triangle ACM \sim \triangle FDN$ 时, 有 $\angle F = \angle CAM,$

$$\therefore AC = 4, DF = 8,$$

$$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{AM}{FN} = \frac{CM}{DN} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DN = 2CM,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}DN,$$

同理, $\triangle AMB \sim \triangle END,$ 则有 $\frac{AB}{ED} = \frac{BM}{DN} = \frac{AM}{EN} = \frac{3}{4},$

$$\therefore DN = \frac{4}{3}BM, \text{ 即 } BM = \frac{3}{4}DN,$$

$$\text{又 } BC = CM + BM = \frac{1}{2}DN + \frac{3}{4}DN = \frac{5}{4}DN = 5,$$

$$\therefore DN = 4;$$

同理, 当 DN_1 分 $\triangle DEF$ 的两个三角形相似存在

当 $\triangle ACM \sim \triangle EDN_1$ 时, 有 $\frac{AC}{DE} = \frac{AM}{EN_1} = \frac{CM}{DN_1} = \frac{4}{4} = 1$,

$$\therefore CM = DN_1,$$

同理, 当 $\triangle ABM \sim \triangle FDN_1$ 时, $\frac{AB}{DF} = \frac{AM}{FN_1} = \frac{BM}{DN_1} = \frac{3}{8}$,

$$\therefore BM = \frac{3}{8} DN_1,$$

$$\text{又 } CM + BM = 5,$$

$$\therefore DN_1 + \frac{3}{8} DN_1 = 5,$$

$$\therefore DN_1 = \frac{40}{11};$$

综上, DN 的长是 4 或 $\frac{40}{11}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos^2 45^\circ + \sqrt{(1 - \tan 60^\circ)^2} - \frac{2 \cot 45^\circ}{\cot 30^\circ + 2 \cos 60^\circ}$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了特殊角的三角函数值的混合运算和二次根式的运算, 根据特殊角的三角函数值逐个求解, 再利用二次根式运算, 最后根据有理数加减运算求解即可得到答案.

【详解】 解: $\cos^2 45^\circ + \sqrt{(1 - \tan 60^\circ)^2} - \frac{2 \cot 45^\circ}{\cot 30^\circ + 2 \cos 60^\circ}$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + |1 - \sqrt{3}| - \frac{2 \times 1}{\sqrt{3} + 2 \times \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - 1 - \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} - 1)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

20. 新定义: 若一个点的纵坐标是横坐标的 3 倍, 那么称这个点为三倍点. 已知反比例函数的图象经过点 $A(3, 4)$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过点 A 及反比例函数图象上的三倍点, 求二次函数的

解析式.

【答案】 $y = -x^2 + 3x + 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求二次函数解析式，反比例函数解析式，解题的关键是熟练掌握待定系数法. 先求出反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$ ，然后再求出反比例函数图象上的三倍点，然后用待定系数法求出二次函数解析式即可.

【详解】 解：设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，

$\because$ 经过点 $A(3, 4)$,

$$\therefore k = 3 \times 4 = 12,$$

$$\therefore \text{反比例函数为 } y = \frac{12}{x},$$

设三倍点坐标为 $(x, 3x)$ ，代入反比例函数得 $3x = \frac{12}{x}$ ，

解得： $x = 2$ 或 $x = -2$ ，

则三倍点为 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6)$ ，

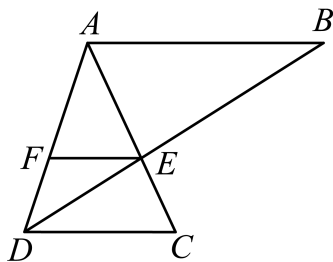
把 $A(3, 4)$ ， $(2, 6)$ ， $(-2, -6)$ 代入二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 得：

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 4a - 2b + c = -6 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数解析式为： $y = -x^2 + 3x + 4$.

21. 如图， $AB \parallel CD$ ， AC 与 BD 相交于点 E ， $AB = 9$ ， $CD = 6$ ， 点 F 在 AD 上， $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle AEF} = 2 : 3$.



(1) 求 EF 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{EC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{b}$, 用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示 $\overrightarrow{BE}$.

【答案】(1) $EF = \frac{18}{5}$

(2) $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定和性质以及平面向量的加减运算.

(1) 根据 $AB \parallel CD$ 可得 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, 得出 $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ 根据 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle AEF} = 2:3$ 得出 $\triangle AFE \sim \triangle ADC$, 进而根据相似三角形的性质, 即可得出结论;

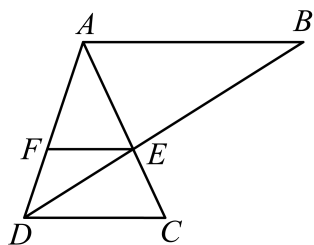
(2) 根据 (1) 可得 $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$, 则 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{3}{2}\vec{a}$, 根据相似三角形的性质可得 $\overrightarrow{BA} = \frac{5}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{5}{2}\vec{b}$, 结合平面向量的加减运算即可得出结论即可求得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$



$\therefore \triangle AEF$ 与 $\triangle DEF$ 高相同,

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{AF}{DA} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$$

又 $\because \angle FAE = \angle DAC$

$\therefore \triangle AFE \sim \triangle ADC$

$$\therefore \frac{EF}{DC} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore EF = \frac{3}{5}DC = \frac{3}{5} \times 6 = \frac{18}{5}$$

【小问2详解】

$$\because \overrightarrow{EC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{EF} = \vec{b}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{3}{2}\vec{a},$$

$$\because \triangle AFE \sim \triangle ADC$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ACD$$

$$\therefore EF \parallel AB$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DBA$$

$$\text{又} \because \frac{DF}{AF} = \frac{2}{3}, \text{ 则 } \frac{DF}{AD} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore BA = \frac{5}{2}EF, \quad \overrightarrow{BA} = \frac{5}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{5}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a}$$

22. 桔槔(gāo)是古代汉族的一种农具,也是一种原始的汲水工具,它的工作原理基于杠杆原理,通过一根竖立的支架加上一根杠杆,当中是支点,末端悬挂一个重物,前段悬挂水桶.当人把水桶放入水中打满水以后,由于杠杆末端的重力作用,便能轻易把水提拉至所需处.这种工具可以省力地进行汲水,减轻劳动者的劳动强度.

如图所示,线段OM代表固定支架,点D、点C分别代表重物和水桶,线段BD、AC是无弹力、固定长度的麻绳,绳长AC=3米,木质杠杆AB=6米.

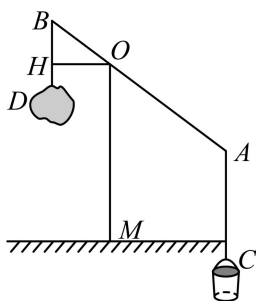
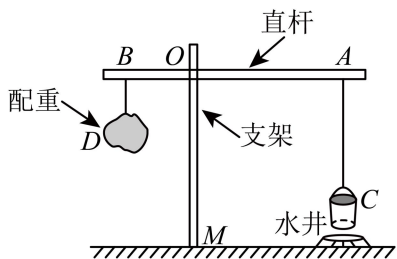


图1

图2

(1) 当水桶C的位置低于地面0.5米(如图1所示),支架OM与绳子BD之间的距离OH是1.6米,且 $\cot B = 0.75$,求这个桔槔支架OM的高度;

(2) 向上提水桶 C 上升到地面上方 0.6 米 (如图 2 所示), 求此时重物 D 相对于 (1) 中的位置下降的高度.

【答案】(1) 4.9 米

(2) 0.55 米

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AN \perp OM$ 于点 N , 利用余切函数的定义, 平行线的性质, 矩形的判定和性质, 勾股定理, 余弦函数, 解直角三角形的即可.

(2) 如图 2, 过点 A 作 $AQ \perp OM$ 于点 Q , 过点 C 作 $CP \perp OM$ 于点 P , 过点 O 作 $OK \perp BD$ 于点 K , 则 $PM = 0.6$ 米, 四边形 $ACPQ$ 是矩形, 解直角三角形解答即可.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, 过点 A 作 $AN \perp OM$ 于点 N ,

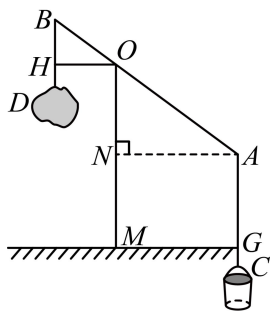


图1

$$\therefore \cot B = \frac{BH}{OH} = 0.75 = \frac{3}{4}, \quad OH = 1.6,$$

$$\therefore BH = 1.6 \times \frac{3}{4} = 1.2 \text{ (米)},$$

$$\therefore BO = \sqrt{BH^2 + OH^2} = 2 \text{ (米)},$$

$$\therefore \cos B = \frac{BH}{OB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OM \parallel BD, \quad AB = 6 \text{ 米},$$

$$\therefore \angle B = \angle AON, \quad OA = AB - OB = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore ON = OA \cos \angle AON = 4 \times \frac{3}{5} = 2.4 \text{ 米},$$

设 AC 与地面的交点为 G ,

则 $GC = 0.5$ 米, 四边形 $AGMN$ 是矩形,

$$\therefore MN = AG,$$

$$\therefore AC = 3 \text{ 米},$$

$$\therefore AG = 2.5 \text{ 米},$$

$$\therefore OM = ON + MN = ON + AG = 2.5 + 2.4 = 4.9 \text{ 米}.$$

【小问2 详解】

解：如图2，过点A作AQ⊥OM于点Q，过点C作CP⊥OM于点P，

过点O作OK⊥BD于点K，

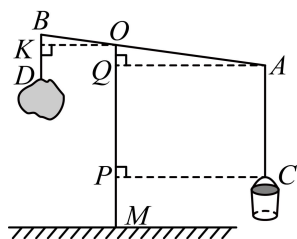


图2

则PM=0.6米，四边形ACPQ是矩形，

$$\therefore PQ = AC = 3 \text{ 米},$$

$$\because OM = 4.9 \text{ 米},$$

$$\therefore OQ = OM - PQ - MP = 1.3 \text{ 米},$$

$$\therefore \cos \angle AOQ = \frac{OQ}{OA} = \frac{1.3}{4} = \frac{13}{40},$$

$$\because OM \parallel BD,$$

$$\therefore \angle B = \angle AOQ,$$

$$\therefore \cos B = \frac{BK}{OB} = \frac{13}{40},$$

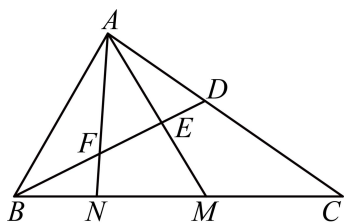
$$\therefore BK = OB \cos B = 2 \times \frac{13}{40} = 0.65 \text{ 米},$$

$$\text{根据 (1) 得 } BH = 1.6 \times \frac{3}{4} = 1.2 \text{ (米)},$$

$$\therefore \text{此时重物 } D \text{ 相对于 (1) 中的位置下降的高度为 } 1.2 - 0.65 = 0.55 \text{ 米}.$$

【点睛】本题考查了余切函数，余弦函数，勾股定理，矩形的判定和性质，平行线的性质，熟练掌握三角函数的应用是解题的关键.

23. 已知，如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D在边AC上，点M、N在边BC上，AB是线段AD与AC的比例中项， $\angle BAN = \angle CAM$ ，AM、AN分别交BD于点E、F.



(1) 求证: $\frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AN}$;

(2) 若点 O 为 BD 边的中点, 连接 ON , 且 $BD^2 = 2BN \cdot BC$, 求证: $ON \parallel AB$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, $\angle BAD = \angle CAB$ 证明 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, 得到 $\frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC}$, $\angle ABD = \angle ACB$,

结合 $\angle BAN = \angle CAM$ 可以证明 $\triangle ABF \sim \triangle ACM$, 继而得到 $\frac{AF}{AM} = \frac{AB}{AC}$, $\angle AFB = \angle AMC$ 证明

$\angle AFE = \angle AMN$, 结合 $\angle FAE = \angle MAN$ 证明 $\triangle AFE \sim \triangle AMN$, 等量代换即可证明 $\frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AN}$.

(2) 在 NC 上截取 $NQ = BN$, 连接 DQ , 证明 $ON \parallel DQ$, 再三角形相似, 平行线的判定证明 $DQ \parallel AB$, 解答即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB$ 是线段 AD 与 AC 的比例中项,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

$$\because \angle BAD = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC}, \quad \angle ABD = \angle ACB,$$

$$\because \angle BAN = \angle CAM,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACM,$$

$$\therefore \frac{AF}{AM} = \frac{AB}{AC}, \quad \angle AFB = \angle AMC,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle AFB = 180^\circ - \angle AMC,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AMN,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle MAN$$

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle AMN,$$

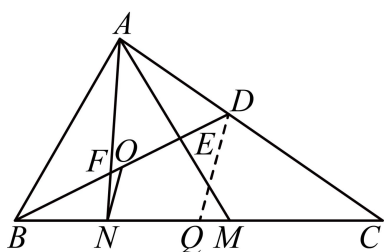
$$\therefore \frac{AF}{AM} = \frac{AE}{AN},$$

$$\therefore \frac{BD}{CB} = \frac{AE}{AN},$$

$$\therefore \frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AN}.$$

【小问 2 详解】

证明：在 NC 上截取 $NQ = BN$ ，连接 DQ ，



$\therefore$ 点 O 为 BD 边的中点,

$$\therefore ON \parallel DQ,$$

$$\therefore NQ = BN,$$

$$\therefore BQ = 2BN,$$

$$\therefore BD^2 = 2BN \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BQ}{BD},$$

$$\therefore \angle QBD = \angle DBC$$

$$\therefore \triangle QBD \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle BDQ = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACB,$$

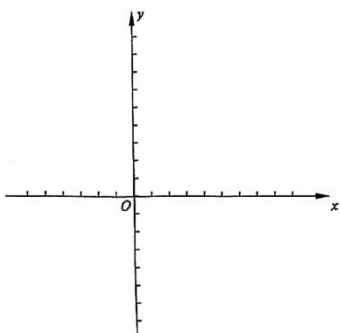
$$\therefore \angle ABD = \angle BDQ$$

$$\therefore DQ \parallel AB,$$

$$\therefore ON \parallel AB.$$

【点睛】本题考查了三角形相似的判定和性质，三角形中位线定理，平行线的判定和性质，比例中项的意义，熟练掌握三角形相似的判定和性质是解题的关键。

24. 在直角坐标平面 xOy 中，直线 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 向下平移 5 个单位后，正好经过抛物线 $y = ax^2 + 8ax + 2$ 的顶点 C ，抛物线与 y 轴交于点 B .



(1) 求点 C 的坐标；

(2) 点 M 在抛物线对称轴上，且位于 C 点下方，当 $\angle MBC = \angle BCO$ 时，求点 M 的坐标；

(3) 将原抛物线顶点 C 平移到直线 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 上，记作点 C_1 ，新抛物线与 y 轴的交点记作点 B_1 ，当 $\angle BB_1C_1 = 45^\circ$ 时，求 BB_1 的长。

【答案】(1) $(-4, -2)$

(2) $(-4, -6)$

(3) 3 或 5

【解析】

【分析】(1) 先求出点 C 的横坐标为 -4 ，再求出直线平移后的解析式，然后将 $x = -4$ 代入计算即可得解；

(2) 求出 $B(0, 2)$ ，由题意可得点 M 的横坐标为 -4 ，作 $CE \perp y$ 轴于 E ， $MD \perp y$ 轴于 D ，则 $MD = 4$ ， $CE = 4$ ， $BE = 2 - (-2) = 4$ ， $OE = 2$ ，可证得 $\triangle BCE$ 为等腰直角三角形，于是可得 $\angle CBE = \angle BCE = 45^\circ$ ，进而证得 $\angle OCE = \angle MBD$ ，于是可得 $\tan \angle MBD = \tan \angle OCE$ ，解直角三角形即可求出 $BD = 8$ ，进而得出点 M 的纵坐标为 -6 ，于是得解；

(3) 用待定系数法求出 $a = \frac{1}{4}$ ，得到抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 2$ ，设 $C_1\left(m, -\frac{1}{4}m + 2\right)$ ，则新抛

物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}(x-m)^2 - \frac{1}{4}m + 2$ ，求出 $B_1\left(0, \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2\right)$ ，得到

$BB_1 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2 - 2 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m$ ，点 C_1 在直线 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 上，作 $C_1G \perp y$ 轴于 G ，则

$B_1G = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2 - \left(-\frac{1}{4}m + 2\right) = \frac{1}{4}m^2$ ， $C_1G = |m|$ ，可证得 $\triangle B_1C_1G$ 为等腰直角三角形，于是可得

$B_1G = C_1G$ ，进而可得 $\frac{1}{4}m^2 = |m|$ ，求解即可得出答案。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 8ax + 2$ ，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{8a}{2a} = -4$ ，

$\therefore$ 点 C 的横坐标为 -4 ，

将直线 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 向下平移 5 个单位后得到的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + 2 - 5 = -\frac{1}{4}x - 3$ ，

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 向下平移 5 个单位后，正好经过抛物线 $y = ax^2 + 8ax + 2$ 的顶点 C ，

$\therefore$ 在 $y = -\frac{1}{4}x - 3$ 中，当 $x = -4$ 时， $y = -\frac{1}{4} \times (-4) - 3 = -2$ ，即 $C(-4, -2)$ ；

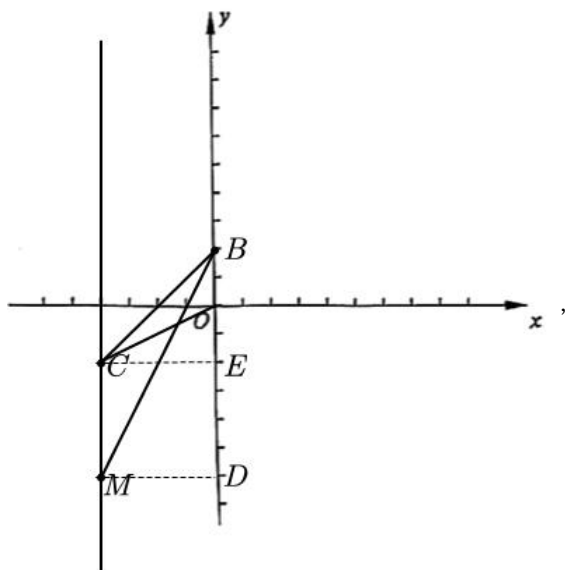
【小问 2 详解】

解：在 $y = ax^2 + 8ax + 2$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = 2$ ，即： $B(0, 2)$ ，

$\therefore$ 点 M 在抛物线对称轴上，

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 -4 ，

如图，作 $CE \perp y$ 轴于 E ， $MD \perp y$ 轴于 D ，



则 $MD = 4$, $CE = 4$, $BE = 2 - (-2) = 4$, $OE = 2$,

$\therefore \triangle BCE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle CBE = \angle BCE = 45^\circ$,

$\because \angle MBC = \angle BCO$,

$\therefore \angle BCE - \angle BCO = \angle CBE - \angle MBC$, 即: $\angle OCE = \angle MBD$,

$\therefore \tan \angle MBD = \tan \angle OCE$,

$\because \tan \angle OCE = \frac{OE}{CE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \tan \angle MBD = \frac{DM}{BD} = \frac{1}{2}$,

$\therefore BD = 8$,

$\therefore$ 点 D 的纵坐标为 $2 - 8 = -6$, 即: 点 M 的纵坐标为 -6 ,

$\therefore M(-4, -6)$;

【小问 3 详解】

解: 将 $C(-4, -2)$ 代入 $y = ax^2 + 8ax + 2$, 得:

$$16a - 32a + 2 = -2,$$

解得: $a = \frac{1}{4}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 2$,

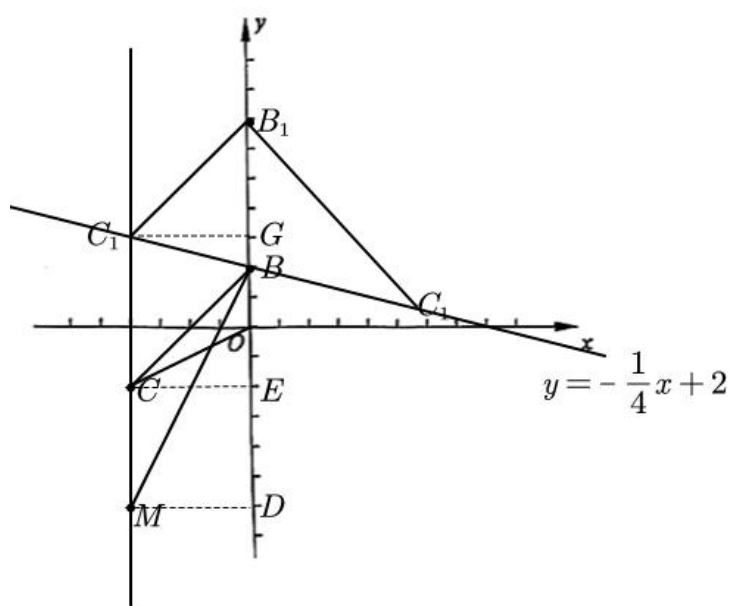
设 $C_1\left(m, -\frac{1}{4}m + 2\right)$, 则新抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}(x-m)^2 - \frac{1}{4}m + 2$,

在 $y = \frac{1}{4}(x-m)^2 - \frac{1}{4}m + 2$ 中, 当 $x=0$ 时, $y = \frac{1}{4}(0-m)^2 - \frac{1}{4}m + 2 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2$,

$$\therefore B_1\left(0, \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2\right),$$

$$\therefore BB_1 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2 - 2 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m,$$

如图, 点 C_1 在直线 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 上, 作 $C_1G \perp y$ 轴于 G ,



$$\text{则 } B_1G = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + 2 - \left(-\frac{1}{4}m + 2\right) = \frac{1}{4}m^2, \quad C_1G = |m|,$$

$$\therefore \angle BB_1C_1 = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle B_1C_1G$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore B_1G = C_1G,$$

$$\therefore \frac{1}{4}m^2 = |m|,$$

解得: $m = 4$ 或 $m = -4$,

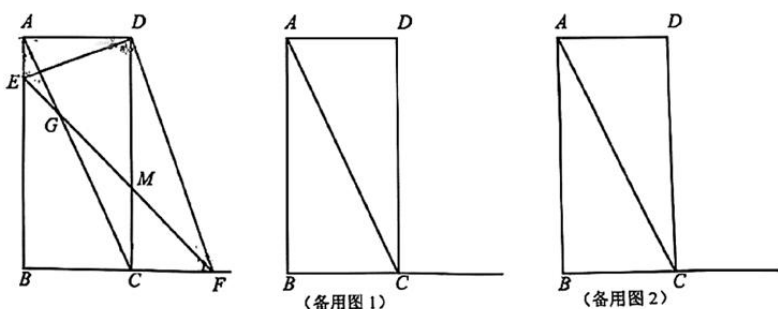
$$\text{当 } m = 4 \text{ 时, } BB_1 = \frac{1}{4} \times 4^2 - \frac{1}{4} \times 4 = 4 - 1 = 3,$$

$$\text{当 } m = -4 \text{ 时, } BB_1 = \frac{1}{4} \times (-4)^2 - \frac{1}{4} \times (-4) = 4 + 1 = 5,$$

综上所述, BB_1 的长为 3 或 5.

【点睛】 本题主要考查了二次函数综合, 二次函数的图象与性质, 一次函数的平移, 二次函数图象的平移, 等腰直角三角形的判定与性质, 解直角三角形的相关计算, 求一次函数的函数值等知识点, 熟练掌握以上知识点并灵活运用, 同时添加适当的辅助线是解题的关键.

25. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2BC$, 点 E 在射线 BA 上, 点 F 在射线 BC 上, 且 $DF \perp DE$, 射线 EF 与对角线 AC 交于点 G , 与射线 DC 交于点 M .



- (1) 当点 E 在线段 BA 上时, 求 $\angle DFM$ 的正切值;
- (2) 当 G 是 AC 中点时, 求 $\frac{DM}{CM}$ 的值;
- (3) 当 $BC = 3$, 且 $\triangle DGM$ 与 $\triangle DCF$ 相似时, 直接写出 AE 的长.

【答案】 (1) $\tan \angle DFM = \frac{1}{2}$;

(2) $\frac{DM}{CM} = \frac{5}{3}$;

(3) 当 $BC = 3$, 且 $\triangle DGM$ 与 $\triangle DCF$ 相似时, AE 的长为 $3\sqrt{5} - 6$ 或 $\frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle CDF$, 推出 $\frac{AE}{CF} = \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}$, 得到 $\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DF}$, 再证明 $\triangle ADC \sim \triangle EDF$, 得到 $\angle ACD = \angle EFD$, 再利用正切函数的定义即可求解;

(2) 证明点 C, F, D, G 四点共圆, 得到点 G 是矩形 $ABCD$ 的中心, 再证明四边形 $BMDE$ 是菱形, 设 $AD = BC = a$, 则 $AB = CD = 2a$, 再设 $CM = m$, 则 $DM = 2a - m = BM$, 在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, 利用勾股定理求得 $a = \frac{4}{3}m$, 据此求解即可;

(3) 分两种情况讨论, 当点 E 在线段 BA 上时, 设 $AE = x$, 则 $CG = CF = 2x$, 证明 $\triangle GCM \sim \triangle DCG$, 推出 $CM = \frac{2x^2}{3}$, 再证明 $\angle FCM \sim \triangle FBE$, 利用相似三角形的性质列式计算可求得 AE 的长; 当点 E 在 BA

【小问 1 详解】

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2},$$

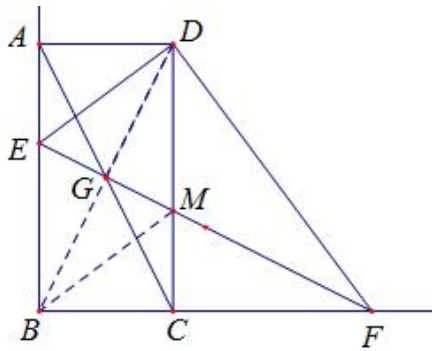
$$\therefore \frac{AE}{CF} = \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DF}, \quad \text{又 } \angle ADC = \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DFM = \tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2};$$

【小问 2 详解】

解: 连接 DG , BG , BM ,



由 (1) 得 $\angle GCD = \angle GFD$,

$\therefore$ 点 C 、 F 、 D 、 G 四点共圆,

$\therefore \angle DGF = \angle DCF = 90^\circ$,

$\therefore G$ 是 AC 中点,

$\therefore$ 点 G 是矩形 $ABCD$ 的中心,

$\therefore$ 点 B 、 G 、 D 三点共线,

$\therefore DG = BG$,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore AE \parallel CM$,

$\therefore \triangle EAG \sim \triangle MCG$,

$$\therefore \frac{EG}{GM} = \frac{AG}{CG} = 1,$$

$\therefore EG = MG$,

$\therefore DG = BG$,

$\therefore$ 四边形 $BMDE$ 是平行四边形,

$\therefore \angle DGM = 90^\circ$, 即 $EM \perp BD$,

$\therefore$ 平行四边形 $BMDE$ 是菱形,

$\therefore BE = BM = DM$,

设 $AD = BC = a$, 则 $AB = CD = 2a$,

再设 $CM = m$, 则 $DM = 2a - m = BM$,

在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, $BC^2 + CM^2 = BM^2$, 即 $a^2 + m^2 = (2a - m)^2$,

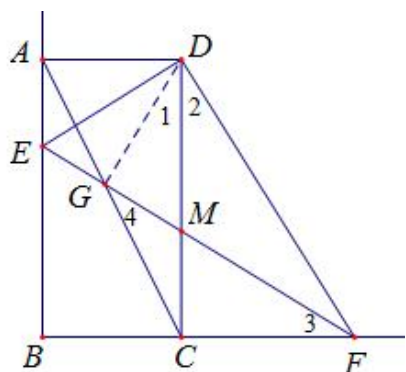
解得 $a = \frac{4}{3}m$,

$$\therefore \frac{DM}{CM} = \frac{2a - m}{m} = \frac{2 \times \frac{4}{3}m - m}{m} = \frac{5}{3};$$

【小问3 详解】

解: $\because BC = 3$,

$\therefore AB = CD = 6$, 当点 E 在线段 BA 上时,



$\because \angle DGM = \angle DCF = 90^\circ$,

$\therefore$ 当 $\angle 1 = \angle 2$ 时, $\triangle DGM \sim \triangle DCF$,

$\therefore$ 点 C 、 F 、 D 、 G 四点共圆,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore CG = CF$,

设 $AE = x$,

由 (1) 得 $\frac{AE}{CF} = \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}$,

$\therefore CG = CF = 2x$,

$\because \angle 1 = \angle 4$, $\angle GCM = \angle DCG$,

$\therefore \triangle GCM \sim \triangle DCG$,

$\therefore \frac{CG}{CD} = \frac{CM}{CG}$, 即 $\frac{2x}{6} = \frac{CM}{2x}$,

$\therefore CM = \frac{2x^2}{3}$,

$\because BE \parallel CM$,

$\therefore \triangle FCM \sim \triangle FBE$,

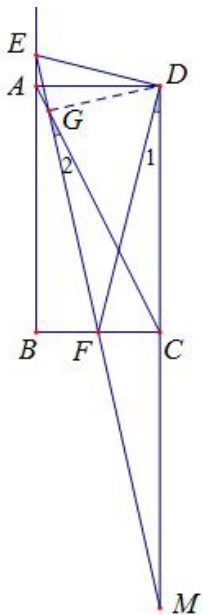
$\therefore \frac{CM}{BE} = \frac{CF}{BF}$, 即 $\frac{\frac{2x^2}{3}}{6-x} = \frac{2x}{2x+3}$,

整理得 $x^2 + 3x - 9 = 0$,

$$\text{解得 } x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{3\sqrt{5}-3}{2};$$

当点 E 在 BA 延长线上时,



$$\because \angle DGM = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{当 } \angle 1 = \angle M \text{ 时, } \triangle DGM \sim \triangle DCF,$$

同理点 C 、 F 、 G 、 D 四点共圆,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle M,$$

$$\therefore CF \perp DM,$$

$$\therefore CD = CM = 6, \quad CG = CM = 6,$$

设 $AE = x$,

同理得 $CF = 2x$,

$$\therefore BE \parallel CM,$$

$$\therefore \triangle FCM \sim \triangle FBE,$$

$$\therefore \frac{CM}{BE} = \frac{CF}{BF}, \quad \text{即 } \frac{6}{6+x} = \frac{2x}{3-2x},$$

$$\text{整理得 } x^2 + 12x - 9 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \pm 3\sqrt{5} - 6,$$

$$\therefore AE = 3\sqrt{5} - 6;$$

综上，当 $BC=3$ ，且 $\triangle DGM$ 与 $\triangle DCF$ 相似时， AE 的长为 $3\sqrt{5}-6$ 或 $\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$ 。

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，四点共圆，解一元二次方程，勾股定理，解直角三角形。正确引出辅助线解决问题是解题的关键。