

黄浦区 2024 年九年级学业水平考试模拟考

数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

2024 年 4 月

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 多项式的因式分解与整式乘法是互逆的. 在整式乘法中, “单项式乘以多项式”所对应的互逆因式分解方法是 ()

- A. 提取公因式法 B. 公式法 C. 十字相乘法 D. 分组分解法

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了因式分解与整式乘法的关系, 在整式乘法中, “单项式乘以多项式”所对应的互逆因式分解方法是提取公因式法.

【详解】解: 多项式的因式分解与整式乘法是互逆的. 在整式乘法中, “单项式乘以多项式”所对应的互逆因式分解方法是提取公因式法.

故选: A.

2. 已知第二象限内点 P 到 x 轴的距离为 2, 到 y 轴的距离为 3, 那么点 P 的坐标是 ()

- A. $(-2, 3)$ B. $(-3, 2)$ C. $(2, -3)$ D. $(3, -2)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查点的坐标特点, 根据第二象限内点的坐标特征和点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值, 到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值解答.

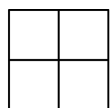
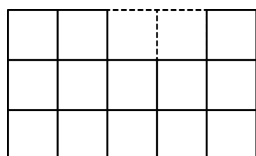
【详解】解: $\because$ 第二象限内点 P 到 x 轴的距离为 2, 到 y 轴的距离为 3,

∴ 点 P 的横坐标是 -3 ，纵坐标是 2 ，

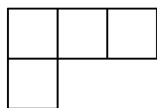
∴ 点 P 的坐标为 $(-3, 2)$ 。

故选：B。

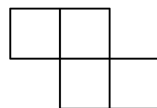
3. 如图，一个 3×5 的网格，其中的 12 个单位正方形已经被 2 张“L”型和 1 张“田字”型纸片互不重叠地占据了。下列有 4 个均由 4 个单位正方形所组成的纸片，依次记为型号 1、型号 2、型号 3 和型号 4。将这 4 个型号的纸片做平移、旋转，恰能将图 1 中 3 个未被占据的单位正方形占据，并且与已有的 3 张纸片不重叠的是（ ）



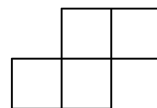
(型号1)



(型号2)



(型号3)



(型号4)

A. 型号 1

B. 型号 2

C. 型号 3

D. 型号 4

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查的是平移，旋转，理解平移与旋转现象在生活中的应用是解本题的关键。

【详解】 解：把型号 4 逆时针旋转 90° ，再通过平移可把图 1 中 3 个未被占据的单位正方形占据，并且与已有的 3 张纸片不重叠；

故选 D

4. 对于数据：2、2、2、4、5、6、8、8、9、100，能较好反映这组数据平均水平的是（ ）

A. 这组数据的平均数

B. 这组数据的中位数

C. 这组数据的众数

D. 这组数据的标准差

【答案】A

【解析】

【分析】 本题主要考查了平均数，根据平均数是反映一组数据的平均水平的量即可解答。

【详解】 解：对于数据：2、2、2、4、5、6、8、8、9、100，能较好反映这组数据平均水平的是这组数据的平均数，

故选：A。

5. 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像有下述特征：图像与 x 轴没有公共点且与 x 轴无限接近。下列说明这一特征的理由中，正确的是（ ）

A. 自变量 $x \neq 0$ 且 x 的值可以无限接近 0

B. 自变量 $x \neq 0$ 且函数值 y 可以无限接近 0

C. 函数值 $y \neq 0$ 且 x 的值可以无限接近 0

D. 函数值 $y \neq 0$ 且函数值 y 可以无限接近 0

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的图象，根据反比例函数的性质和题目条件，逐项分析判断即可

【详解】解：A. 自变量 $x \neq 0$ 且 x 的值可以无限接近 0，与题目条件不符，错误，故该选项不符合题意；

B. 自变量 $x \neq 0$ 且函数值 y 可以无限接近 0，与题目条件不符，错误，故该选项不符合题意；

C. 函数值 $y \neq 0$ 且 x 的值可以无限接近 0，与题目条件不符，错误，故该选项不符合题意；

D. 函数值 $y \neq 0$ 且函数值 y 可以无限接近 0，与题目条件相符，正确，故该选项符合题意；

故选：D.

6. 小明在研究梯形的相似分割问题，即如何用一条直线将一个梯形分割成两个相似的图形. 他先从等腰梯形开始进行探究，得到下面两个结论. 结论 1：存在与上、下底边相交的直线，能将等腰梯形分割成两个相似的图形；结论 2：不存在与两腰相交的直线，能将等腰梯形分割成两个相似的图形. 对这两个结论，你认为（ ）

A. 结论 1、结论 2 都正确

B. 结论 1 正确、结论 2 不正确；

C. 结论 1 不正确、结论 2 正确

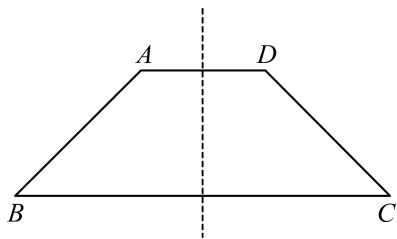
D. 结论 1、结论 2 都不正确.

【答案】B

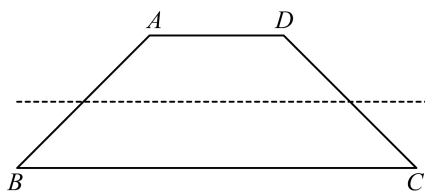
【解析】

【分析】本题主要考查图形的相似和垂直平分线的性质，分别作上下底的垂直平分线即可判定结论 1 正确；连接两腰与其垂直平分线的交点即可判定结论 2 错误.

【详解】解：如图，存在与上、下底边相交的直线，将等腰梯形分割成两个相似的图形，则结论 1 正确；



如图，存在与两腰相交的直线，将等腰梯形分割成两个相似的图形，则结论 2 不正确；



故选：B.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 100 的平方根是_____；

【答案】 ± 10

【解析】

【分析】 根据平方根的性质计算，即可得到答案.

【详解】 100 的平方根 $= \pm\sqrt{100} = \pm 10$

故答案为: ± 10 .

【点睛】 本题考查了平方根的知识; 解题的关键是熟练掌握平方根的定义: 如果一个数 x 的平方等于 a , 那么这个数 x 就叫做 a 的平方根.

8. 计算: $(-a^3)^2 =$ ____.

【答案】 a^6

【解析】

【分析】 根据“幂的乘方，底数不变，指数相乘法则”处理.

【详解】 解: $(-a^3)^2 = a^6$,

故答案为: a^6

【点睛】 本题考查幂的运算，掌握幂的运算法则是解题的关键.

9. 方程 $x = \sqrt{x+2}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的求法，把方程两边平方求解，再检验即可得到答案.

【详解】 解: 把方程两边平方得: $x+2 = x^2$,

整理得: $(x-2)(x+1) = 0$,

解得: $x = 2$ 或 $x = -1$,

经检验, $x = 2$ 是原方程的解.

故答案为: $x = 2$.

10. 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 1 = 0$, 判断该方程的根的情况是_____.

【答案】 有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程根的判别式，先计算 $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0$, 再判断即可.

【详解】解： $\because x^2 + mx - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0,$$

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根,

故答案为：有两个不相等的实数根.

11. 将直线 $y = 2x$ 向上平移 2 个单位, 所得直线与 x 轴、 y 轴所围成的三角形面积是_____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据函数图象“上加下减”的平移规律得到直线解析式, 求出解析式与坐标轴交点, 可得答案. 本题考查了一次函数的几何变换, 以及图象与坐标轴的交点求面积, 解题的关键是掌握“左加右减, 上加下减”.

【详解】解: 直线 $y = 2x$ 向上平移 2 个单位长度得到: $y = 2x + 2$,

令 $y = 0$, 即 $2x + 2 = 0$,

解得 $x = -1$,

令 $x = 0$, 得 $y = 2$,

所以直线与 x 轴和 y 轴的交点坐标分别为: $(-1, 0)$ 与 $(0, 2)$,

所以直线与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$.

故答案为: 1.

12. 一副 52 张的扑克牌 (无大、小王) 被任意打乱后背面朝上放在桌上, 小华先从中抽取 1 张, 取得的是黑桃 A . 然后小王从剩下的牌中再任意抽取 1 张, 他恰好抽到 A 的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{51}$

【解析】

【分析】本题主要考查了根据概率公式求概率, 由题意得剩下的牌有 51 上, 其中牌 A 还有 3 张, 根据概率公式即可求解.

【详解】解: 由题意得剩下的牌有 51 上, 其中牌 A 还有 3 张,

$\therefore$ 小王从剩下的牌中再任意抽取 1 张, 他恰好抽到 A 的概率是 $\frac{3}{51}$.

故答案为: $\frac{3}{51}$.

13. 小黄对学校提供午餐中的主食、荤菜、蔬菜和汤, 开展了一次满意度调查. 他利用中午休息时间, 随机对学校中 50 名学生做了问卷调查, 汇总数据如下表. 如果学校共有 1400 名学生, 那么全校对午餐中主食

满意的学生约有_____名.

类别	主食	荤菜	蔬菜	汤
满意人数	16	5	20	8

【答案】 448

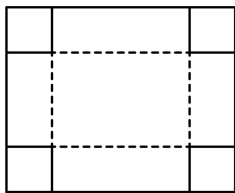
【解析】

【分析】 本题主要考查了用样本估计总体，用总体乘以对午餐中主食满意的学生占比即可求出答案.

【详解】 解：根据题意 $1400 \times \frac{16}{50} = 448$ (名)

故答案为： 448.

14. 现有一张矩形纸片，其周长为36厘米，将纸片的四个角各剪下一个边长为2厘米的正方形，然后沿虚线（如图所示）将纸片折成一个无盖的长方体. 如果所得的长方体的体积是48立方厘米，设原矩形纸片的长是 x 厘米，那么可列出方程为_____.



【答案】 $2(x-4)(14-x) = 48$

【解析】

【分析】 此题主要考查了一元二次方程的应用，首先要注意读懂题意，正确理解题意，然后才能利用题目的数量关系列出方程.

设原矩形纸片的长是 x cm，表示长方体纸盒的长、宽、高，然后根据体积列出方程即可.

【详解】 解：

设原矩形纸片的长是 x cm，则宽为 $(18-x)$ cm，

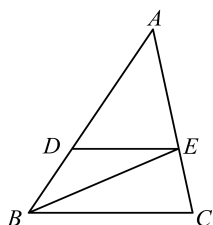
长方体纸盒的长为 $(x-4)$ cm，宽为 $(14-x)$ cm，高为 2cm，

由长方体体积是48立方厘米得： $2(x-4)(14-x) = 48$.

故答案为： $2(x-4)(14-x) = 48$.

15. 如图, D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 上点, 满足 $AD = 2BD$, $\angle ADE = \angle ABC$. 记 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

那么向量 $\overrightarrow{BE} =$ _____ (用向量 a 、 b 表示).



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的判定，相似三角形的判定以及性质，向量的知识. 由 $\angle ADE = \angle ABC$ 判定出 $DE \parallel BC$ ，由平行线的得出 $AE = \frac{2}{3}AC$ ，再根据向量得知识即可得出 $\vec{BE}$.

【详解】 解： $\because \angle ADE = \angle ABC$,

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore AD = 2BD,$$

$$\therefore AE = 2EC,$$

$$\therefore AE = \frac{2}{3}AC,$$

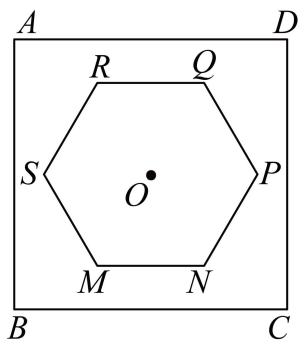
$$\therefore \vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = \vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \vec{BA} + \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC},$$

$$\because \vec{BA} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$$

$$\therefore \vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

16. 如图，正六边形 $MNPQRS$ 位于正方形 $ABCD$ 内，它们的中心重合于点 O ，且 $MN \parallel BC$ 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，正六边形 $MNPQRS$ 的边长为 b ，那么点 P 到边 CD 的距离为_____。(用 a 、 b 的代数式表示)

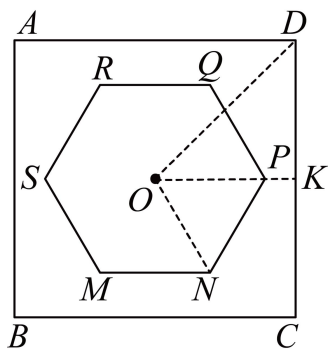


【答案】 $\frac{1}{2}a - b$

【解析】

【分析】 本题考查的是正多边形与圆，熟记正多边形的性质是解本题的关键，如图，连接 OD ， ON ， OP 并延长与 CD 交于点 K ，由正多边形的性质结合 $MN \parallel BC$ ，可得 $DK = OK = \frac{1}{2}a$ ， $OP = PN = b$ ， $OK \perp CD$ ，从而可得答案.

【详解】 解：如图，连接 OD ， ON ， OP 并延长与 CD 交于点 K ，



$\because$ 正六边形 $MNPQRS$ 位于正方形 $ABCD$ 内，它们的中心重合于点 O ，且 $MN \parallel BC$ ，

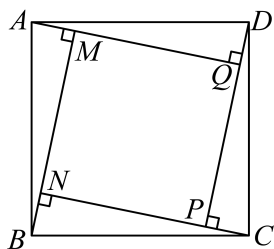
$\therefore \triangle OPN$ 为等边三角形， $OK \perp CD$ ， $DK = CK = \frac{1}{2}a$ ， $\angle DOK = \angle ODK = 45^\circ$ ，

$\therefore DK = OK = \frac{1}{2}a$ ， $OP = PN = b$ ，

$\therefore PK = \frac{1}{2}a - b$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}a - b$

17. 如图，由 4 个全等的直角三角形拼成一个大正方形 $ABCD$ ，内部形成一个小正方形 $MNPQ$ 。如果正方形 $MNPQ$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的一半，那么， $\angle ABM$ 的正切值是_____。



【答案】 $2 - \sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3} + 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查正方形的性质、勾股定理以及解直角三角形，设 $MB = b$ ， $AM = a$ ，则

$\tan \angle ABM = \frac{a}{b} < 1$, 根据面积可列出 $(b-a)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, 整理得 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$, 求得 $\frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{3}$, 即可解得答案.

【详解】解: 设 $MB = b$, $AM = a$, 则 $\tan \angle ABM = \frac{a}{b} < 1$,

$$\therefore AB^2 = a^2 + b^2, \quad MN = b - a,$$

$$\because S_{\text{正方形}MNPQ} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形}ABCD},$$

$$\text{即 } (b-a)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$\text{整理得: } a^2 + b^2 = 4ab,$$

$$\text{变形得: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4,$$

$$\text{令 } \frac{a}{b} = x, \text{ 则 } \frac{b}{a} = \frac{1}{x},$$

$$\therefore \text{原始 } x + \frac{1}{x} = 4,$$

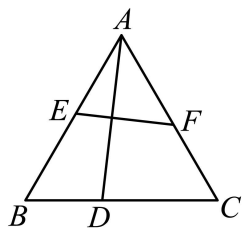
$$\text{解得, } x = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3} > 1 \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore \tan \angle ABM = \frac{a}{b} = 2 - \sqrt{3}.$$

18. 如图, D 是等边 $\triangle ABC$ 边 BC 上点, $BD:CD = 2:3$, 作 AD 的垂线交 AB 、 AC 分别于点 E 、 F , 那么 $AE:AF =$ _____.



【答案】 $7:8$ ## $\frac{7}{8}$

【解析】

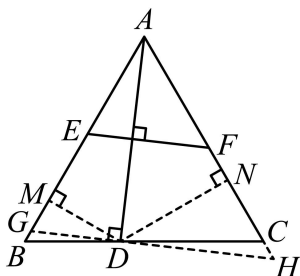
【分析】如图, 过 D 作 $DG \perp AD$ 交 AB 于 G , 延长 GD 交 AC 于 H , 过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作

$DN \perp AC$ 于 N , 设 $BD = 2m$, 则 $CD = 3m$, 可得 $AM = 5m - m = 4m$, $AN = 5m - \frac{3}{2}m = \frac{7}{2}m$,

$AD = \sqrt{AM^2 + DM^2} = \sqrt{19}m$, 证明 $\triangle ADM \sim \triangle AGD$, $AG = \frac{19m^2}{4m} = \frac{19}{4}m$, 同理可得 $AH = \frac{38}{7}m$,

证明 $\triangle AEF \sim \triangle AGH$ ，可得 $\frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AH}$ ，从而可得答案.

【详解】解：如图，过 D 作 $DG \perp AD$ 交 AB 于 G ，延长 GD 交 AC 于 H ，过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M ，作 $DN \perp AC$ 于 N ，



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形， $BD:CD = 2:3$ ，

$\therefore \angle B = \angle ACB = 60^\circ$ ， $\angle BDM = 30^\circ = \angle CDN$ ，

设 $BD = 2m$ ，则 $CD = 3m$ ，

$\therefore AB = AC = 5m$ ， $BM = m$ ， $CN = \frac{3}{2}m$ ，

$\therefore DM = \sqrt{3}m$ ， $DN = \frac{3\sqrt{3}}{2}m$ ，

$\therefore AM = 5m - m = 4m$ ， $AN = 5m - \frac{3}{2}m = \frac{7}{2}m$ ， $AD = \sqrt{AM^2 + DM^2} = \sqrt{19}m$ ，

$\because \angle AMD = 90^\circ = \angle ADG$ ， $\angle MAD = \angle GAD$ ，

$\therefore \triangle ADM \sim \triangle AGD$ ，

$\therefore \frac{AD}{AG} = \frac{AM}{AD}$ ，

$\therefore AG = \frac{19m^2}{4m} = \frac{19}{4}m$ ，

同理： $\triangle ADN \sim \triangle AHD$ ，

$\therefore \frac{AD}{AH} = \frac{AN}{AD}$ ，

$\therefore AH = \frac{19m^2}{\frac{7}{2}m} = \frac{38}{7}m$ ，

$\because EF \perp AD$ ， $GH \perp AD$ ，

$\therefore EF \parallel GH$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle AGH$ ，

$\therefore \frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AH}$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AG}{AH} = \frac{\frac{19}{4}m}{\frac{38}{7}m} = \frac{7}{8};$$

故答案为：7:8

【点睛】 本题考查的是等边三角形的性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，作出合适的辅助线是本题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算： $|1 - \tan 60^\circ| - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + (2024 - \sqrt{2024})^0$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数的混合运算，先代入特殊角的三角函数值，化简绝对值以及二次根式的分母有理化，计算零次幂，最后再算加减法.

【详解】 解： $|1 - \tan 60^\circ| - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + (2024 - \sqrt{2024})^0$

$$= |1 - \sqrt{3}| - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1$$

$$= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$$

$$= \sqrt{2}$$

20. 解不等式组： $\begin{cases} 2x - 5 \leq 0, \\ \frac{x-4}{2} + \frac{1-2x}{3} < 0 \end{cases}$

【答案】 $-10 < x \leq \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次不等式组的解法，分别解两个不等式，再根据“同大取较大，同小取较小，大小小大中间找，大大小小无解了”取解集.

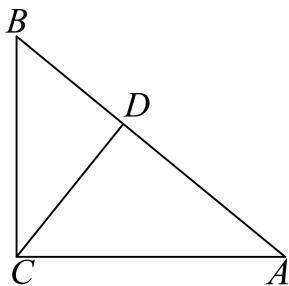
【详解】 解： $\begin{cases} 2x - 5 \leq 0 \text{ ①}, \\ \frac{x-4}{2} + \frac{1-2x}{3} < 0 \text{ ②} \end{cases}$

解①得： $x \leq \frac{5}{2}$,

解②得： $x > -10$,

∴ 不等式组的解集为: $-10 < x \leq \frac{5}{2}$.

21. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上点, 已知 $\angle BCD = \angle A$, $AD = 5$, $BD = 4$.



(1) 求边 BC 的长;

(2) 如果 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (点 A 、 C 、 D 对应点 C 、 B 、 D), 求 $\angle ACB$ 的度数.

【答案】 (1) 6 (2) 90°

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定以及性质, 勾股定理的逆定理等知识点.

(1) 证明 $\triangle BCD \sim \triangle BAC$, 由相似的性质可得出 $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$, 然后计算出 BA , 代入求值即可.

(2) 由 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ 得出 $CD^2 = 20$, 由勾股定理的逆定理得出 $\angle CDB = 90^\circ$, 进一步得出 $\angle CDA = 90^\circ$, $\angle A + \angle DCA = 90^\circ$ 由等量代换即可求出 $\angle DCA + \angle BCD = 90^\circ$, 即 $\angle ACB$ 的度数.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle BCD = \angle A$, $\angle B = \angle B$,

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC$,

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore BC^2 = BA \cdot BD$$

$$\because AD = 5, \quad BD = 4,$$

$$\therefore BA = AD + BD = 9,$$

$$\therefore BC^2 = BA \cdot BD = 9 \times 4 = 36,$$

$$\therefore BC = 6.$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ACD \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = AD \cdot BD = 20,$$

$$\therefore 20 + 4^2 = 6^2, \text{ 即 } CD^2 + BD^2 = BC^2$$

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形, 且 $\angle CDB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A,$$

$$\therefore \angle DCA + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ACB = 90^\circ.$$

22. 网络平台上有一款代金券, 主打的广告语是“满 80 团 1 张”. 规则如下: 在平台可以花 75 元团购一张 80 元代金券, 一张代金券在平台商城内可以抵 80 元消费额, 每笔消费可用于抵扣的代金券数量不限, 但不找零.

(1) 在平台商城一笔 375 元的消费, 如果使用 4 张代金券, 实际共支付了多少元?

(2) 在充分使用代金券的情况下, 在平台商城一笔 x 元的消费与实际总支付 y 元间存在着依赖关系, 当 $320 < x < 375$ 时, 写出 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 广告语是“满 80 团 1 张”. 如果在平台商城一笔消费未满 80 元, 那么是不是就一定没必要“团”哪? 说说你的理由.

【答案】 (1) 355 (2) $y = x - 20 (320 < x < 375)$

(3) 不是, 理由见详解

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用, 有理数混合运算的实际应用.

(1) 根据题意列式计算即可算得答案;

(2) 当 $320 < x < 375$ 时, 可使用 4 张代金券, 故根据题意列出一函数即可.

(3) 当在平台商城一笔消费为 76 元时, 若不团, 需支付 76 元, 若团一张代金券, 实际只支付 75 元, 同理消费在 75 到 80 之间, 团 1 张代金券都比不团要划算, 即可得到理由.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 根据题意有: } 375 - 4(80 - 75) = 355$$

故在平台商城一笔 375 元的消费, 如果使用 4 张代金券, 实际共支付了 355 元.

【小问 2 详解】

当 $320 < x < 375$ 时, 可使用 4 张代金券,

$$\text{故 } y = x - 4(80 - 75) = x - 20 (320 < x < 375).$$

【小问 3 详解】

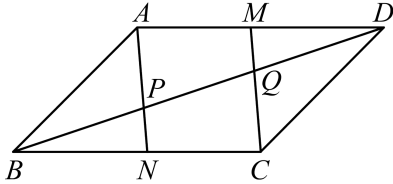
如果在平台商城一笔消费未 80 元，那么不是就一定没必要“团”，理由如下：

当在平台商城一笔消费为 76 元时，若不团，需支付 76 元，若团一张代金券，实际只支付 75 元；

同理在平台商城一笔消费为 77 元，78 元，79 元时，团 1 张代金券都比不团要划算；

故如果在平台商城一笔消费未 80 元，那么不是就一定没必要“团”。

23. 如图， M 、 N 分别是平行四边形 $ABCD$ 边 AD 、 BC 的中点，对角线 BD 交 AN 、 CM 分别于点 P 、 Q 。



(1) 求证： $PQ = \frac{1}{3}BD$ ；

(2) 当四边形 $ANCM$ 是正方形时，试从内角大小和邻边的数量关系的角度探究平行四边形 $ABCD$ 的形状特征。

【答案】 (1) 见详解 (2) $\angle ABC = 45^\circ, \angle BAC = 135^\circ, BC = \sqrt{2}AB$

【解析】

【分析】 本题主要考查平行四边形的性质、平行线所截线段成比例以及正方形的性质，

(1) 根据平行四边形的性质和中点得到 $AMCN$ 是平行四边形，有 $AN \parallel CM$ ，则有 $\frac{BP}{BQ} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$ 和

$\frac{DQ}{DP} = \frac{DM}{AD} = \frac{1}{2}$ ，即可得到结论。

(2) 由正方形的性质得到 $AN = NC$ ， $\angle ANB = 90^\circ$ ，结合中点 $AN = NB$ ，则有

$\angle ABC = 45^\circ, \angle BAC = 135^\circ, AN = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ ，进一步可得 $BC = \sqrt{2}AB$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC \parallel AD, BC = AD$ ，

$\because M$ 、 N 分别是 AD 、 BC 的中点，

$\therefore AM = NC, BN = \frac{1}{2}BC, DM = \frac{1}{2}AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形，

$\therefore AN \parallel CM$ ，

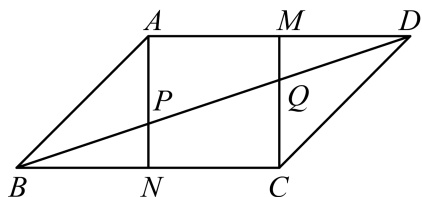
$$\text{则 } \frac{BP}{BQ} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } BP = PQ,$$

$$\text{同理 } \frac{DQ}{DP} = \frac{DM}{AD} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } DQ = PQ,$$

$$PQ = \frac{1}{3}BD.$$

【小问 2 详解】

如图,



由 (1) 知, $BN = NC$,

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 是正方形,

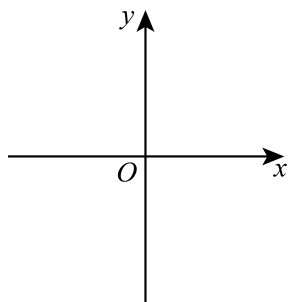
$\therefore AN = NC$, $\angle ANB = 90^\circ$,

$\therefore AN = NB$,

则 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAC = 135^\circ$, $AN = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$,

即 $BC = \sqrt{2}AB$.

24. 问题: 已知抛物线 $L: y = x^2 - 2x$, 抛物线 W 的顶点在抛物线 L 上 (非抛物线 L 的顶点) 且经过抛物线 L 的顶点. 请求出一个满足条件的抛物线 W 的表达式.



(1) 解这个问题的思路如下: 先在抛物线 L 上任取一点 (非顶点), 你所取的点是____①____; 再将该点作为抛物线 W 的顶点, 可设抛物线 W 的表达式是____②____; 然后求出抛物线 L 的顶点是____③____; 再将抛物线 L 的顶点代入所设抛物线 W 的表达式, 求得其中待定系数的值为____④____; 最后写出抛物线 W 的表达式是____⑤____.

(2) 用同样的方法, 你还可以获得其他满足条件的抛物线 W , 请再写出一个抛物线 W 的表达式.

(3) 如果问题中抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等, 求抛物线 W 的表达式.

【答案】(1) $y = -x^2$

(2) $y = -(x-2)^2$

(3) $y = -(x-\sqrt{2}-1)^2 + 1$ 或 $y = -(x+\sqrt{2}-1)^2 + 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图像和性质, 掌握待定系数法求函数解析式是解题的关键.

(1) 根据题目所给方法, 给定顶点坐标为 $(0,0)$ 计算即可解题;

(2) 仿照 (1) 中的方法, 给定坐标为 $(2,0)$ 计算即可解题;

(3) 抛物线 W 的顶点坐标为 $(m, m^2 - 2m)$ ($m \neq 1$), 把抛物线 L 的顶点是 $(1, -1)$ 代入求出 a 的值, 然后再根据抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等得到抛物线 M 过 $(m+1, 0)$, 代入得 $-1 + m^2 - 2m = 0$, 求出 m 值, 即可得到解析式.

【小问 1 详解】

先在抛物线 L 上任取一点 (非顶点), 你所取的点是 $(0,0)$; 再将该点作为抛物线 W 的顶点, 可设抛物线 W 的表达式是 $y = ax^2$; 然后求出抛物线 L 的顶点是 $(1, -1)$; 再将抛物线 L 的顶点代入所设抛物线 W 的表达式, 求得其中待定系数的值为 $a = -1$; 最后写出抛物线 W 的表达式是 $y = -x^2$.

【小问 2 详解】

解: $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$,

$\therefore$ 抛物线 L 的顶点是 $(1, -1)$,

取抛物线 W 的顶点坐标为 $(2, 0)$,

设抛物线 W 的解析式为 $y = a(x-2)^2$, 把 $(1, -1)$ 代入得: $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线 W 的解析式为 $y = -(x-2)^2$;

【小问 3 详解】

解: 令 $y = 0$, 则 $x^2 - 2x = 0$, 解得: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$,

$\therefore$ 抛物线 L 在 x 轴上所截得的线段长为 2,

设抛物线 W 的顶点坐标为 $(m, m^2 - 2m)$ ($m \neq 1$),

设解析式为 $y = a(x-m)^2 + m^2 - 2m$ ，把 $(1, -1)$ 代入得： $a(m-1)^2 + m^2 - 2m = -1$ ，

整理得 $(a+1)(m-1)^2 = 0$ ，即 $a = -1$ ，

$$\therefore y = -(x-m)^2 + m^2 - 2m,$$

又 $\because$ 抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等，

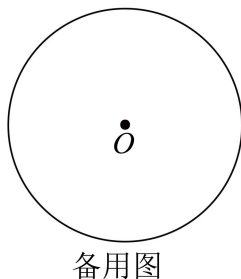
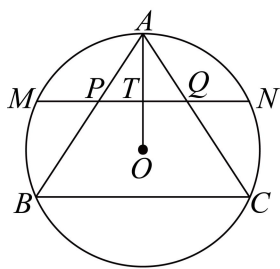
$\therefore$ 抛物线 M 在 x 轴上所截得的线段长为 2，

$\therefore$ 抛物线 M 过 $(m+1, 0)$ ，代入得 $-1 + m^2 - 2m = 0$ ，

解得： $m = \sqrt{2} + 1$ 或 $m = -\sqrt{2} + 1$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -(x - \sqrt{2} - 1)^2 + 1$ 或 $y = -(x + \sqrt{2} - 1)^2 + 1$ 。

25. 已知：如图， $\triangle ABC$ 是圆 O 的内接三角形， $AB = AC$ ， $\widehat{AB}$ 、 $\widehat{AC}$ 的中点分别为 M 、 N ， MN 与 AB 、 OA 、 AC 分别交于点 P 、 T 、 Q 。



备用图

(1) 求证： $OA \perp MN$ ；

(2) 当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，求 $\frac{AT}{OT}$ 的值；

(3) 如果圆心 O 到弦 BC 、 MN 的距离分别为 7 和 15，求线段 PQ 的长。

【答案】 (1) 见详解 (2) 1

(3) 15 或 $\frac{30}{11}\sqrt{11}$

【解析】

【分析】 (1) 连接 OM, ON ，由题意得 $\widehat{AM} = \widehat{AN}$ ，则点 A 在 MN 的中垂线上，结合圆的性质得点 O 在 MN 的中垂线上，则 OA 垂直平分 MN 即可；

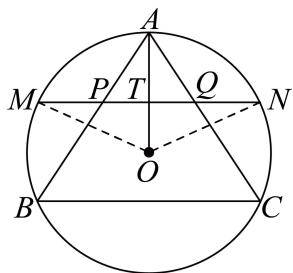
(2) 连接 OC, ON, AN ，由圆周角定理得 $\angle AOC = 120^\circ$ ，证得 $\triangle AON$ 是等边三角形，则有 $OA \perp MN$ ，可得 $AT = OT$ 即可；

(3) 连接 OM 交 AB 于点 G ，延长 AO 交 BC 于点 H ，由 (1) 得 $OA \perp MN$ ，同理 $BA \perp MO$ ，且 $AG = \frac{1}{2}AB$ ，

结合 $\cos \angle AOG = \frac{OG}{AO} = \frac{OT}{OM}$ ，设圆 O 的半径为 r ，利用 $\cos \angle BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{AG}{AO}$ 和 $AG^2 = r^2 - 15^2$ ，整理得到 $2(r^2 - 15^2) = AH \cdot r$ ，进一步分当 MN 与 BC 位于圆 O 的两侧和当 MN 与 BC 位于圆 O 的同侧求解即可。

【小问 1 详解】

证明：连接 OM, ON ，如图，



由题意得 $\widehat{AM} = \widehat{AN}$ ，则点 A 在 MN 的中垂线上，

$\therefore OM = ON$ ，

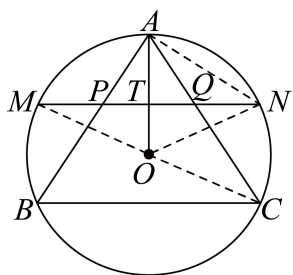
$\therefore$ 点 O 在 MN 的中垂线上，

则 OA 垂直平分 MN ，

那么， $OA \perp MN$ ；

【小问 2 详解】

连接 OC, ON, AN ，如图，



$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = 120^\circ$ ，

$\therefore OA = OC = ON$ ，点 N 为 $\widehat{AC}$ 的中点，

$\therefore \angle AON = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AON$ 是等边三角形，

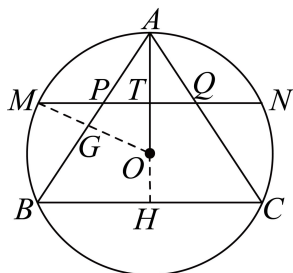
$\therefore OA \perp MN$ ，

$\therefore AT = OT$ ，

$$\therefore \frac{AT}{OT} = 1;$$

【小问3详解】

连接 OM 交 AB 于点 G , 延长 AO 交 BC 于点 H , 如图,



由 (1) 得 $OA \perp MN$, 同理 $BA \perp MO$, 且 $AG = \frac{1}{2}AB$,

$$\therefore \cos \angle AOG = \frac{OG}{AO} = \frac{OT}{OM}, \quad OA = OM,$$

$$\therefore OG = OT = 15,$$

设圆 O 的半径为 r ,

$$\therefore \cos \angle BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{AG}{AO}, \quad AG^2 = AO^2 - OG^2 = r^2 - 15^2,$$

$$\therefore 2AG^2 = AH \cdot AO, \quad \text{即 } 2(r^2 - 15^2) = AH \cdot r,$$

当 MN 与 BC 位于元 O 得两侧时, 则 $AH = r + 7$,

$$2(r^2 - 15^2) = (r + 7) \cdot r, \quad \text{解得 } r = 25, \quad r = -18 \text{ (舍去)},$$

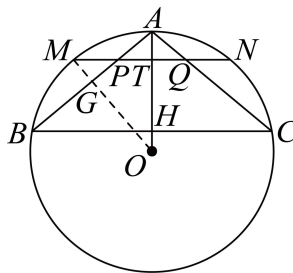
$$\text{则 } AH = 32, \quad AT = AO - OT = 25 - 15 = 10, \quad BH = \sqrt{r^2 - OH^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24,$$

$$\therefore \tan \angle PAT = \frac{PT}{AT} = \frac{BH}{AH},$$

$$\therefore PT = \frac{BH}{AH} \cdot AT = \frac{24}{32} \times 10 = \frac{15}{2},$$

$$\text{则 } PQ = 2PT = 15;$$

当 MN 与 BC 位于元 O 得同侧时, 如图,



$$\text{则 } AH = r - 7,$$

$$2(r^2 - 15^2) = (r - 7) \cdot r, \quad \text{解得 } r = 18, \quad r = -25 \text{ (舍去)},$$

则 $AH = 11$, $AT = AO - OT = 18 - 15 = 3$, $BH = \sqrt{r^2 - OH^2} = \sqrt{18^2 - 7^2} = 5\sqrt{11}$,

$$\therefore \tan \angle PAT = \frac{PT}{AT} = \frac{BH}{AH},$$

$$\therefore PT = \frac{BH}{AH} \cdot AT = \frac{5\sqrt{11}}{11} \times 3 = \frac{15}{11}\sqrt{11},$$

$$\text{则 } PQ = 2PT = \frac{30}{11}\sqrt{11};$$

故线段 PQ 的长为 15 或 $\frac{30}{11}\sqrt{11}$.

【点睛】 本题主要考查圆周角定理、垂径定理、等边三角形的判定和性质、勾股定理以及解直角三角形，解题的关键是熟练掌握圆的性质和解直角三角形，第三问主要分情况讨论.